Известия вузов. Математика
2016, № 5, с. 86–92

http://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

Краткое сообщение

В.А. СРОЧКО, В.Г. АНТОНИК

УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ УПРАВЛЕНИЙ ДЛЯ БИЛИНЕЙНОЙ И КВАДРАТИЧНОЙ ЗАДАЧ

Аннотация. Рассматривается задача оптимизации билинейного функционала относительно линейной фазовой системы с модульным ограничением на управление. На основе точных формул приращения функционала получены достаточные условия оптимальности экстремальных управлений, дополняющие принцип максимума с сохранением трудоемкости реализации. Эти условия представляются в форме неравенств для функций одной переменной на промежутке времени. Задача оптимизации для квадратичного функционала с помощью матричной сопряженной функции сводится к билинейному случаю.

Ключевые слова: невыпуклые задачи оптимального управления, принцип максимума, достаточные условия оптимальности.

УДК: 517.97

Введение

В настоящее время решение определенных классов невыпуклых задач оптимального управления до уровня экстремальных процессов не представляет существенных затруднений. На этом этапе эффективно работают локальные (с малыми параметрами) и нелокальные (без параметрического поиска) методы последовательных приближений со свойством сходимости по невязкам необходимых условий оптимальности [1]–[3]. Проблема оптимальности экстремальных управлений по-прежнему сохраняет свою актуальность и исследуется с различных позиций. Достаточные условия оптимальности представляют собой наиболее естественный подход к анализу экстремальных процессов [4], [5]. Ценность таких условий определяется в первую очередь трудоемкостью их реализации в сравнении, например, с проверкой необходимых условий. В этом плане целесообразно выделять специальные невыпуклые задачи с минимальным “расстоянием” между необходимыми и достаточными условиями по критерию их проверочной трудоемкости.

В данной работе на первом этапе рассматривается простейшая невыпуклая задача с билинейным функционалом относительно линейной фазовой системы с модульным ограничением на управление. На основе нелокальных формул приращения функционала получены достаточные условия оптимальности для экстремальных управлений без переключений.

Поступила 25.11.2015

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 14-01-00564).

Специфика задачи допускает аналитическое решение возникающих вспомогательных подзадач, что является существенным фактором в плане качества итоговых результатов. Полученные условия оптимальности представляются в форме неравенств для функций одной переменной (времени) на промежутке управления. Реализация этих условий не требует итерационных процедур и носит простой вычислительный характер, сопоставимый с проверкой выполнения принципа максимума. Задача оптимизации с квадратичным функционалом с помощью соответствующей формулы приращения сводится к билинейному случаю. Полученные результаты иллюстрируются примерами.

1. Простейшая билинейная задача. Необходимые соотношения

Введем переменные $t \in T = [t_0, t_1]$ — время, $u(t) \in R$ — управление, $x(t) \in R^n$ — фазовое состояние. Определим множество допустимых управлений в классе кусочно-непрерывных функций с модульным ограничением

$$V = \big\{u \in \mathrm{PC}(T) : |u(t)| \leqslant 1,\ t \in [t_0, t_1]\,\big\}. \tag{1}$$

Связь $u(t) \Rightarrow x(t)$ формализуем в рамках линейной системы

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)u, \quad x(t_0) = x^0. \tag{2}$$

Качество управления $u \in V$ оценим с помощью функционала

$$\Phi(u) = \langle c, x(t_1)\rangle + \int_{t_0}^{t_1} \langle a(t), x(t)\rangle u(t)dt$$

с билинейностью (x, u) под знаком интеграла.

Предположим, что вектор-функции $a(t)$, $b(t)$ и матричная функция $A(t)$ непрерывны на $[t_0, t_1]$.

Сформулируем задачу оптимального управления

$$\Phi(u) \to \max, \quad u \in V. \tag{P}$$

Это простейшая невыпуклая задача, в которой принцип максимума (ПМ) не является достаточным условием оптимальности [1], [2].

Приведем соотношения ПМ применительно к задаче (P). Введем функцию Понтрягина

$$H(\psi, x, u, t) = \langle \psi, A(t)x + b(t)u\rangle + \langle a(t), x\rangle u,$$

сопряженную систему $\dot{\psi} = -A^T(t)\psi - a(t)u$, $\psi(t_1) = c$ и обозначим производную

$$H_u(\psi, x, t) = \langle a(t), x\rangle + \langle b(t), \psi\rangle.$$

Для управления $u \in V$ и соответствующих траекторий $x(t, u)$, $\psi(t, u)$ определим функцию переключения

$$H_u[t, u] = H_u(\psi(t, u), x(t, u), t), \quad t \in [t_0, t_1].$$

Тогда принцип максимума для управления $u(t)$ (ПМ (u)) как необходимое условие оптимальности формулируется в виде

$$u(t) = \operatorname{sign} H_u[t, u], \quad t \in T.$$

Поставим цель дополнить этот результат до достаточного условия, по крайней мере, для простейших управлений без точек переключения. При этом возьмем за основу две точные

формулы приращения функционала [1], [2], которые в рамках задачи (P) имеют вид

$$\Phi(v)-\Phi(u)=\int_{t_0}^{t_1}\big(H_u[t,u]+\langle a(t),x(t,v)-x(t,u)\rangle\big)(v(t)-u(t))dt=$$
$$=\int_{t_0}^{t_1}\big(H_u[t,u]+\langle b(t),\psi(t,v)-\psi(t,u)\rangle\big)(v(t)-u(t))dt. \quad (3)$$

Сформулируем вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Пусть вектор-функция $p(\tau,t)$, $\tau\in[t_0,t]$, $t\in[t_0,t_1]$, является решением задачи Коши*

$$p_\tau(\tau,t)=-A^T(\tau)p(\tau,t),\quad p(t,t)=a(t).$$

Тогда справедливо представление

$$\langle a(t),x(t,v)-x(t,u)\rangle=\int_{t_0}^{t}\langle b(\tau),p(\tau,t)\rangle(v(\tau)-u(\tau))d\tau.$$

Следствие 1. Имеем

$$\min_{v\in V}\langle a(t),x(t,v)-x(t,u)\rangle=-\int_{t_0}^{t}\big(|\langle b(\tau),p(\tau,t)\rangle|+\langle b(\tau),p(\tau,t)\rangle u(\tau)\big)d\tau,\quad t\in[t_0,t_1].$$

Рассмотрим скалярное произведение под знаком второго интеграла в (3).

Лемма 2. *Пусть вектор-функция $q(\tau,t)$, $\tau\in[t,t_1]$, $t\in[t_0,t_1]$, является решением задачи Коши*

$$q_\tau(\tau,t)=A(\tau)q(\tau,t),\quad q(t,t)=b(t).$$

Тогда справедливо представление

$$\langle b(t),\psi(t,v)-\psi(t,u)\rangle=\int_{t}^{t_1}\langle a(\tau),q(\tau,t)\rangle(v(\tau)-u(\tau))d\tau.$$

Следствие 2. Имеем

$$\min_{v\in V}\langle b(t),\psi(t,v)-\psi(t,u)\rangle=-\int_{t}^{t_1}\big(|\langle a(\tau),q(\tau,t)\rangle|+\langle a(\tau),q(\tau,t)\rangle u(\tau)\big)d\tau,\ t\in[t_0,t_1]. \quad (4)$$

2. Достаточные условия оптимальности

Рассмотрим вопрос об оптимальности простейших управлений в задаче (P):

$$u(t)=\pm1,\quad t\in[t_0,t_1].$$

Теорема 1. *Если выполняется неравенство*

$$H_u[t,1]\geqslant 2\int_{t_0}^{t}\max\big\{0,\ \langle b(\tau),p(\tau,t)\rangle\big\}d\tau,\quad t\in[t_0,t_1], \quad (S_1)$$

с вектор-функцией $p(\tau,t)$: $p_\tau=-A^T(\tau)p$, $p(t)=a(t)$, то управление $u=1$ является оптимальным в задаче (P).

Утверждение доказывается на основе первой части формулы (3) (неположительность подинтегральной функции) с учетом следствия 1.

Следствие 3. Если

$$\langle b(\tau), p(\tau,t)\rangle \leqslant 0, \quad \tau \in [t_0, t], \quad t \in [t_0, t_1], \tag{5}$$

то принцип максимума для управления $u = 1$ (ПМ (1)) является достаточным условием оптимальности:

$$H_u[t,1] \geqslant 0, \quad t \in [t_0, t_1] \;\Rightarrow\; u = 1 \sim \text{opt}.$$

Замечание 1. Утверждение теоремы 1 представляет собой дополнение (усиление) ПМ (1): в правой части неравенства (S_1) фигурирует неотрицательная функция времени (вместо нуля). Это достаточное условие типа принципа максимума, поскольку речь идет о проверке неравенства для функции одной переменной на отрезке $[t_0, t_1]$. Если эта функция допускает аналитическое выражение относительно параметров задачи (P) (например, c, x^0, t_1, $a(t)$, $b(t)$), то неравенство (S_1) задает множество этих параметров, для которого управление $u = 1$ является оптимальным в задаче (P). Неравенство (5) описывает, в свою очередь, условие на функциональные параметры $b(\tau)$, $a(\tau)$, при котором ПМ (1) является достаточным для оптимальности.

Рассмотрим вторую часть формулы приращения (3) вместе с выражением для минимума (4) при $u = 1$. В результате приходим к утверждению.

Теорема 2. *Если выполняется неравенство*

$$H_u[t,1] \geqslant 2\int_t^{t_1} \max\big\{0,\, \langle a(\tau), q(\tau,t)\rangle\big\}d\tau, \quad t \in [t_0, t_1], \tag{S_2}$$

с вектор-функцией $q(\tau,t)$: $q_\tau = A(\tau)q$, $q(t) = b(t)$, то управление $u = 1$ является оптимальным в задаче (P).

Следствие 4. Если

$$\langle a(\tau), q(\tau,t)\rangle \leqslant 0, \quad \tau \in [t, t_1], \quad t \in [t_0, t_1],$$

то ПМ (1) является достаточным условием оптимальности.

3. Пример билинейной задачи

Задача 1. Двухступенчатая система

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u, \quad x_1(0) = x_1^0, \quad x_2(0) = x_2^0.$$

Билинейный функционал

$$\Phi(u) = \int_0^{t_1} \big(a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)\big)u(t)dt \to \max.$$

Рассматриваем управление $u = 1$. Соответствующие траектории

$$x_1(t,1) = \frac{1}{2}t^2 + x_2^0 t + x_1^0, \quad x_2(t,1) = t + x_2^0,$$

$$\psi_1(t,1) = -a_1(t - t_1), \quad \psi_2(t,1) = \frac{1}{2}a_1(t-t_1)^2 - a_2(t - t_1).$$

Функция переключения $H_u[t,1] = a_1 x_1(t,1) + a_2 x_2(t,1) + \psi_2(t,1)$. Вспомогательная функция $\langle b, p(\tau,t)\rangle = a_1(t-\tau) + a_2$, $\tau \in [0,t]$, $t \in [0,t_1]$.

Первое достаточное условие имеет вид (теорема 1)

$$H_u[t,1] \geqslant 2\int_0^t \max\big\{0,\, a_1(t-\tau) + a_2\big\}d\tau, \quad t \in [0, t_1].$$

Применим следствие 1. Неравенство $a_1(t-\tau)+a_2 \leqslant 0$, $\tau \in [0,t]$, $t \in [0,t_1]$, эквивалентно следующим условиям на параметры задачи: $a_1 t_1 + a_2 \leqslant 0$, $a_2 \leqslant 0$, которые обеспечивают достаточность ПМ(1) для оптимальности.

Второе достаточное условие выражается неравенством (теорема 2)

$$H_u[t,1] \geqslant 2\int_t^{t_1} \max\big\{0,\, a_1(\tau-t)+a_2\big\}d\tau, \quad t \in [0,t_1].$$

4. Квадратичная задача

Для линейной фазовой системы (2) на множестве допустимых управлений (1) определим квадратичный функционал

$$\Phi_1(u) = \frac{1}{2}\langle x(t_1), Dx(t_1)\rangle + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} \langle x(t), Q(t)x(t)\rangle dt$$

с условием симметричности матриц D, $Q(t)$ и непрерывности матричной функции $Q(t)$, $t \in [t_0,t_1]$. Сформулируем соответствующую квадратичную задачу

$$\Phi_1(u) \to \max, \quad u \in V. \tag{P_1}$$

Определим необходимые конструкции:

$$H^1(\psi^1, x, u, t) = \langle \psi^1, A(t)x + b(t)u\rangle + \frac{1}{2}\langle x, Q(t)x\rangle$$

— функция Понтрягина с сопряженной переменной ψ^1;

$$\dot{\psi}^1 = -A^T(t)\psi^1 - Q(t)x, \quad \psi^1(t_1) = Dx(t_1)$$

— первая сопряженная система для вектор-функции $\psi^1(t)$;

$$\dot{\Psi} = -A^T(t)\Psi - \Psi A(t) - Q(t), \quad \Psi(t_1) = D$$

— вторая сопряженная система для матричной функции $\Psi(t)$.

Для управления $u \in V$ обозначим соответствующие решения $x(t,u)$, $\psi^1(t,u)$ фазовой и сопряженной систем. При $u=0$ установим связь между ψ^1, x, Ψ.

Лемма 3. *Имеет место следующее соотношение*:

$$\psi^1(t,0) = \Psi(t)x(t,0), \quad t \in [t_0,t_1].$$

Утверждение проверяется непосредственным дифференцированием в силу соответствующих систем.

Перейдем на уровень функционала задачи (P_1).

Лемма 4. *Имеет место следующее представление для функционала*:

$$\Phi_1(u) = \Phi_1(0) + \int_{t_0}^{t_1} \langle \Psi(t)b(t), x(t,u)\rangle u(t)dt. \tag{6}$$

Выражение (6) получается на основе формулы приращения функционала в задаче (P_1) [1], [2].

Таким образом, на основании формулы (6) квадратичная задача (P_1) преобразуется в простейшую билинейную задачу (P) с условием

$$c = 0, \quad a(t) = \Psi(t)b(t), \quad t \in [t_0,t_1].$$

При этом все полученные для (P) условия оптимальности с указанными изменениями справедливы для задачи (P_1).

5. Пример квадратичной задачи

Задача 2. Двухступенчатая система ($t_0 = 0$), терминальный функционал

$$\Phi_1(u) = \frac{1}{2}\left(x_1^2(t_1) + d_2 x_2^2(t_1)\right) \to \max,$$

параметры x^0, d_2, $t_1 > 0$.

В данном случае матричная функция

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} 1 & t_1 - t \\ t_1 - t & (t_1 - t)^2 + d_2 \end{pmatrix}.$$

Проверим на оптимальность управление $u = 1$ с помощью теоремы 1. Скалярное произведение под знаком max выражается по формуле

$$\langle b, p(\tau, t)\rangle = (t_1 - t)(t_1 - \tau) + d_2, \quad t \in [0, t_1], \quad \tau \in [0, t].$$

Следовательно,

$$\max_{\tau,\, t \in [0, t_1]} \left[(t_1 - t)(t_1 - \tau) + d_2\right] = t_1^2 + d_2$$

и неравенство $t_1^2 + d_2 \leqslant 0$ обеспечивает достаточность ПМ (1) в данной задаче. При этом ПМ(1) выражается неравенством

$$(x_2^0 + t_1)d_2 + (x_1^0 + x_2^0 t_1 + t_1^2/2)(t_1 - t) \geqslant 0, \quad t \in [0, t_1].$$

В результате получаем набор явных условий (без переменной t) на параметры задачи 2, гарантирующих оптимальность управления $u = 1$:

$$t_1^2 + d_2 \leqslant 0, \quad (x_2^0 + t_1)d_2 \geqslant 0, \quad (x_2^0 + t_1)d_2 + (x_1^0 + x_2^0 t_1 + t_1^2/2)t_1 \geqslant 0.$$

Литература

[1] Срочко В.А. *Итерационные методы решения задач оптимального управления* (Физматлит, М., 2000).

[2] Аргучинцев А.В., Дыхта В.А., Срочко В.А. *Оптимальное управление: нелокальные условия, вычислительные методы и вариационный принцип максимума*, Изв. вузов. Матем., № 1, 3–43 (2009).

[3] Стрекаловский А.С. *Элементы невыпуклой оптимизации* (Наука, Новосибирск, 2003).

[4] Антипина Н.В., Дыхта В.А. *Линейные функции Ляпунова–Кротова и достаточные условия оптимальности в форме принципа максимума*, Изв. вузов. Матем., № 12, 11–22 (2002).

[5] Срочко В.А., Антоник В.Г. *Достаточные условия оптимальности экстремальных управлений на основе формул приращения функционала*, Изв. вузов. Матем., № 8, 96–102 (2014).

В.А. Срочко

Иркутский государственный университет,
ул. К. Маркса, д. 1, г. Иркутск, 664003, Россия,

e-mail: srochko@math.isu.ru

В.Г. Антоник

Иркутский государственный университет,
ул. К. Маркса, д. 1, г. Иркутск, 664003, Россия,

e-mail: vga@math.isu.ru

V.A. Srochko and V.G. Antonik

Optimality conditions for extremal controls in bilinear and quadratic problems

Abstract. We consider the problem of optimization of bilinear functional with respect to linear phase system and modular control constraint. We obtain sufficient conditions of optimality for extremal controls. They complement the maximum principle and preserve the complexity of its implementation. These conditions are presented in the form of inequalities for functions of one variable on the time interval. The optimization problem for quadratic functional is reduced to the bilinear case with the help of the adjoint matrix function.

Keywords: non-convex optimal control problems, the maximum principle, sufficient optimality conditions.

V.A. Srochko

Irkutsk State University,
1 K. Marks str., Irkutsk, 664003 Russia,

e-mail: srochko@math.isu.ru

V.G. Antonik

Irkutsk State University,
1 K. Marks str., Irkutsk, 664003 Russia,

e-mail: vga@math.isu.ru