ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2001 МАТЕМАТИКА № 8 (471)

УДК 517.988

М.Ю. КОКУРИН

УСЛОВИЕ ИСТОКОПРЕДСТАВИМОСТИ И ОЦЕНКИ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ МЕТОДОВ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ. I

1. Введение

Объектом изучения в данной работе являются линейные операторные уравнения

$$Ax = f, \quad x \in X. \tag{1.1}$$

Здесь X — комплексное банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$, $A \in \mathcal{L}(X)$, $f \in X$; $\mathcal{L}(X)$ — пространство линейных непрерывных операторов, действующих из X в X. Предполагается, что уравнение (1.1) имеет решение x^*, которое может не быть единственным. В то же время существование и непрерывность обратного оператора A^{-1} не предполагается, тем самым исходная задача (1.1) относится к классу некорректных [1]–[3]. Хорошо известно, что устойчивая аппроксимация решений подобных задач требует привлечения методов регуляризации, специальным образом учитывающих возможную неограниченность оператора A^{-1}. Наиболее завершенный вид теория таких методов имеет в случае, когда пространство X является гильбертовым, а оператор A — самосопряженным. Большинство известных процедур регуляризации (1.1) в этом случае вкладывается в общую схему, предложенную в [4] и развитую в [3], [5]. Считая для простоты оператор и правую часть в (1.1) известными без погрешностей, запишем эту схему в виде

$$x_\alpha = (E - \theta(A,\alpha)A)\xi + \theta(A,\alpha)f. \tag{1.2}$$

Здесь E — единичный оператор, α — параметр регуляризации, $\alpha \in (0,\alpha_0]$; элемент $\xi \in X$ имеет смысл начального приближения к искомому решению x^*. В ([3], гл. 2, § 1; [4]; [5], гл. 2, § 5) устанавливается, что при нежестких предположениях относительно порождающих функций $\theta(\lambda,\alpha)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\alpha \in (0,\alpha_0]$, справедливо равенство $\lim\limits_{\alpha\to 0} \|x_\alpha - x^*\| = 0$. Наряду с оригинальной схемой (1.2) подробно исследованы ее модификации на случай уравнений вида (1.1) с несамосопряженными ограниченными операторами $A : X \to Y$ и гильбертовыми X, Y, а также варианты, совмещающие процедуру (1.2) с конечномерной аппроксимацией пространств X, Y ([3], [5], [6]). Ключевую роль при исследовании скорости сходимости процедур вида (1.2) играет условие истокопредставимости начальной невязки

$$x^* - \xi = A^p v, \quad v \in X, \quad p > 0. \tag{1.3}$$

При дополнительном предположении (1.3) в ([3], гл. 2, § 2; [4]; [5], гл. 2, § 5) для методов (1.2) установлена оценка скорости сходимости

$$\|x_\alpha - x^*\| \le c_0\alpha^p \quad \forall \alpha \in (0,\alpha_0]. \tag{1.4}$$

Здесь и далее $c_0, c_1, \dots$ — абсолютные положительные константы. Примечательно, что в гильбертовом случае требование истокопредставимости (1.3) не только достаточно для выполнения оценок (1.4), но и весьма близко к необходимому и в ряде случаев совпадает с ним ([7], с. 80–83;

[8], с. 133–143). Именно, из (1.4) следует, что невязка $x^*-\xi$ допускает представление (1.3) с заменой p на показатель $p-q$, сколь угодно близкий к p, с соответствующим элементом $v=v_q\in X$, $q\in(0,q_0]$, причем в общем случае нельзя положить $q=0$. Таким образом, полное исследование условий, необходимых и достаточных для выполнения степенной оценки (1.4), даже при натуральном p, предполагает рассмотрение представлений (1.3) с нецелыми показателями. Поэтому в данной работе в (1.3) с самого начала допускаются любые значения $p>0$. В наиболее важном с практической точки зрения случае, когда пространство X является функциональным (L_2, W_2^m и т. п.), а оператор A — интегральным с гладким ядром, условие (1.3) означает повышенную гладкость начальной невязки $x^*-\xi$ (искомого решения x^* при $\xi=0$) по сравнению с гладкостью, предписываемой исходным пространством X. В частном случае, когда A есть оператор Грина эллиптического дифференциального оператора в $X=L_2$, представление (1.3) влечет включение $x^*-\xi\in C^r$ с показателем r, пропорциональным p ([9], с. 454). Здесь C^r — пространство функций, обладающих соответствующим числом непрерывных производных. Отметим, что функции от операторов в (1.2), (1.3) в случае гильбертова пространства X традиционно определяются при помощи спектрального разложения оператора A ([10], с.294). На этом пути оператор $\theta(A,\alpha)$ может быть формально определен для весьма широкого класса функций $\theta(\lambda,\alpha)$. Достаточно потребовать, например, чтобы $\theta(\lambda,\alpha)$ как функция спектрального параметра λ была измерима по Борелю при каждом $\alpha\in(0,\alpha_0]$. В частности, степени $A^p\in\mathcal{L}(X)$ в (1.3) имеют смысл для всех вещественных значений $p>0$. Наличие для самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве развитого операторного исчисления, основанного на спектральном разложении, является решающим при получении вышеупомянутых результатов. Непосредственный их перенос на случай банахова пространства затрудняется главным образом отсутствием удобного аналога спектрального разложения и соответствующего операторного исчисления для достаточно широкого класса операторов $A\in\mathcal{L}(X)$. Полная аналогия с гильбертовым случаем имеется лишь для спектральных операторов скалярного типа в банаховом пространстве ([11], гл. XV–XVIII), но проверка принадлежности к этому классу даже простейших интегральных операторов часто сталкивается с принципиальными теоретическими трудностями. Наиболее подходящим для наших целей вариантом операторного исчисления представляется исчисление Рисса–Данфорда, позволяющее определить функцию оператора в виде интеграла Бохнера ([10], с. 455)

$$\varphi(A)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \varphi(\lambda)R(\lambda,A)d\lambda, \tag{1.5}$$

где $R(\lambda,A)=(\lambda E-A)^{-1}$ — резольвента оператора A, Γ — положительно ориентированный контур на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, охватывающий спектр $\sigma(A)$ оператора A. При этом необходимо, чтобы функция $\varphi(\lambda)$ была аналитична в некоторой открытой окрестности D спектра $\sigma(A)$, а контур Γ лежал в D. При таком определении оператора $\theta(A,\alpha)$ процесс (1.2) был впервые введен и исследован в [12]. Установлено, что при выполнении подходящих условий на оператор A и наличии представления (1.3) с показателем $p=1$ приближения x_α сходятся в X при $\alpha\to 0$ к решению x^* уравнения (1.1), участвующему в (1.3). Там же рассмотрен случай приближенного задания правой части в уравнении (1.1) (см. также [3], с. 50–54). Следует отметить, что сужение по сравнению с гильбертовым случаем класса допустимых порождающих функций $\theta(\lambda,\alpha)$ фактически не приводит к уменьшению общности построений, поскольку наиболее распространенные в вычислительной практике схемы (1.2) порождаются именно аналитическими (в нужной части $\mathbb{C}$) функциями $\theta(\lambda,\alpha)$.

Целью данной работы является продолжение исследования схемы регуляризации (1.2), (1.5) в случае банахова пространства X и получение для этого случая аналогов упомянутых выше результатов гильбертовой теории. Намеченная программа включает в первую очередь получение оценок скорости сходимости аппроксимаций x_α к x^* для произвольных показателей истокопредставимости $p>0$, а также обоснование регуляризующих свойств рассматриваемой схемы при наличии погрешностей как в правой части, так и в операторе уравнения (1.1). Основная трудность здесь связана с тем, что степень A^p в (1.3) в случае нецелого показателя p не может быть определена непосредственно по формуле (1.5) ввиду неаналитичности функции λ^p в окрестности нуля.

Структура работы следующая. В § 2 приводятся необходимые вспомогательные сведения и исследуется сходимость метода (1.2) в банаховом пространстве в условиях отсутствия погрешностей в данных (A, f). Устанавливается, что при наличии истокообразного представления (1.3) с произвольным $p > 0$ справедлива оценка (1.4). В § 3 на основе схемы (1.2) строится и обосновывается регуляризующий алгоритм для задачи (1.1) при наличии погрешностей в исходных данных (A, f). Кроме того, рассматривается возможность приближенного выполнения (1.3). Доказывается, что без каких бы то ни было условий истокопредставимости имеет место сходимость приближений x_α к решению. Вопросам, связанным с необходимостью условия (1.3) для оценок (1.4) в случае банахова пространства X, посвящена вторая часть работы.

2. Оценка скорости сходимости в случае точных данных

Всюду в этой работе аналогично ([3], с. 51; [12]) для операторов $A \in \mathcal{L}(X)$ выполняется

Условие А. Для некоторого $\varphi_0 \in (0, \pi)$ справедливы включение

$$\sigma(A) \subset K(\varphi_0), \quad K(\varphi_0) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg \lambda| \leq \varphi_0\}, \tag{2.1}$$

и оценка

$$\|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{c_1}{|\lambda|} \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus K(\varphi_0). \tag{2.2}$$

Зафиксируем константу $R_0 > \|A\|_{\mathcal{L}(X)}$. Нетрудно видеть, что $\sigma(A) \subset K(R_0, \varphi_0)$, где $K(R_0, \varphi_0) = K(\varphi_0) \cap S(R_0)$, $S(r) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq r\}$. Кроме того, имеет место аналогичная (2.2) оценка с заменой конуса $K(\varphi_0)$ на сектор $K(R_0, \varphi_0)$. Здесь и далее для оператора $B \in \mathcal{L}(X)$ обозначаем

$$\|B\|_{\mathcal{L}(X)} = \max\{\|Bx\| : x \in X, \ \|x\| = 1\}.$$

Приведем необходимые для дальнейшего сведения из теории степеней линейных операторов. Для натурального показателя p степень A^p определяется стандартным образом, т. е. $A^p = A \cdot \ldots \cdot A$ (p раз). Для оператора A, удовлетворяющего условию А, и произвольного нецелого $p > 0$, следуя ([13]; [14], с. 156), дадим

Определение. Для любого $\nu \in (0, 1)$

$$A^\nu \triangleq \frac{\sin \pi\nu}{\pi} \int_0^\infty t^{\nu - 1}(tE + A)^{-1} A \, dt. \tag{2.3}$$

Для произвольного $p > 0$ и целого неотрицательного n, $n < p < n + 1$, полагаем

$$A^p \triangleq A^{p-n} A^n \equiv A^n A^{p-n}.$$

В силу оценки (2.2) интеграл в правой части (2.3), понимаемый в смысле Бохнера, сходится и представляет оператор $A^\nu \in \mathcal{L}(X)$.

Наряду с исходным оператором A введем регуляризованный оператор $A_\varepsilon = A + \varepsilon E$. Нетрудно видеть, что при $\varepsilon > 0$ степень A_ε^p, $p > 0$, может быть определена согласно (1.5), если в качестве Γ выбрать контур, охватывающий спектр $\sigma(A_\varepsilon) = \{\lambda + \varepsilon : \lambda \in \sigma(A)\}$, но не содержащий точки $\lambda = 0$. Ниже потребуется известное

Предложение 1 ([14], с. 155). *Пусть оператор A удовлетворяет условию* А. *Тогда для любого $\nu \in (0, 1)$ имеет место оценка*

$$\|A_\varepsilon^\nu - A^\nu\|_{\mathcal{L}(X)} \leq c_2 \varepsilon^\nu \quad \forall \varepsilon > 0, \tag{2.4}$$

где постоянная c_2 зависит от ν.

Переходя к исследованию сходимости процесса (1.2), конкретизируем класс порождающих функций $\theta(\lambda,\alpha)$. Будем предполагать выполненным

Условие B. Для каждого $\alpha \in (0,\alpha_0]$ функция $\theta(\lambda,\alpha)$ аналитична по λ на открытом множестве $D_\alpha \subset \mathbb{C}$ таком, что

$$K_\alpha(R_0,d_0,\varphi_0) \subset D_\alpha, \tag{2.5}$$

где $K_\alpha(R_0,d_0,\varphi_0) = K(R_0,\varphi_0) \cup S(d_0\alpha)$, d_0 — фиксированная константа, $d_0 \in (0,1)$.

В дальнейшем по мере необходимости будут налагаться дополнительные условия на функции $\theta(\lambda,\alpha)$. Обозначим через γ_α границу множества $K_\alpha(R_0,d_0,\varphi_0)$. Как следует из (2.1), (2.5), оператор $\theta(A,\alpha)$ может быть определен по формуле (1.5) с $\varphi(\lambda)=\theta(\lambda,\alpha)$, если в качестве контура Γ выбрать произвольный контур Γ_α такой, что $\Gamma_\alpha \subset D_\alpha$ и γ_α находится внутри Γ_α при положительной ориентации обоих контуров. Таким образом, всюду ниже

$$\theta(A,\alpha) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\alpha} \theta(\lambda,\alpha)R(\lambda,A)d\lambda, \quad \alpha \in (0,\alpha_0], \tag{2.6}$$

где контур Γ_α выбран указанным только что способом.

Предполагая выполненным истокообразное представление (1.3) с произвольным показателем $p>0$, на основании (1.2) запишем

$$x_\alpha - x^* = (E-\theta(A,\alpha)A)(\xi - x^*) = -(E_{-\theta}(A,\alpha)A)A^p v. \tag{2.7}$$

Обозначим через $n=[p]$ и $\nu = p-n$ соответственно целую и дробную части p. В силу данного выше определения $A^p = A^n A^\nu$. Согласно (2.7) для любого $\varepsilon>0$ выполняется

$$\|x_\alpha - x^*\| \le \|(E_{-\theta}(A,\alpha)A)A^n(A+\varepsilon E)^\nu v\| + \|(E-\theta(A,\alpha)A)A^n[(A+\varepsilon E)^\nu - A^\nu]v\|. \tag{2.8}$$

Выберем $\varepsilon = d_1\alpha$, где константа $d_1 > d_0$, и оценим по отдельности слагаемые в правой части неравенства (2.8). Не ограничивая общности, можно считать, что контур Γ_α не содержит внутри точки $\lambda = -d_1\alpha$. На основании формулы (1.5) имеем

$$\begin{aligned}\|(E-\theta(A,\alpha)A)A^n(A+\varepsilon E)^\nu v\| &\le \frac{1}{2\pi}\|v\|\int_{\Gamma_\alpha} |1-\theta(\lambda,\alpha)\lambda|\,|\lambda|^n|\lambda+\varepsilon|^\nu \|R(\lambda,A)\|_{\mathcal{L}(X)}|d\lambda| \le \\ &\le c_3\|v\|\int_{\Gamma_\alpha}|1-\theta(\lambda,\alpha)\lambda|(|\lambda|^{p-1}+\alpha^\nu|\lambda|^{n-1})|d\lambda|.\end{aligned} \tag{2.9}$$

С учетом полученной оценки введем на порождающие функции $\theta(\lambda,\alpha)$ дополнительно

Условие C. Для любого $\alpha\in(0,\alpha_0]$ при всех $s\in[0,p]$ имеет место оценка

$$\int_{\Gamma_\alpha}|1-\theta(\lambda,\alpha)\lambda|\,|\lambda|^{s-1}|d\lambda| \le c_4\alpha^s. \tag{2.10}$$

Считая выполненным условие C, из (2.9) и соотношения $|\lambda| \ge d_0\alpha\ \forall\lambda\in\Gamma_\alpha$ окончательно находим

$$\|(E-\theta(A,\alpha)A)A^n(A+\varepsilon E)^\nu v\| \le c_5\|v\|\alpha^p, \quad \alpha\in(0,\alpha_0]. \tag{2.11}$$

Для второго слагаемого в правой части (2.8) на основании (2.2), (2.4) выполняется неравенство

$$\begin{aligned}&\|(E-\theta(A,\alpha)A)A^n[(A+\varepsilon E)^\nu - A^\nu]v\| \le c_2\|v\|\varepsilon^\nu\|(E-\theta(A,\alpha)A)A^n\|_{\mathcal{L}(X)} \le \\ &\le \frac{c_2}{2\pi}\|v\|\varepsilon^\nu\int_{\Gamma_\alpha}|1-\theta(\lambda,\alpha)\lambda|\,|\lambda|^n\|R(\lambda,A)\|_{\mathcal{L}(X)}|d\lambda| \le c_6\|v\|\alpha^p, \quad \alpha\in(0,\alpha_0].\end{aligned} \tag{2.12}$$

Объединяя оценки (2.8), (2.11), (2.12), заключаем, что

$$\|x_\alpha - x^*\| \le c_7\|v\|\alpha^p, \quad \alpha\in(0,\alpha_0]. \tag{2.13}$$

Тем самым доказана

Теорема 1. *Пусть выполняются условия* A–C *и имеет место истокообразное представление начальной невязки* (1.3)*. Тогда для вырабатываемых согласно* (1.2) *приближений* x_α *и решения* x^**, участвующего в* (1.3)*, справедлива оценка* (2.13)*.*

Замечание 1. Из теоремы 1 следует, что если существует элемент x^*, являющийся решением уравнения (1.1) и удовлетворяющий условию (1.3), то этот элемент определяется однозначно.

3. Регуляризующий алгоритм

Обратимся к случаю, когда исходные данные в уравнении (1.1) известны с погрешностью. Будем считать, что вместо оператора A и правой части f доступны их приближения $A_h \in \mathcal{L}(X)$ и $f_\delta \in X$ такие, что

$$\|A_h - A\|_{\mathcal{L}(X)} \le h, \quad \|f_\delta - f\| \le \delta. \tag{3.1}$$

Оценки погрешностей h, δ в (3.1) предполагаются известными. Обозначим через $X^*(A, f)$ множество решений уравнения (1.1). Напомним [1]–[3], что регуляризующим алгоритмом для (1.1) называется такое отображение $R_{h\delta} : \mathcal{L}(X) \times X \to X$, что для любых $(A, f) : X^*(A, f) \neq \emptyset$ выполняется

$$\exists x^* \in X^*(A, f) : \lim_{h,\delta \to 0} \sup_{\substack{A_h \in \mathcal{L}(X),\ f_\delta \in X \\ \|A_h - A\|_{\mathcal{L}(X)} \le h,\ \|f_\delta - f\| \le \delta}} \|R_{h\delta}(A_h, f_\delta) - x^*\| = 0. \tag{3.2}$$

Согласно (3.2) элемент $x^{h\delta} = R_{h\delta}(A_h, f_\delta)$ может быть взят в качестве приближенного решения уравнения (1.1), отвечающего приближенным данным (A_h, f_δ). В соответствии с (1.2) определим приближенное решение (1.1) следующим образом:

$$x_\alpha^{h\delta} = (E - \theta(A_h, \alpha)A_h)\xi + \theta(A_h, \alpha)f_\delta. \tag{3.3}$$

Здесь параметр регуляризации $\alpha = \alpha(h, \delta)$ следует согласовать с погрешностями h, δ. Целью дальнейших рассуждений является нахождение условий на порождающие функции $\theta(\lambda, \alpha)$, обеспечивающих выполнение регуляризационного свойства (3.2) для алгоритма

$$R_{h\delta}(A_h, f_\delta) = x_{\alpha(h,\delta)}^{h\delta}. \tag{3.4}$$

Вначале убедимся, что при достаточно малом $h > 0$ функция $\theta(A_h, \alpha)$ оператора A_h может быть определена согласно (2.6). Будем обозначать через $\rho(A) = \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$ резольвентное множество оператора A. Известно

Предложение 2 ([14], с. 185; [15], с. 141). *Пусть* $\lambda \in \rho(A)$*,* $A \in \mathcal{L}(X)$ *и* $B \in \mathcal{L}(X)$*.*

1) *Предположим, что* $\|BR(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)} < 1$*. Тогда* $\lambda \in \rho(A + B)$ *и справедливо представление*

$$R(\lambda, A + B) = R(\lambda, A)\sum_{k=0}^{\infty}(BR(\lambda, A))^k. \tag{3.5}$$

2) *Пусть* $\|R(\lambda, A)B\|_{\mathcal{L}(X)} < 1$*. Тогда* $\lambda \in \rho(A + B)$ *и*

$$R(\lambda, A + B) = \sum_{k=0}^{\infty}(R(\lambda, A)B)^k R(\lambda, A). \tag{3.6}$$

Ряды в (3.5) *и* (3.6) *абсолютно сходятся в норме пространства* $\mathcal{L}(X)$*.*

Лемма. *Пусть выполняется условие*

$$\frac{c_1 h}{d_0 \alpha} \le \omega, \tag{3.7}$$

где постоянная $\omega \in (0, 1)$*. Тогда контур* Γ_α *охватывает спектр* $\sigma(A_h)$*, так что для* $\theta(A_h, \alpha)$ *справедливо представление* (2.6)*.*

Доказательство. Для любого $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{int} K_\alpha(R_0, d_0, \varphi_0)$ по построению $K_\alpha(R_0, d_0, \varphi_0)$ имеем $|\lambda| \geq d_0\alpha$. Полагая в лемме $B = A_h - A$, с использованием (3.1) и (3.7) получаем

$$\|BR(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{c_1 h}{|\lambda|} \leq \frac{c_1 h}{d_0 \alpha} \leq \omega < 1.$$

Таким образом, $\lambda \in \rho(A_h)$, т. е. контур Γ_α содержит внутри все точки спектра $\sigma(A_h)$. $\square$

Всюду в дальнейшем условие (3.7) считаем выполненным.

Предполагая выполненным условие истокопредставимости (1.3), оценим величину $\|x_\alpha^{h\delta} - x^*\|$. Имеем

$$x_\alpha^{h\delta} - x^* = (E - \theta(A_h, \alpha)A_h)(\xi - x^*) + \theta(A_h, \alpha)[(f_\delta - f) + (A - A_h)x^*]. \tag{3.8}$$

Согласно (3.1), (3.8) справедливо неравенство

$$\|x_\alpha^{h\delta} - x^*\| \leq \|\theta(A_h, \alpha)\|_{\mathcal{L}(X)}(\delta + \|x^*\|h) + \|(E - \theta(A_h, \alpha)A_h)A^p v\|. \tag{3.9}$$

Оценим по отдельности слагаемые в правой части (3.9).

Заметим, что при выполнении условия (3.7) в силу (3.1), (3.5) получим

$$\|R(\lambda, A_h)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \sum_{k=0}^{\infty} \|(A_h - A)R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)}^k \leq \frac{c_1}{(1-\omega)|\lambda|} \quad \forall \lambda \in \Gamma_\alpha, \quad \alpha \in (0, \alpha_0].$$

Из (2.6) следует

$$\|\theta(A_h, \alpha)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_\alpha} |\theta(\lambda, \alpha)| \, \|R(\lambda, A_h)\|_{\mathcal{L}(X)} |d\lambda| \leq c_8 \int_{\Gamma_\alpha} \frac{|\theta(\lambda, \alpha)|}{|\lambda|} |d\lambda|, \quad \alpha \in (0, \alpha_0]. \tag{3.10}$$

В дополнение к условиям B, C будем предполагать, что для порождающих функций $\theta(\lambda, \alpha)$ выполняется

Условие D. Для любого $\alpha \in (0, \alpha_0]$ имеет место оценка

$$\int_{\Gamma_\alpha} \frac{|\theta(\lambda, \alpha)|}{|\lambda|} |d\lambda| \leq \frac{c_9}{\alpha}.$$

Из (3.10) с учетом условия D получаем

$$\|\theta(A_h, \alpha)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{c_{10}}{\alpha}, \quad \alpha \in (0, \alpha_0]. \tag{3.11}$$

Для второго слагаемого в (3.9) имеем оценку

$$\|(E - \theta(A_h, \alpha)A_h)A^p v\| \leq \|(E - \theta(A, \alpha)A)A^p v\| + \|(\theta(A_h, \alpha)A_h - \theta(A, \alpha)A)A^p v\|. \tag{3.12}$$

Аналогично доказательству теоремы 1 с использованием (2.10) устанавливается неравенство

$$\|(E - \theta(A, \alpha)A)A^p v\| \leq c_{11}\|v\|\alpha^p, \quad \alpha \in (0, \alpha_0]. \tag{3.13}$$

Как и выше, положим $n = [p]$, $\nu = p - n$, $\varepsilon = d_2\alpha$, $d_2 > 0$. Имеем

$$\begin{aligned} \|(\theta(A_h, \alpha)A_h - \theta(A, \alpha)A)A^p v\| &\leq \|(\theta(A_h, \alpha)A_h - \theta(A, \alpha)A)A^n(A + \varepsilon E)^\nu v\| + \\ &+ \|(\theta(A_h, \alpha)A_h - \theta(A, \alpha)A)A^n[(A + \varepsilon E)^\nu - A^\nu]v\|. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Для первого слагаемого в правой части (3.14) выполняется неравенство

$$\begin{aligned} &\|(\theta(A_h, \alpha)A_h - \theta(A, \alpha)A)A^n(A + \varepsilon E)^\nu v\| \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\|v\| \int_{\Gamma_\alpha} |1 - \theta(\lambda, \alpha)\lambda| \, \|(R(\lambda, A) - R(\lambda, A_h))A^n(A + \varepsilon E)^\nu\|_{\mathcal{L}(X)} |d\lambda|. \end{aligned}$$

На основании предложения 2 (см. (3.6)) с учетом (3.7) получаем

$$\|(R(\lambda,A)-R(\lambda,A_h))A^n(A+\varepsilon E)^\nu\|_{\mathcal{L}(X)} \le$$
$$\le \sum_{k=1}^{\infty}(\|R(\lambda,A)\|_{\mathcal{L}(X)}h)^k\|R(\lambda,A)A^n\|_{\mathcal{L}(X)}\|(A+\varepsilon E)^\nu\|_{\mathcal{L}(X)} \le$$
$$\le \frac{c_{12}h}{(1-\omega)|\lambda|}\|R(\lambda,A)A^n\|_{\mathcal{L}(X)} \quad \forall\lambda\in\Gamma_\alpha,\quad \alpha\in(0,\alpha_0].$$

В силу тождества $R(\lambda,A)A=-E+\lambda R(\lambda,A)$ величина $\|R(\lambda,A)A^n\|_{\mathcal{L}(X)}$ допускает оценку

$$\|R(\lambda,A)A^n\|_{\mathcal{L}(X)} \le c_{13}g_p(|\lambda|); \quad g_p(t)=\begin{cases} t^{-1}, & [p]=0;\\ 1, & [p]>0,\end{cases} \quad t>0.$$

Поэтому

$$\|(\theta(A_h,\alpha)A_h-\theta(A,\alpha)A)A^n(A+\varepsilon E)^\nu v\| \le c_{14}\|v\|g_p(\alpha)h, \quad \alpha\in(0,\alpha_0]. \tag{3.15}$$

Для второго слагаемого в (3.14) с учетом условия C и предложения 2 аналогично получаем

$$\|(\theta(A_h,\alpha)A_h-\theta(A,\alpha)A)A^n[(A+\varepsilon E)^\nu-A^\nu]v\| \le$$
$$\le c_{15}\|v\|\alpha^\nu\int_{\Gamma_\alpha}|1-\theta(\lambda,\alpha)\lambda|\,\|(R(\lambda,A)-R(\lambda,A_h))A^n\|_{\mathcal{L}(X)}|d\lambda| \le c_{16}\|v\|g_p(\alpha)\alpha^\nu h. \tag{3.16}$$

Объединяя оценки (3.9), (3.11)–(3.16), окончательно находим

$$\|x_\alpha^{h\delta}-x^*\| \le c_{17}\Big(\frac{h+\delta}{\alpha}+(g_p(\alpha)h+\alpha^p)\|v\|\Big). \tag{3.17}$$

Непосредственным следствием проведенных рассуждений является

Теорема 2. *Пусть выполняются условия* A–D, *и начальная невязка* $x^*-\xi$ *обладает истокообразным представлением* (1.3). *Предположим, что параметр регуляризации* $\alpha=\alpha(h,\delta)$ *согласован с погрешностями* h, δ *так, что выполняется неравенство* (3.7) *и, кроме того,*

$$\alpha\in(0,\alpha_0], \quad \lim_{h,\delta\to 0}\alpha=\lim_{h,\delta\to 0}\frac{h_{+\delta}}{\alpha}=0. \tag{3.18}$$

Тогда соотношения (3.3), (3.4) *определяют регуляризующий алгоритм для задачи* (1.1), *и имеет место оценка* (3.17).

В заключение этого параграфа кратко обсудим возможности ослабления условия (1.3), представляющегося наряду с условием A наиболее ограничительным среди предположений доказанных выше теорем. Будем считать, что для заданного приближенного оператора A_h и некоторого натурального p удалось подобрать такой элемент $v_h\in X$, что

$$x^*-\xi=A_h^p v_h+w_h, \quad \|w_h\|\le\Delta. \tag{3.19}$$

Здесь величина Δ имеет смысл погрешности истокообразного представления невязки $x^*-\xi$ при помощи имеющегося в нашем распоряжении оператора A_h. Предположим, что Δ мала наряду с h, δ. Из (3.3) следует неравенство

$$\|x_\alpha^{h\delta}-x^*\| \le c_{18}\|\theta(A_h,\alpha)\|_{\mathcal{L}(X)}(h+\delta)+\|(E-\theta(A_h,\alpha)A_h)A_h^p v_h\|+\|E-\theta(A_h,\alpha)A_h\|_{\mathcal{L}(X)}\Delta.$$

Отсюда по изложенной выше схеме получается оценка

$$\|x_\alpha^{h\delta}-x^*\| \le c_{19}\Big(\frac{h+\delta}{\alpha}+\alpha^p\|v_h\|+\Delta\Big). \tag{3.20}$$

Тем самым доказана

Теорема 3. *Пусть выполняются условия* A–D, *начальная невязка* $x^* - \xi$ *представима в виде* (3.19) *с натуральным показателем* p, *параметр регуляризации* $\alpha = \alpha(h, \delta)$ *согласован с погрешностями* h, δ *так, что* $\alpha \in (0, \alpha_0]$ *и выполняется* (3.7). *Тогда имеет место оценка* (3.20).

Следствие. Пусть выполняются условия теоремы 3, соотношения (3.18) и, кроме того, $\sup\limits_h \|v_h\| < \infty$. Тогда

$$\varlimsup_{h,\delta\to 0} \|x_\alpha^{h\delta} - x^*\| \le c_{19}\Delta. \tag{3.21}$$

Неравенство (3.21) означает устойчивость регуляризующего алгоритма (3.3), (3.4) к погрешностям в истокообразном представлении (1.3).

В качестве другого приложения теоремы 3 исследуем сходимость приближений $x_\alpha^{h\delta}$, определяемых (3.3), не делая никаких предположений относительно истокопредставимости начальной невязки. Будем предполагать, что X — рефлексивное пространство. Согласно ([16], с. 637) при выполнении условия A пространство X разлагается в прямую сумму $X = \overline{R(A)} \oplus N(A)$, где $R(A)$ и $N(A)$ обозначают соответственно образ и ядро оператора A. Таким образом, любой элемент $x \in X$ однозначно представи́м в виде $x = y + z$, где $y \in \overline{R(A)}$, $z \in N(A)$. Последнее означает, что для любого $\xi \in X$ найдется единственный элемент $x^* \in X^*(A, f)$, для которого $x^* - \xi \in \overline{R(A)}$. Следовательно, для произвольно малого $\varepsilon > 0$ можно выбрать такие v_ε и w_ε, что $x^* - \xi = Av_\varepsilon + w_\varepsilon$, $\|w_\varepsilon\| \le \varepsilon$. Полагая в (3.20) $\Delta = h\|v_\varepsilon\| + \varepsilon$, $p = 1$, заключаем, что

$$\|x_\alpha^{h\delta} - x^*\| \le c_{19}\left(\frac{h+\delta}{\alpha} + (\alpha + h)\|v_\varepsilon\| + \varepsilon\right).$$

Следовательно, при выполнении (3.18) справедливо неравенство $\varlimsup\limits_{h,\delta\to 0} \|x_\alpha^{h\delta} - x^*\| \le c_{19}\varepsilon$. Отсюда ввиду произвольной малости $\varepsilon > 0$ вытекает

Теорема 4. *Пусть* X — *рефлексивное банахово пространство, выполняются условия* A, B, D, (3.7), (3.18) *и* (2.10) *с* $s = 1$. *Тогда для определяемых согласно* (3.3) *приближений* $x_\alpha^{h\delta}$ *и элемента* $x^* \in X^*(A, f)$ *такого, что* $x^* - \xi \in \overline{R(A)}$, *имеет место соотношение* (3.2).

Автор признателен проф. А.Б. Бакушинскому за полезные обсуждения результатов данной работы.

Литература

1. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. *Методы решения некорректных задач.* 2-е изд. – М.: Наука, 1979. – 285 с.
2. Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П. *Теория линейных некорректных задач и ее приложения.* – М.: Наука, 1978. – 206 с.
3. Бакушинский А.Б., Гончарский А.В. *Итеративные методы решения некорректных задач.* – М.: Наука, 1989. – 128 с.
4. Бакушинский А.Б. *Один общий прием построения регуляризующих алгоритмов для линейного некорректного уравнения в гильбертовом пространстве* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1967. – Т. 7. – № 3. – С. 672–677.
5. Вайникко Г.М., Веретенников А.Ю. *Итеративные процедуры в некорректных задачах.* – М.: Наука, 1986. – 181 с.
6. Vainikko G. *On the discretization and regularization of ill-posed problems with noncompact operators* // Numer. Funct. Anal. Optim. – 1992. – V. 13. – № 3–4. – P. 381–396.
7. Engl H.W., Hanke M., Neubauer A. *Regularization of inverse problems.* – Dordrecht: Kluwer, 1996. – 322 p.
8. Кокурин М.Ю. *Операторная регуляризация и исследование нелинейных монотонных задач.* – Йошкар-Ола: Изд-во Марийск. ун-та, 1998. – 292 с.

9. Красносельский М.А., Забрейко П.П., Пустыльник Е.И., Соболевский П.Е. *Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций.* – М.: Наука, 1966. – 500 с.
10. Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. *Лекции по функциональному анализу.* – М.: Мир, 1979. – 592 с.
11. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. *Линейные операторы. Спектральные операторы.* – М.: Мир, 1974. – 662 с.
12. Бакушинский А.Б. *К проблеме построения линейных регуляризующих алгоритмов в банаховых пространствах* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1973. – Т. 13. – № 1. – С. 204–210.
13. Balakrishnan A.V. *Fractional powers of closed operators and the semigroups generated by them* // Pacif. J. Math. – 1960. – V. 10. – № 2. – P. 419–437.
14. Крейн С.Г. *Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве.* – М.: Наука, 1967. – 464 с.
15. Клемент Ф., Хейманс Х., Ангенент С. и др. *Однопараметрические полугруппы.* – М.: Мир, 1992. – 352 с.
16. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. *Линейные операторы. Общая теория.* – М.: Мир, 1962. – 896 с.

Марийский государственный университет

Поступила
16.10.1999