ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2004 МАТЕМАТИКА № 10 (509)

УДК 514.756

А.В. СТОЛЯРОВ

КОНФОРМНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ПЛОСКИХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ СЕТЕЙ

В работе [1] рассмотрены некоторые вопросы геометрии плоских многомерных сетей Σ_n, вложенных в n-мерное проективное пространство P_n.

В данной работе изучается геометрия плоской сети Σ_n, заданной в конформном (псевдоконформном индекса $l \neq 0$ или собственно конформном, $l = 0$) пространстве C_n; в ней более детально исследуется геометрия ортогональных чебышевской, геодезической сетей и n-сопряженных систем $\Sigma_n \subset \mathrm{C}_n$.

На протяжении всего изложения индексы принимают следующие значения:

$$\lambda, \mu, \rho = \overline{0, n+1}; \quad i, j, k, l, s, t, p, q = \overline{1, n}.$$

1. Конформное пространство C_n (псевдоконформное или собственно конформное [2]) отнесем к подвижному полуизотропному [3] реперу $R = \{A_\lambda\}$, состоящему из точек A_0, A_{n+1} и n гиперсфер A_i действительных ненулевых радиусов, проходящих через эти точки. Если скалярные произведения $(A_\lambda\, A_\mu)$ элементов выбранного репера обозначить через $g_{\lambda\mu}$, то [2], [4]

$$||g_{\lambda\mu}|| = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & g_{ij} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad g_{\lambda\mu} = g_{\mu\lambda}; \tag{1}$$

отметим, что матрица $||g_{ij}||$ является невырожденной:

$$g^{ik} g_{kj} = \delta^i_j. \tag{2}$$

Если $P(x^\lambda)_R$ — точка пространства C_n, то в силу (1) и $(PP) = 0$ ее координаты удовлетворяют уравнению

$$g_{ij} x^i x^j + 2x^0 x^{n+1} = 0. \tag{3}$$

Уравнение (3) есть уравнение неподвижной действительной овальной гиперквадрики Дарбу Q^2_n (абсолют) проективного пространства P_{n+1}, на которую отображаются все точки конформного пространства C_n. При этом отображении Дарбу образы A_0 и A_{n+1} вершин A_0, A_{n+1} репера R лежат на гиперквадрике Дарбу (3), образами гиперсфер $X \in \mathrm{C}_n$ действительных ненулевых радиусов являются точки $\mathrm{X} \in \mathrm{P}_{n+1}$, находящиеся вне гиперквадрики Q^2_n; образами вершин A_i (т. е. гиперсфер) репера R являются точки $\mathrm{A}_i \in \mathrm{P}_{n+1}$, лежащие на пересечении поляр точек A_0 и A_{n+1}. В проективном пространстве P_{n+1} имеем проективный репер $\mathrm{R} = \{\mathrm{A}_\lambda\}$, соответствующий выбранному конформному реперу $R = \{A_\lambda\}$.

Отметим, что группа конформных преобразований $\mathcal{L}$ пространства C_n изоморфна подгруппе группы проективных преобразований пространства P_{n+1}, а именно, изоморфна стационарной подгруппе гиперквадрики Дарбу $Q^2_n \subset \mathrm{P}_{n+1}$; эта подгруппа зависит от $(n+1)(n+2)/2$ независимых параметров.

При бесконечно малом преобразовании конформной группы $\mathcal{L}$ (стационарной подгруппы абсолюта $Q_n^2 \subset \mathrm{P}_{n+1}$) элементы конформного репера R (проективного репера R) получают приращения, главную часть которых определяют дифференциалы dA_λ (соответственно $d\mathrm{A}_\lambda$), являющиеся гиперсферами (точками); эти дифференциалы разлагаются по элементам исходного репера R (R) следующим образом:

$$dA_\lambda = \omega_\lambda^\mu A_\mu \quad (\text{соответственно } d\mathrm{A}_\lambda = \omega_\lambda^\mu \mathrm{A}_\mu), \tag{4}$$

где дифференциальные формы Пфаффа ω_λ^μ зависят от параметров группы $\mathcal{L}$ (стационарной подгруппы абсолюта Q_n^2).

Условиями полной интегрируемости системы уравнений (4) являются структурные уравнения, которым подчинены формы ω_λ^μ:

$$D\omega_\lambda^\mu = \omega_\lambda^\rho \wedge \omega_\rho^\mu. \tag{5}$$

Кроме того, в силу соотношений (1), (4) формы ω_λ^μ удовлетворяют следующим линейным зависимостям [4]:

$$\begin{aligned} &\omega_0^{n+1} = \omega_{n+1}^0 = 0, \quad \omega_0^0 + \omega_{n+1}^{n+1} = 0; && (\text{а})\\ &\omega_i^0 + g_{ik}\omega_{n+1}^k = 0, \quad \omega_i^{n+1} + g_{ik}\omega_0^k = 0; && (\text{б})\\ &dg_{ij} - g_{ik}\omega_j^k - g_{kj}\omega_i^k = 0. && (\text{в}) \end{aligned} \tag{6}$$

2. На абсолюте Q_n^2 (см. (3)) проективного пространства P_{n+1} рассмотрим сеть $\widetilde{\Sigma}_n$, описываемую точкой A_0; в проективном репере R, отнесенном к ее линиям (т. е. вершины A_i репера R выбраны на касательных к линиям сети $\widetilde{\Sigma}_n$), дифференциальные уравнения сети $\widetilde{\Sigma}_n \subset Q_n^2$ имеют вид [5]

$$\omega_i^j = a_{ik}^j \omega_0^k, \quad i \neq j. \tag{7}$$

Каждому из n семейств линий сети $\widetilde{\Sigma}_n$ (n линейно независимых семейств однопараметрических множеств точек A_0, лежащих на абсолюте Q_n^2) в конформном пространстве C_n соответствует семейство линий; n таких линейно независимых семейств линий в пространстве C_n образуют сеть $\Sigma_n \subset \mathrm{C}_n$, которую по аналогии с [1] назовем *плоской*.

В конформном репере R, отнесенном к сети $\Sigma_n \subset \mathrm{C}_n$, она определяется системой дифференциальных уравнений (7). Заметим, что понятие “конформный репер R, отнесенный к сети $\Sigma_n \subset \mathrm{C}_n$” означает следующее: в полуизотропном конформном репере $R = \{A_0, A_i, A_{n+1}\}$ каждая гиперсфера A_i принадлежит пучку касающихся между собой в его центре $A_0 \in \mathrm{C}_n$ гиперсфер, определяемому точкой A_0 и гиперсферой dA_0 $(\operatorname{mod} \omega_0^j,\ j \neq i)$; следовательно, в выбранном репере R роль “касательной” к i-й линии сети $\Sigma_n \subset \mathrm{C}_n$ в ее точке A_0 играет пучок гиперсфер $X_i = A_i + \lambda_i A_0$.

Замыкая уравнения системы (7), с использованием (5), (6) получим

$$\Delta a_{ik}^j \wedge \omega_0^k = 0, \quad i \neq j, \tag{8}$$

где

$$\Delta a_{ik}^j = da_{ik}^j + a_{ik}^j(\omega_0^0 - \omega_i^i + \omega_j^j) - a_{is}^j \omega_k^s - g_{ik}\omega_{n+1}^j + \sum_{t \neq i,j} a_{ik}^t \omega_t^j - \delta_k^j \omega_i^0. \tag{9}$$

Раскрывая внешние квадратичные уравнения (8) по лемме Картана [6], имеем

$$\Delta a_{ik}^j = \mathrm{A}_{iks}^j \omega_0^s, \quad \mathrm{A}_{i[ks]}^j = 0, \quad i \neq j. \tag{10}$$

Из уравнений (10) следует, что число произвольных параметров — функций A_{iks}^j, определяющих наиболее общий интегральный элемент $\mathcal{E}_n$ [6] системы (7), равно $N = n^2(n^2-1)/2$.

Очевидно, что характеры [6] системы (7) суть $s_1 = \cdots = s_n = n(n-1)$, в силу чего число Картана [6]

$$Q = s_1 + 2s_2 + \cdots + ns_n = n^2(n^2-1)/2,$$

т. е. $Q = N$; следовательно, система (7) находится в инволюции, широта ее решения определяется $n(n-1)$ функциями n аргументов. Доказана

Теорема 1. *Плоские сети $\Sigma_n \subset \mathrm{C}_n$ существуют с произволом $n(n-1)$ функций n аргументов.*

Из соотношений (9), (10) с использованием (7) находим

$$\begin{gathered} da^j_{ik} + a^j_{ik}(\omega^0_0 + \omega^j_j - \omega^i_i - \omega^k_k) - \delta^j_k\omega^0_i - g_{ik}\omega^j_{n+1} = a^j_{iks}\omega^s_0, \quad i \neq j, \\ \delta a^j_{iks} + a^j_{iks}(2\pi^0_0 + \pi^j_j - \pi^i_i - \pi^k_k - \pi^s_s) - \delta^j_k \sum_{p\neq i} a^p_{is}\pi^0_p + \\ + a^j_{ik}(\pi^0_s - g_{js}\pi^j_{n+1} + g_{is}\pi^i_{n+1} + g_{ks}\pi^k_{n+1} - \delta^j_s\pi^0_j + \delta^i_s\pi^0_i + \delta^k_s\pi^0_k) - \\ - \sum_{q\neq k} g_{iq}a^q_{ks}\pi^j_{n+1} - \sum_{p\neq i} g_{kp}a^p_{is}\pi^j_{n+1} + \sum_{l\neq j} g_{ik}a^j_{ls}\pi^l_{n+1} = 0, \quad i \neq j, \end{gathered} \tag{11}$$

где

$$2a^j_{i[pq]} = 2\Big(\sum_{l\neq p,q} a^j_{il}a^l_{[pq]} - \sum_{t\neq i,j} a^t_{i[p}a^j_{|t|q]}\Big) + a^q_{pq}a^j_{iq} - a^p_{qp}a^j_{ip}, \quad i \neq j; \quad p \neq q. \tag{12}$$

Следуя [1], сеть $\Sigma_n \subset \mathrm{C}_n$ назовем *голономной*, если каждое из n уравнений Пфаффа $\omega^i_0 = 0$ вполне интегрируемо; очевидно, что необходимым и достаточным условием ее голономности является одновременное обращение в нуль всех относительных инвариантов:

$$a^i_{[pq]} = 0, \quad p, q \neq i. \tag{13}$$

Из условия (13) непосредственно следует, что при $n = 2$ всякая плоская сеть Σ_2 конформной плоскости C_2 является голономной.

Уравнения (11) в силу соотношений (6(б)) можно переписать в виде

$$da^j_{ik} + a^j_{ik}(\omega^0_0 + \omega^j_j - \omega^i_i - \omega^k_k) + (g_{ik}g^{js} - \delta^j_k\delta^s_i)\omega^0_s = a^j_{iks}\omega^s_0, \quad i \neq j,$$

откуда при $k = j$ имеем

$$da^j_{ij} + a^j_{ij}(\omega^0_0 - \omega^i_i) + (g_{ij}g^{js} - \delta^s_i)\omega^0_s = a^j_{ijs}\omega^s_0, \quad i \neq j, \tag{14}$$

по j нет суммирования.

В силу уравнений (6(в)), (7) функции

$$a^s_i \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j\neq i} g_{ij}g^{js} - (n-1)\delta^s_i \tag{15}$$

являются относительными ($i \neq s$) или абсолютными ($i = s$) инвариантами: $\delta a^s_i = a^s_i(\pi^i_i - \pi^s_s)$. Матрица порядка n из относительных и абсолютных инвариантов a^s_i, вообще говоря, невырождена; в этом легко убедиться, например, в случае ортогональной сети $\Sigma_n \subset \mathrm{C}_n$ ($g_{ij} = 0$, $i \neq j$, см. п. 3). Элементы $\overset{*}{a}{}^i_k$ обратной матрицы определяются соотношениями

$$\overset{*}{a}{}^i_l a^l_s = \overset{*}{a}{}^l_s a^i_l = \delta^i_s. \tag{16}$$

Из уравнений (14) и соотношений (15), (16) следует, что охват

$$q^0_i \stackrel{\text{def}}{=} \Big(\sum_{j\neq k} a^j_{kj}\Big)\overset{*}{a}{}^k_i \tag{17}$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$dq_i^0 + q_i^0(\omega_0^0 - \omega_i^i) + \omega_i^0 = q_{is}^0 \omega_0^s. \tag{18}$$

Гиперсферы

$$F_i = q_i^0 A_0 + A_i, \tag{19}$$

принадлежащие касательным к линиям сети $\Sigma_n \subset \mathrm{C}_n$, являются инвариантными: $\delta F_i = \pi_i^i F_i$; назовем их гармоническими гиперсферами сети. Очевидно, что в силу уравнений (18) поле гармонических точек $F \stackrel{\mathrm{def}}{=} [F_i]$ пересечения n гармонических гиперсфер F_i сети (согласно [7], [8]) задает нормализацию конформного пространства C_n. Таким образом, справедлива

Теорема 2. *Поле гармонических точек F плоской сети $\Sigma_n \subset \mathrm{C}_n$ внутренним образом определяет нормализацию конформного пространства C_n.*

Согласно [9] гармоническая точка F плоской сети $\Sigma_n \subset \mathrm{C}_n$ имеет разложение

$$F = -\frac{1}{2} g^{st} q_s^0 q_t^0 A_0 - g^{st} q_s^0 A_t + A_{n+1}.$$

3. Допустим, что сеть $\Sigma_n \subset \mathrm{C}_n$ ортогональная, т. е. касательные к ее линиям попарно ортогональны:

$$(X_i X_j) = (A_i A_j) = g_{ij} = 0, \quad i \neq j. \tag{20}$$

Из дифференциальных уравнений (6(в)) для последних равенств с использованием (7) имеем

$$g_{ii} a_{js}^i + g_{jj} a_{is}^j = 0, \quad i \neq j,$$

откуда в силу (2) непосредственно находим

$$\begin{aligned} & a_{ij}^j = -g^{jj} g_{ii} a_{jj}^i, \quad i \neq j, \ \text{ суммирования по } j \text{ нет}, && \text{(а)} \\ & g_{ii} a_{jk}^i + g_{jj} a_{ik}^j = 0, \ \text{ все индексы различны.} && \text{(б)} \end{aligned} \tag{21}$$

Продифференцировав выражения (21(а)), с использованием уравнений (6(в)), (11) и соотношений (6(б)), (20) находим

$$a_{ijs}^j = -g^{jj} g_{ii} a_{jjs}^i, \quad i \neq j, \ \text{ по } j \text{ нет суммирования.} \tag{22}$$

В случае ортогональной сети $\Sigma_n \subset \mathrm{C}_n$ в силу соотношений (15), (20) матрица $||a_i^s||$ невырождена, ибо $|a_i^s| = (1-n)^n \neq 0$; следовательно, допущенное выше (п. 2) предположение о невырожденности указанной матрицы соответствует общему случаю.

Гармонические гиперсферы (19) ортогональной сети $\Sigma_n \subset \mathrm{C}_n$ согласно соотношениям (15)–(17), (20), (21(а)) задаются n квазитензорами

$$q_i^0 = -\frac{1}{n-1} \sum_{j \neq i} a_{ij}^j = \frac{1}{n-1} g_{ii} \sum_{j \neq i} g^{jj} a_{jj}^i; \tag{23}$$

при этом в дифференциальных уравнениях (18) функции q_{is}^0 в силу (14), (20), (22) имеют строение

$$q_{is}^0 = -\frac{1}{n-1} \sum_{j \neq i} a_{ijs}^j = \frac{1}{n-1} g_{ii} \sum_{j \neq i} g^{jj} a_{jjs}^i. \tag{24}$$

Геометрический смысл гармонических гиперсфер F_i ортогональной сети $\Sigma_n \subset \mathrm{C}_n$ заключается в следующем. В силу уравнений (4), (11) и соотношений (20), (21) каждая из $n-1$ гиперсфер

$$F_i^j = -a_{ij}^j A_0 + A_i = g^{jj} g_{ii} a_{jj}^i A_0 + A_i, \quad i \neq j, \tag{25}$$

принадлежащих касательной к i-й линии ортогональной сети $\Sigma_n \subset \mathrm{C}_n$, является инвариантной: $\delta F_i^j = \pi_i^i F_i^j$; по аналогии с [1] назовем их псевдофокальными гиперсферами касательной A_0A_i к i-й линии сети $\Sigma_n \subset \mathrm{C}_n$. Теперь в силу (19), (23), (25) очевидно, что для ортогональной сети $\Sigma_n \subset \mathrm{C}_n$ справедливо $F_i = \frac{1}{n-1}\sum\limits_{j\neq i} F_i^j$.

Пусть размерность конформного пространства C_n больше 2, т. е. $n \geq 3$. Расписывая соотношения (21(б)) путем циклической перестановки индексов i, j, k, получим систему

$$\begin{cases} g_{ii}a^i_{jk} + g_{jj}a^j_{ik} = 0, \\ g_{jj}a^j_{ki} + g_{kk}a^k_{ji} = 0, \\ g_{kk}a^k_{ij} + g_{ii}a^i_{kj} = 0, \end{cases} \qquad \text{все индексы различны.} \tag{26}$$

Предположим, что ортогональная сеть $\Sigma_n \subset \mathrm{C}_n$ $(n \geq 3)$ является голономной, т. е. справедливы равенства (13). Так как теперь при каждой фиксированной тройке различных индексов i, j, k система (26) есть система трех линейных однородных уравнений с тремя неизвестными a^i_{jk}, a^j_{ik}, a^k_{ij}, причем определитель системы $\Delta \overset{\mathrm{def}}{=} 2g_{ii}g_{jj}g_{kk} \neq 0$, то справедливо

$$a^j_{ik} = 0, \quad \text{все индексы различны.} \tag{27}$$

Обращение в нуль всех относительных инвариантов a^j_{ik} (см. (27)) для рассматриваемого класса сетей $\Sigma_n \subset \mathrm{C}_n$ $(n \geq 3)$ приводит к классу плоских сетей, называемых n-сопряженными системами (см. п. 4).

4. По аналогии с [10] будем говорить, что ортогональная сеть $\Sigma_n \subset \mathrm{C}_n$ есть n-сопряженная система, если при перенесении Дарбу соответствующая ей сеть $\widetilde{\Sigma}_n \subset Q^2_n \subset \mathrm{P}_{n+1}$ является n-сопряженной системой, т. е. все псевдофокусы (см. (25))

$$F_i^j = -a^j_{ij}\mathrm{A}_0 + \mathrm{A}_i, \quad i \neq j,$$

каждой касательной $\mathrm{A}_0\mathrm{A}_i$ к линии ω_0^i сопряженной (относительно поля конусов направлений $g_{st}\omega_0^s\omega_0^t = 0$) сети $\widetilde{\Sigma}_n$ на Q^2_n являются фокусами. Последнее означает, что каждая касательная $\mathrm{A}_0\mathrm{A}_i$ к линии ω_0^i сети $\widetilde{\Sigma}_n \subset Q^2_n$ при смещении точки A_0 вдоль другой ее линии ω_0^j описывает двумерную развертывающуюся поверхность с ребром возврата, описываемым фокусом F_i^j; следовательно,

$$dF_i^j \in (\mathrm{A}_0\mathrm{A}_i) \ (\mathrm{mod}\{\omega_0^k = 0, \ k \neq j\}).$$

Так как согласно соотношениям (4), (6(б)), (7), (14), (20)

$$dF_i^j = -a^j_{ijj}\mathrm{A}_0\omega_0^j + \omega_i^i F_i^j + \sum_{s\neq i,j} a^s_{ij}\mathrm{A}_s\omega_0^j \ (\mathrm{mod}\{\omega_0^k = 0, \ k \neq j\}),$$

то

а) при $n > 2$ необходимым и достаточным условием, при котором ортогональная сеть $\Sigma_n \subset \mathrm{C}_n$ есть n-сопряженная система, является обращение в нуль относительных инвариантов a^j_{ik} (все индексы различны), т. е. выполнение соотношений (27); заметим, что соотношения (27) обеспечивают выполнение соотношений (13), т. е. n-сопряженная система является голономной;

б) при $n = 2$ всякая ортогональная сеть $\Sigma_2 \subset \mathrm{C}_2$ конформной плоскости C_2 является 2-сопряженной системой.

Таким образом, с учетом п. 3 справедлива

Теорема 3. *Плоская ортогональная сеть $\Sigma_n \subset \mathrm{C}_n$ $(n \geq 2)$ есть n-сопряженная система тогда и только тогда, когда она является голономной.*

Определяется n-сопряженная система $\Sigma_n \subset \mathrm{C}_n$ $(n \geq 2)$ системой уравнений

$$\omega_i^j = a_{ii}^j \omega_0^i + a_{ij}^j \omega_0^j, \quad i \neq j, \tag{28}$$

в которой функции a_{ii}^j, a_{ij}^j подчинены конечным соотношениям (21(a)). Замыкая уравнения системы (28), имеем

$$\Delta a_{ii}^j \wedge \omega_0^i + \Delta a_{ij}^j \wedge \omega_0^j = 0, \quad i \neq j,$$

где

$$\Delta a_{ii}^j = da_{ii}^j + a_{ii}^j(\omega_0^0 - 2\omega_i^i + \omega_j^j) + a_{ii}^j \sum_{t \neq i} a_{ti}^i \omega_0^t + \sum_{s \neq i,j} a_{ii}^s \omega_s^j + g_{ii} g^{jj} \omega_j^0,$$
$$\Delta a_{ij}^j = da_{ij}^j + a_{ij}^j(\omega_0^0 - \omega_i^i) + a_{ij}^j \sum_{l \neq j} a_{lj}^j \omega_0^l - \sum_{s \neq i,j} a_{is}^s a_{sj}^j \omega_0^s - \omega_i^0.$$

В силу соотношений (21(a)) формы Δa_{ij}^j, Δa_{jj}^i связаны линейными зависимостями

$$\Delta a_{ij}^j = -g^{jj} g_{ii} \Big(\Delta a_{jj}^i - \sum_{s \neq i,j} a_{jj}^s a_{si}^i \omega_0^i \Big), \quad i \neq j.$$

Теперь нетрудно проверить, что система уравнений (28) находится в инволюции, ее решение определяется с произволом $n(n-1)$ функций одного аргумента. Доказана

Теорема 4. *n-сопряженные системы $\Sigma_n \subset \mathrm{C}_n$ $(n \geq 2)$ существуют с произволом $n(n-1)$ функций одного аргумента.*

5. Предположим, что задана нормализация конформного пространства C_n полем квазитензора x_i^0:

$$\begin{gathered} dx_i^0 + x_i^0 \omega_0^0 - x_k^0 \omega_i^k + \omega_i^0 = x_{ik}^0 \omega_0^k, \\ \delta x_{ik}^0 + 2x_{ik}^0 \pi_0^0 - x_{is}^0 \pi_k^s - x_{sk}^0 \pi_i^s + x_i^0 \pi_k^0 + x_k^0 \pi_i^0 - g_{ik} g^{st} x_s^0 \pi_t^0 = 0. \end{gathered} \tag{29}$$

Известно [11], что система форм $\{\theta_{\bar{i}}^k\}$ вида

$$\begin{gathered} \theta_0^k = \omega_0^k, \\ \theta_i^k = \omega_i^k - \delta_i^k(\omega_0^0 - x_s^0 \omega_0^s) + g^{ks} x_s^0 \omega_i^{n+1} + x_i^0 \omega_0^k \end{gathered} \tag{30}$$

удовлетворяет структурным уравнениям Картана–Лаптева [5], [6]

$$\begin{gathered} D\theta_0^k = \theta_0^s \wedge \theta_s^k, \\ D\theta_i^k = \theta_i^s \wedge \theta_s^k + \frac{1}{2} R_{ist}^k \theta_0^s \wedge \theta_0^t, \end{gathered} \tag{31}$$

а следовательно, определяет пространство аффинной связности $\mathrm{A}_{n,n}$ без кручения ($R_{0st}^k \equiv 0$). В структурных уравнениях (31) тензор кривизны R_{ist}^k пространства $\mathrm{A}_{n,n}$ имеет следующее строение:

$$R_{ist}^k = 2(g^{lp} x_p^0 x_l^0 g_{i[s} \delta_{t]}^k - g^{kp} x_p^0 g_{i[s} \delta_{t]}^l x_l^0 + x_{i[s}^0 \delta_{t]}^k - x_i^0 x_l^0 \delta_{[s}^l \delta_{t]}^k - g^{kl} x_{l[s}^0 g_{t]i} + \delta_i^k x_{l[s}^0 \delta_{t]}^l). \tag{32}$$

Согласно [9] пространство $\mathrm{A}_{n,n}$ является вейлевым с полем метрического тензора g_{ik}; это пространство является римановым тогда и только тогда, когда кососимметричный тензор $x_{[ik]}^0$ (см. (29)) обращается в нуль.

Линия l в конформном пространстве C_n определяется уравнениями

$$l : \omega_0^i = l^i \theta, \quad D\theta = \theta \wedge \theta_0^0.$$

Одномерный линейный элемент L_1, определяемый точкой A_0 и гиперсферой $M = \mu^k(x_k^0 A_0 + A_k)$ (т. е. пучок касающихся между собой в центре A_0 гиперсфер $X = M + \lambda A_0$), назовем "направлением $A_0 M$".

Условием параллельного перенесения направления A_0M вдоль кривой l в аффинной связности ∇, определяемой системой форм (30), является выполнение уравнений

$$d\mu^i + \mu^k\theta^i_k = \Theta\mu^i \ (\operatorname{mod} l). \tag{33}$$

Согласно соотношениям (33) условие параллельного перенесения направления A_0A_i ($\mu^i = 1$, $\mu^j = 0$, $j \neq i$) касательной к i-й линии сети $\Sigma_n \subset \mathrm{C}_n$ вдоль линии l в аффинной связности ∇ имеет вид

$$\theta^j_i = 0 \ (\operatorname{mod} l), \quad j \neq i.$$

Если в качестве линии l взять линию ω^k_0 ортогональной сети (все $\omega^s_0 = 0$, $s \neq k$), то последнее условие с использованием (6(б)), (7), (20), (30) равносильно соотношениям

$$a^j_{ik} - g^{jj}x^0_j g_{ik} + x^0_i\delta^j_k = 0, \quad i \neq j. \tag{34}$$

Таким образом, *условием параллельного перенесения направления A_0A_i касательной к i-й линии ортогональной сети $\Sigma_n \subset \mathrm{C}_n$ вдоль ее k-й линии в аффинной связности ∇, индуцируемой нормализацией конформного пространства полем квазитензора x^0_s, является выполнение соотношений* (34).

6. Если в качестве поля квазитензора x^0_i взять поле q^0_i (см. (17)), определяемое плоской сетью $\Sigma_n \subset \mathrm{C}_n$, то уравнения (18) после приведения к виду (29) запишутся так:

$$dq^0_i + q^0_i\omega^0_0 - q^0_k\omega^k_i + \omega^0_i = \widetilde{q}^{\,0}_{is}\omega^s_0,$$

где

$$\widetilde{q}^{\,0}_{is} = q^0_{is} - \sum_{j\neq i} q^0_j a^j_{is}. \tag{35}$$

Таким образом, справедлива

Теорема 5. *Пространство аффинной связности $\mathrm{A}_{n,n}$, индуцируемое нормализацией конформного пространства C_n полем гармонических точек F плоской сети $\Sigma_n \subset \mathrm{C}_n$, является римановым тогда и только тогда, когда $n(n-1)/2$ относительных инвариантов $\widetilde{q}^{\,0}_{[pq]}$, $p \neq q$,*

$$\delta\widetilde{q}^{\,0}_{[pq]} = \widetilde{q}^{\,0}_{[pq]}(\pi^p_p + \pi^q_q - 2\pi^0_0)$$

одновременно обращаются в нуль.

Предположим, что сеть $\Sigma_n \subset \mathrm{C}_n$ является n-сопряженной системой; в силу ее ортогональности функции $\widetilde{q}^{\,0}_{is}$ (см. (35)) с использованием соотношений (23), (24) имеют строение

$$\widetilde{q}^{\,0}_{is} = \frac{1}{n-1}\sum_{j\neq i}\Big[\Big(\sum_{l\neq j} a^l_{jl}\Big)a^j_{is} - a^j_{ijs}\Big].$$

Из последних соотношений в силу равенств (27) имеем

$$\widetilde{q}^{\,0}_{pq} = \frac{1}{n-1}\Big[\Big(\sum_{l\neq q} a^l_{ql}\Big)a^q_{pq} - \sum a^k_{pkq}\Big], \quad p \neq q,$$

откуда непосредственно находим

$$2\widetilde{q}^{\,0}_{[pq]} = \frac{1}{n-1}\Big[\Big(\sum_{l\neq q} a^l_{ql}\Big)a^q_{pq} - \Big(\sum_{k\neq p} a^k_{pk}\Big)a^p_{qp} - a^q_{pqq} + a^p_{qpp} - 2\sum_{t\neq p,q} a^t_{[p|t|q]}\Big], \quad p \neq q. \tag{36}$$

Из соотношений (36) при $n = 2$ получим

$$2\widetilde{q}^{\,0}_{[pq]} = -(a^q_{pqq} - a^p_{qpp}), \quad p \neq q. \tag{37}$$

Если $n > 2$, то из уравнений (11) для равенств (27) с учетом (20) имеем

$$a^j_{pqj} = a^j_{qpj} = 0, \quad \text{все индексы различны, суммирования нет.}$$

Следовательно, соотношения (36) с использованием последних равенств и равенств (12), (27) при $n > 2$ запишутся в виде

$$2\tilde{q}^0_{[pq]} = -\frac{1}{n-1}(a^q_{pqq} - a^p_{qpp}), \quad p \neq q. \tag{37$'$}$$

Заметим, что в силу уравнений (11) и соотношений (20), (21(a)), (27) каждая из разностей $a^q_{pqq} - a^p_{qpp}$ есть относительный инвариант

$$\delta(a^q_{pqq} - a^p_{qpp}) = (a^q_{pqq} - a^p_{qpp})(\pi^p_p + \pi^q_q - 2\pi^0_0), \quad p \neq q.$$

Таким образом, с учетом теоремы 5 и равенств (37), (37$'$) имеет место

Теорема 6. *Пространство аффинной связности* $\mathrm{A}_{n,n}$*, индуцируемое нормализацией конформного пространства* C_n *полем гармонических точек* F *n-сопряженной системы* $\Sigma_n \subset \mathrm{C}_n$ $(n \geq 2)$*, является римановым тогда и только тогда, когда* $n(n-1)/2$ *относительных инвариантов* $a^q_{pqq} - a^p_{qpp}$*,* $p \neq q$ *одновременно обращаются в нуль.*

7. Если условие (34) справедливо для любых $i{\neq}k$ $(i{=}k)$, то ортогональная сеть $\Sigma_n \subset \mathrm{C}_n$ называется *чебышевской* (*геодезической*) относительно данной нормализации конформного пространства C_n, определяемой полем квазитензора x^0_i.

Из соотношений (34) следует условие геодезичности $(i = k)$ ортогональной сети $\Sigma_n \subset \mathrm{C}_n$ в связности ∇

$$a^j_{ii} - g_{ii}g^{jj}x^0_j = 0, \quad i \neq j; \tag{38}$$

аналогично из тех же соотношений следует условие, при выполнении которого ортогональная сеть $\Sigma_n \subset \mathrm{C}_n$ является чебышевской в связности ∇,

$$a^j_{ik} + \delta^j_k x^0_i = 0, \quad i \neq j, k. \tag{39}$$

Из условия (38) в силу соотношений (23), (25) непосредственно следует

Теорема 7. *Если относительно некоторой нормализации конформного пространства* C_n *полем квазитензора* x^0_i *пространство* C_n *несет ортогональную геодезическую сеть* Σ_n *в аффинной связности* ∇*, то она является сетью с совпавшими псевдофокальными гиперсферами и данная нормализация будет нормализацией полем ее гармонических точек* F $(x^0_i \equiv q^0_i)$*.*

Имеет место и обратное утверждение.

Теорема 8. *Если ортогональная сеть* $\Sigma_n \subset \mathrm{C}_n$ *есть сеть с совпавшими псевдофокальными гиперсферами, то при нормализации конформного пространства* C_n *полем ее гармонических точек* F *данная сеть является геодезической относительно аффинной связности* ∇*.*

Приведем без доказательства следующее предложение: *ортогональные геодезические сети* $\Sigma_3 \subset \mathrm{C}_3$ *существуют с произволом в три функции двух аргументов.*

В силу соотношений (21(a)), (23), (25), (39) и теоремы 8 справедлива

Теорема 9. *Если ортогональная сеть* $\Sigma_n \subset \mathrm{C}_n$ *относительно некоторой нормализации конформного пространства* C_n *является чебышевской в аффинной связности* ∇*, то она является геодезической; при этом данная нормализация есть нормализация пространства* C_n *полем гармонических точек* F *сети.*

Заметим, что при $n = 2$ всякая ортогональная сеть $\Sigma_2 \subset \mathrm{C}_2$ при нормализации конформной плоскости C_2 полем гармонических точек сети относительно аффинной связности ∇ является геодезической и чебышевской одновременно.

При $n > 2$ требования условия (39), при котором ортогональная сеть $\Sigma_n \subset \mathrm{C}_n$ является чебышевской относительно аффинной связности ∇, являются более сильными, чем требования условия (38) ее геодезичности, ибо соотношения (39) накладывают дополнительные условия (27) обращения в нуль относительных инвариантов a^j_{ik}.

Согласно теореме 9 и равенствам (27) справедлива

Теорема 10. *Ортогональная сеть $\Sigma_n \subset \mathrm{C}_n$ $(n > 2)$ есть чебышевская тогда и только тогда, когда она является n-сопряженной геодезической сетью.*

Заметим, что при $n = 2$ всякая ортогональная сеть $\Sigma_2 \subset \mathrm{C}_2$ является чебышевской, геодезической и 2-сопряженной системой одновременно.

8. Согласно теореме 4 ортогональная сеть $\Sigma_2 \subset \mathrm{C}_2$ существует с произволом в две функции одного аргумента.

Рассмотрим ортогональную чебышевскую сеть $\Sigma_n \subset \mathrm{C}_n$ $(n > 2)$; в репере $A_i \equiv F_i$ в силу теоремы 10, уравнений (18), (28) и равенств (21(а)), (23), (27) она определяется системой уравнений

$$\omega_i^j = 0, \quad \omega_i^0 = q_{is}^0 \omega_0^s, \quad i \neq j. \tag{40}$$

Замыкание уравнений $\omega_i^j = 0$, $i \neq j$, с использованием (5), (6(б)), (20) приводит к квадратичным уравнениям

$$g_{ii} g^{jj} q_{js}^0 \omega_0^s \wedge \omega_0^i - q_{is}^0 \omega_0^s \wedge \omega_0^j = 0, \quad i \neq j,$$

откуда непосредственно следует

$$q_{is}^0 = 0. \tag{41}$$

В силу равенств (41) уравнения системы (40) запишутся в виде

$$\omega_i^j = 0, \quad \omega_i^0 = 0, \quad i \neq j;$$

эта система вполне интегрируема, широта ее решения определяется n^2 произвольными постоянными. Доказана

Теорема 11. *Ортогональные чебышевские сети $\Sigma_n \subset \mathrm{C}_n$ $(n > 2)$ существуют с n^2 произвольными постоянными.*

В случае ортогональной чебышевской сети $\Sigma_n \subset \mathrm{C}_n$ $(n > 2)$ в репере $A_i \equiv F_i$ в силу $q_i^0 = 0$ и равенств (35), (41) справедливо $\widetilde{q}_{is}^0 = 0$. При нормализации конформного пространства C_n полем гармонических точек F рассматриваемой сети ($x_i^0 \equiv q_i^0 = 0$, $x_{is}^0 \equiv \widetilde{q}_{is}^0 = 0$) согласно соотношениям (32) имеем $R_{ist}^k \equiv 0$. Это означает, что внутренняя геометрия пространства аффинной связности $\mathrm{A}_{n,n}$, индуцируемого при этой нормализации, является евклидовой (локально).

Таким образом, справедлива

Теорема 12. *Внутренняя геометрия пространства аффинной связности $\mathrm{A}_{n,n}$, индуцируемого нормализацией конформного пространства C_n полем гармонических точек F ортогональной чебышевской сети $\Sigma_n \subset \mathrm{C}_n$ $(n > 2)$ является евклидовой (локально).*

В случае плоской сети $\Sigma_2 \subset \mathrm{C}_2$ в выбранном репере $(A_i \equiv F_i)$ с использованием равенств $q_i^0 = 0$ и (35) имеем $\widetilde{q}_{is}^0 = q_{is}^0$. При этом следует заметить, что, вообще говоря, $\widetilde{q}_{[pq]}^0 \neq 0$, $p \neq q$, т. е. внутренняя геометрия пространства аффинной связности $\mathrm{A}_{2,2}$, вообще говоря, не является римановой.

Так как в выбранном репере справедливо $\omega_i^j = 0$, $i \neq j$, то замыкание последних уравнений при $n = 2$ приводит к равенствам $q_{ii}^0 = \widetilde{q}_{ii}^0 = 0$. С использованием равенств $x_i^0 \equiv q_i^0 = 0$, $x_{ii}^0 \equiv \widetilde{q}_{ii}^0 = 0$ из выражений (32) находим компоненты тензора кривизны R_{ist}^k пространства $\mathrm{A}_{2,2}$:

$$R_{i12}^k = \widetilde{q}_{i1}^0 \delta_2^k - \widetilde{q}_{i2}^0 \delta_1^k - (g^{k2} \widetilde{q}_{21}^0 g_{2i} - g^{k1} \widetilde{q}_{12}^0 g_{1i}) + 2\delta_i^k \widetilde{q}_{[21]}^0,$$

откуда непосредственно следует

$$R_{112}^2 = R_{212}^1 = 0, \quad R_{112}^1 = R_{212}^2 = -2\widetilde{q}_{[12]}^0.$$

Последние соотношения с учетом теоремы 5 доказывают следующее предложение.

Теорема 13. *Внутренняя геометрия пространства аффинной связности* $\mathrm{A}_{2,2}$, *индуцируемого нормализацией конформной плоскости* C_2 *полем гармонических точек* F *ортогональной сети* $\Sigma_2 \subset \mathrm{C}_2$, *есть риманова тогда и только тогда, когда она является евклидовой* (*локально*).

Литература

1. Базылев В.Т. *К геометрии плоских многомерных сетей* // Учен. зап. Московск. гос. пед. ин-та им. В.И. Ленина. – 1965. – № 243. – С .29–37.
2. Akivis M.A., Goldberg V.V. *Conformal differential geometry and its generalizations.* – USA, 1996. – 384 p.
3. Бушманова Г. В., Норден А.П. *Элементы конформной геометрии.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1972. – 178 с.
4. Акивис М.А. *К конформно-дифференциальной геометрии многомерных поверхностей* // Матем. сб. – 1961. – Т. 53. – № 1. – С. 53–72.
5. Базылев В.Т. *О сетях на многомерных поверхностях проективного пространства* // Изв. вузов. Математика. – 1966. – № 2. – С. 9–19.
6. Фиников С.П. *Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии.* – М.: ГИТТЛ, 1948. – 432 с.
7. Норден А.П. *Конформная интерпретация пространства Вейля* // Матем. сб. – 1949. – Т. 24. – № 66. – С. 75–85.
8. Норден А.П. *Пространства аффинной связности.* – М.: Наука, 1976. – 432 с.
9. Столяров А.В. *Внутренняя геометрия нормализованного конформного пространства* // Изв. вузов. Математика. – 2002. – № 11. – С. 61–70.
10. Смирнов Р.В. *Преобразования Лапласа p-сопряженных систем* // ДАН СССР. – 1950. – Т. 71. – № 3. – С. 437–439.
11. Лаптев Г.Ф. *Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований* // Тр. Московск. матем. о-ва. – 1953. – Т. 2. – С. 275–382.
12. Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П. *Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях* // Итоги науки и техн. Пробл. геометрии. – М.: ВИНИТИ, 1979. – Т. 9. – 247 с.

Чувашский государственный
педагогический университет

Поступила
08.10.2003