ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2002 МАТЕМАТИКА № 1 (476)

УДК 517.98

Г.А. АКИШЕВ

О НЕКОТОРЫХ ТЕОРЕМАХ ДЛЯ СИСТЕМЫ ПРАЙСА

Банахово пространство X измеримых по Лебегу на отрезке $[0,1]$ функций называется симметричным [1], если

1) из $g \in X$ и $|f(t)| \le |g(t)|$ почти всюду на $[0,1]$ следует $f \in X$ и $\|f\|_X \le \|g\|_X$;

2) из $f \in X$ и равноизмеримости функций $|f(t)|$ и $|g(t)|$ следует $g \in X$ и $\|f\|_X = \|g\|_X$ ([1], с. 123).

Здесь и в дальнейшем $\|\psi\|_X$ означает норму элемента $\psi \in X$.

Примерами симметричных пространств являются пространства Лебега L_q, $1 \le q < +\infty$, Орлича, Лоренца, Марцинкевича [1].

Пусть $\chi_e(t)$ — характеристическая функция измеримого множества $e \subset [0,1]$. Функция $\varphi(\mu e) = \|\chi_e\|_X$ называется фундаментальной функцией пространства X, где μe — мера Лебега измеримого множества $e \subset [0,1]$.

Таким образом, фундаментальная функция симметричного пространства X есть функция $\varphi(t) = \|\chi_{[0,t]}\|_X$, определенная на $[0,1]$. Функцию $\varphi(t)$ можно считать вогнутой, неубывающей, непрерывной на $[0,1]$, причем $\varphi(0) = 0$ ([1], с. 137).

В дальнейшем симметричное пространство с фундаментальной функцией φ будем обозначать $X(\varphi)$.

Через σ_τ обозначим оператор растяжения $(\sigma_\tau f)(x) = f(\frac{x}{\tau})$, если $\frac{x}{\tau} \in [0,1]$ и $(\sigma_\tau f)(x) = 0$, если $\frac{x}{\tau} \notin [0,1]$.

Известно, что оператор σ_τ непрерывен в любом симметричном пространстве и существуют пределы

$$\underline{\gamma}_X = \lim_{\tau\to 0} \frac{\ln \|\sigma_\tau\|_{X\to X}}{\ln \tau}, \quad \overline{\gamma}_X = \lim_{\tau\to \infty} \frac{\ln \|\sigma_\tau\|_{X\to X}}{\ln \tau},$$

при этом $0 \le \underline{\gamma}_X \le \overline{\gamma}_X \le 1$ ([1], сс. 131, 134; [2], с. 1250), $\|\sigma_\tau\|_{X\to X}$ — норма оператора σ_τ.

Симметричное пространство $X(\varphi)$ называется максимальным пространством, если

$$\|f\|_X = \sup\Big\{ \int_0^1 f(t)g(t)dt : \ g \in X'(\overline{\varphi}), \ \|g\|_{X'} \le 1\Big\},$$

где $X'(\overline{\varphi})$ — двойственное симметричное пространство к пространству $X(\varphi)$. Отметим также, что если $\varphi(t)$ — фундаментальная функция симметричного пространства X, то функция $\overline{\varphi}(t) = \frac{t}{\varphi(t)}$ при $t \in (0,1]$ и $\overline{\varphi}(0) = 0$ является фундаментальной функцией сопряженного пространства X' ([1], с. 144).

Примерами максимальных симметричных пространств являются пространства Лебега L_q, $1 \le q < \infty$, Орлича, Лоренца, Марцинкевича ([1], с. 144).

Для функции $\varphi(t)$, $t \in [0,1]$, положим

$$\alpha_\varphi = \underline{\lim}_{t\to 0} \frac{\varphi(2t)}{\varphi(t)} \quad , \beta_\varphi = \overline{\lim}_{t\to 0} \frac{\varphi(2t)}{\varphi(t)}.$$

Известно, что если $X(\varphi)$ — симметричное пространство, то $1 \le \alpha_\varphi \le \beta_\varphi \le 2$. Для краткости будем пользоваться записью $A(y) \asymp B(y)$, которая означает, что существуют положительные постоянные C_1, C_2 такие, что $C_1 A(y) \le B(y) \le C_2 A(y)$ для всех y.

Пусть дана последовательность $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ целых чисел $p_n \geq 2$, $n = 1, 2, \ldots$ Положим $G = \{x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} : x_n$ — целое число, $0 \leq x_n \leq p_n - 1\}$ и $m_0 = 1$, $m_n = p_1 \cdot \ldots \cdot p_n$. Множество G является группой с операцией сложения $\dot{+}$, как покоординатным сложением по модулю p_n, $n = 1, 2, \ldots$ Топология в группе G определяется системой подгрупп

$$G_n = \{x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in G : x_k = 0 \text{ для } k = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Пусть отображение $\lambda : G \to [0, 1]$ определено равенством

$$\lambda(\widetilde{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{m_k} = x,$$

где $\widetilde{x} \in G$ и $x \in [0, 1]$, $x_k = 0, 1, \ldots, p_k - 1$. Это отображение является взаимно однозначным всюду, кроме точек $\frac{l}{m_n}$, $l = 0, 1, \ldots, m_n - 1$, $n = 1, 2, \ldots$ Заменяя отрезок $I \equiv [0, 1]$ модифицированным отрезком I^* с соответствующими топологией и операцией сложения, как это сделано в [3], получим изоморфные топологические группы I^*, G.

На модифицированном отрезке $I^* = [0, 1]^*$ определим систему функций Прайса [3]. Положим

$$\psi_0(x) = 1, \quad \psi_{m_k}(x) = \exp\left(\frac{2\pi i x_{k+1}}{p_{k+1}}\right), \quad x \in I^*.$$

Если $n = \sum\limits_{k=0}^{r} \alpha_k m_k$, где $\alpha_k = 0, 1, \ldots, p_{k+1} - 1$, то положим

$$\psi_n(x) = \prod_{k=0}^{r} (\psi_{m_k}(x))^{\alpha_k}, \quad x \in I^*.$$

Система функций $\{\psi_n\}$ является полной ортонормированной периодической мультипликативной системой [3].

Через $a_n(f)$ будем обозначать коэффициенты Фурье функций $f \in L_1$ по системе Прайса $\{\psi_n\}$. Положим

$$\sigma_{n,j}(f, t) = \sum_{v=jm_n}^{(j+1)m_n - 1} a_v(f) \psi_v(t), \quad j = 0, 1, \ldots, p_{n+1} - 1, \quad t \in [0, 1].$$

В случае $\sup\limits_n p_n < +\infty$ Ватари [4] доказал, что для любой функции $f \in L_q$, $1 < q < +\infty$, имеют место неравенства

$$c_1 \|f\|_q \leq \left\| \left(|a_0(f)\ |^2 + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{p_{n+1}-1} |\sigma_{n,j}(f, t)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_q \leq c_2 \|f\|_q, \tag{1}$$

где c_1, c_2 — некоторые положительные постоянные. Здесь L_q — пространство Лебега с нормой

$$\|f\|_q = \left(\int_0^1 |f(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}, \quad 1 \leq q < +\infty.$$

Однако в случае $\sup\limits_n p_n = +\infty$ неравенства (1) не всегда верны [4], [5].

В данной статье эти вопросы изучаются для функции $f \in X(\varphi)$. Для доказательства основных результатов используется

Лемма A ([6], с. 10). *Пусть даны ψ-функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$, $x \in [0, 1]$ и $\beta_{\varphi_1} < \alpha_{\varphi_2}$. Тогда для функции*

$$\theta(x) = \begin{cases} \frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)}, & x \in (0, 1]; \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

существует ψ-функция $\theta_1(x)$, для которой $\alpha_{\theta_1} > 1$ и $\theta_1(x) \asymp \theta(x)$, $x \in [0, 1]$.

Теорема 1. *Пусть $X(\varphi)$ — симметричное пространство, $0 < \underline{\gamma}_X, \overline{\gamma}_X < 1$ и мультипликативная система $\{\psi_n\}$ определена ограниченной последовательностью $\{p_n\}$. Тогда для любой функции $f \in X(\varphi)$ имеют место неравенства*

$$c_1\|f\|_X \le \left\|\left(|a_0(f)|^2 + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{p_{n+1}-1}|\sigma_{n,j}(f)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_X \le c_2\|f\|_X.$$

Доказательство. Так как по условию теоремы $0 < \underline{\gamma}_X \le \overline{\gamma}_X < 1$, то существуют $q_0, q_1 \in (1,\infty)$ такие, что $0 < \frac{1}{q_0} < \underline{\gamma}_X \le \overline{\gamma}_X < \frac{1}{q_1} < 1$. В силу правого неравенства в (1) сублинейный оператор

$$Tf = \left(|a_0(f)|^2 + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{p_{n+1}-1}|\sigma_{n,j}(f)|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

ограниченно действует из L_{q_i} в L_{q_i} $(i = 0, 1)$. Следовательно, этот оператор ограниченно действует из $X(\varphi)$ в $X(\varphi)$ [7], [8], т. е.

$$\left\|\left(|a_0(f)|^2 + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{p_{n+1}-1}|\sigma_{n,j}(f)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_X \le c\|f\|_X$$

для любой функции $f \in X(\varphi)$.

Противоположное неравенство доказывается с помощью принципа двойственности и предыдущего неравенства. □

Теорема 2. *Пусть $X(\varphi)$ — максимальное симметричное пространство, $2^{\frac{1}{2}} < \alpha_\varphi \le \beta_\varphi < 2$, и система Прайса $\{\psi_n\}$ определена неограниченной последовательностью $\{p_n\}$. Тогда существует функция $f_0 \in X(\varphi)$, для которой*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{p_{n+1}-1}|\sigma_{n,j}(f_0,t)|^2 = +\infty$$

для всех $t \in [0,1]$.

Доказательство. Так как последовательность $\{p_n\}$ неограниченная, то можно выбрать подпоследовательность $\{p_{n_k}\}$ такую, что $p_{n_k+1} > 2^k$, $k = 1, 2, \ldots$ Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{p_{n+1}-1}\sigma_{n,j}(t), \quad t \in [0,1],$$

с коэффициентами $a_v = (kp_{n_k+1})^{-\frac{1}{2}}$, если $v = jm_{n_k}$, $a_v = 0$, если $v \ne jm_{n_k}$. Покажем, что этот ряд по норме пространства $X(\varphi)$ сходится к некоторой функции $f_0 \in X(\varphi)$. По свойству нормы будем иметь

$$\left\|\sum_{k=l}^{v}\sum_{j=1}^{p_{n_k+1}-1}\sigma_{n_k,j}(\cdot)\right\|_X \le \sum_{k=l}^{v}\left\|\sum_{j=1}^{p_{n_k+1}-1}\sigma_{n_k,j}(\cdot)\right\|_X. \qquad (2)$$

Пусть $g \in X'(\overline{\varphi})$ — произвольная функция такая, что $\|g\|_{X'} \le 1$. Тогда по определению функций системы Прайса получим

$$\left|\int_0^1 \sum_{j=1}^{p_{n_k+1}-1}\sigma_{n_k,j}(t)g(t)dt\right| = \left|\int_0^1 \sum_{j=1}^{p_{n_k+1}-1}(kp_{n_k+1})^{-\frac{1}{2}}\psi_{jm_{n_k}}(t)g(t)dt\right| =$$

$$= (kp_{n_k+1})^{-\frac{1}{2}}\left|\int_0^1 \sum_{j=1}^{p_{n_k+1}-1}\left(X_{E(k)}(t) + X_{\overline{E(k)}}(t)\exp\left\{2\pi i\frac{j_{n_k+1}(t)}{p_{n_k+1}}\right\}\right)g(t)dt\right|. \qquad (3)$$

Здесь $X_{E(k)}(t)$, $X_{\overline{E}(k)}(t)$ — характеристические функции соответственно множеств $E(k) = \bigcup\limits_{r=0}^{m_{n_k-1}} [\frac{r}{m_{n_k}}, \frac{r}{m_{n_k}} + \frac{1}{m_{n_k+1}}]$ и $\overline{E}(k) = [0,1] \setminus E(k)$.

По определению максимального симметричного пространства и характеристической функции, учитывая, что мера Лебега $\mu E(k) = \frac{1}{p_{n_k+1}}$, получим

$$\Big|\int_0^1 \sum_{j=1}^{p_{n_k+1}-1} \Big(X_{E(k)}(t) + X_{\overline{E}(k)}(t)\exp\Big\{2\pi i \frac{j_{n_k+1}(t)}{p_{n_k+1}}\Big\}\Big) g(t)dt\Big| =$$

$$= \Big|(p_{n_k+1}-1)\int_{E(k)} g(t)dt - \int_{\overline{E}(k)} g(t)dt\Big| \le (p_{n_k+1}-1)\|X_{E(k)}\|_X + \|X_{\overline{E}(k)}\|_X =$$

$$= (p_{n_k+1}-1)\varphi(\mu E(k)) + \|X_{\overline{E}(k)}\|_X = (p_{n_k+1}-1)\varphi(p_{n_k+1}^{-1}) + \|X_{\overline{E}(k)}\|_X$$

для любой функции $g \in X'(\overline{\varphi})$, $\|g\|_{X'} \le 1$, откуда с учетом (3) следует

$$\Big\|\sum_{j=1}^{p_{n_k+1}-1} \sigma_{n_k,j}(\cdot)\Big\|_X \le \Big(\sqrt{(kp_{n_k+1})}\Big)^{-1} (p_{n_k+1}-1)\varphi(p_{n_k+1}^{-1}) + \|X_{[0,1]}\|_X \tag{4}$$

для любого $k = 1, 2, \ldots$ По условию теоремы $\sqrt{2} < \alpha_\varphi$. Тогда по лемме А существует ψ-функция $\theta(t)$ такая, что

$$\frac{\varphi(t)}{\sqrt{t}} \asymp \theta(t), \quad t \in (0,1] \text{ и } \alpha_\theta > 1.$$

По свойству монотонности функции $\theta(t)$, учитывая, что $p_{n_k+1} > 2^k$, $k = 1, 2, \ldots$, получим

$$\sum_{k=l}^{v} \varphi(p_{n_k+1}^{-1}) \le \sum_{k=l}^{v} \theta\Big(\frac{1}{2^k}\Big) \le (\ln 2)^{-1} \int\limits_0^{2^{-l+1}} \theta(t)\frac{dt}{t} = \underline{O}(\theta(2^{-l+1})). \tag{5}$$

Так как $\theta(t) \to 0$ при $t \to 0$, то из (2), (4) и (5) следует

$$\Big\|\sum_{k=l}^{v} \sum_{j=1}^{p_{n_k+1}-1} \sigma_{n_k j}\Big\|_X \to 0, \quad v, l \to +\infty.$$

Следовательно, в силу полноты пространства $X(\varphi)$ существует функция $f_0 \in X(\varphi)$ такая, что

$$\Big\|f_0 - \sum_{k=1}^{v} \sum_{j=1}^{p_{n_k+1}-1} \sigma_{n_k j}\Big\|_X \to 0, \quad v \to +\infty,$$

т. е. числа a_v будут коэффициентами Фурье функции $f_0 \in X(\varphi)$ по мультипликативной системе $\{\psi_n\}$. Но легко видеть, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{p_{n_k+1}-1} |\sigma_{n,j}(t)|^2 = +\infty$$

для любого $t \in [0,1]$. $\square$

Теорема 3. *Пусть система Прайса определена неограниченной последовательностью $\{p_n\}$. Тогда существует функция $f(t)$, не принадлежащая ни одному из максимальных симметричных пространств $X(\varphi)$, $1 < \beta_\varphi < \sqrt{2}$, для которой*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{p_{n_k+1}-1} |\sigma_{nj}(f,t)|^2 \le c$$

для любого $t \in [0,1]$.

Доказательство. Пусть $\{p_{n_k}\}$ — подпоследовательность, построенная при доказательстве теоремы 2. Так как по условию теоремы $\beta_\varphi < \sqrt{2}$, то существует $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$ такое, что $\beta_\varphi < 2^{\frac{1}{2}-\varepsilon} < \sqrt{2}$.

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{p_{n+1}-1} \sigma_{n,j}(t), \quad t \in [0,1],$$

с коэффициентами

$$a_v = \begin{cases} p_{n_k+1}^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}, & \text{если } v = jm_{n_k}; \\ 0, & \text{если } v \neq jm_{n_k}. \end{cases}$$

Тогда легко убедиться, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{p_{n+1}-1} |\sigma_{n,j}(t)|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{p_{n_k+1}-1} |a_{jm_{n_k}}|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} p_{n_k+1}^{-2\varepsilon} < +\infty$$

для любого $t \in [0,1]$. Этим одновременно доказали, что данный ряд будет рядом Фурье некоторой функции $f \in L_2$.

Теперь покажем, что функция $f \in L_2$ не принадлежит ни одному из пространств $X(\varphi)$, $\beta_\varphi < \sqrt{2}$. По определению максимального симметричного пространства $X(\varphi)$ и функций Прайса получим

$$\left\| \sum_{j=1}^{p_{n_k+1}-1} a_{jm_{n_k}} \psi_{jm_{n_k}} \right\|_X \geq \frac{1}{\|X_{E(k)}\|_{X'}} \left| \int_{E(k)} \sum_{j=1}^{p_{n_k+1}-1} a_{jm_{n_k}} \psi_{jm_{n_k}}(t) dt \right| = \frac{1}{2} p_{n_k+1}^{\frac{1}{2}-\varepsilon} \varphi(p_{n_k+1}^{-1}). \qquad (6)$$

По лемме А существует функция $\theta(t)$ такая, что

$$\frac{t^{\frac{1}{2}-\varepsilon}}{\varphi(t)} \asymp \theta(t) \to 0 \quad \text{при} \quad t \to 0.$$

Следовательно, в силу (6)

$$\left\| \sum_{j=1}^{p_{n_k+1}-1} a_{jm_{n_k}} \psi_{jm_{n_k}} \right\|_X \to +\infty \quad \text{при} \quad k \to +\infty.$$

Значит, $f \notin X(\varphi)$. $\square$

Замечание. В случае $X(\varphi) = L_q$, $1 < q < +\infty$, $q \neq 2$, теоремы 2 и 3 ранее доказаны в [5]. Для системы Уолша (т. е. $p_n = 2$ для всех $n = 1, 2, \dots$) неравенства (1) в пространстве Орлича доказаны в [9].

Литература

1. Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М. *Интерполяция линейных операторов.* – М.: Наука, 1978. – 400 с.
2. Boyd D.W. *Indices of function spaces and their relationship to interpolation* // Can. J. Math. – 1969. – V. 21. – № 5. – P. 1245–1254.
3. Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А. *Ряды и преобразования Уолша: Теория и применения.* – М.: Наука, 1987. – 344 с.
4. Watari C. *On generalized Walsh Fourier series* // Tôhoku Math. J. – 1958. – V. 10. – № 3. – P. 211–241.
5. Vlasova E.A. *Convergence of series with respect to generalized Haar systems* // Anal. Math. – 1987. – V. 13. – № 4. – P. 339–360.
6. Лапин С.В. *Некоторые теоремы вложения для произведений функций.* – Моск. гос. ун-т. – М., 1980. – 31 с. – Деп. в ВИНИТИ 18.03.80, № 1036-80.

7. Janson S. *On the interpolation of sublinear operators* // Studia Math. – 1982. – V. 75. – P. 51–53.
8. Бухвалов А.В. *Интерполяция операторов в пространствах вектор-функций с приложениями к сингулярным интегральным операторам* // ДАН СССР. – 1984. – Т. 278. – № 3. – С. 523–526.
9. Yung-min Chen. *Theorems of asymptotic approximation* // Math. Ann. – 1960. – V. 140. – P. 360–407.

Карагандинский государственный университет им. Е.А. Букетова

Поступили
первый вариант 10.01.2000
окончательный вариант 11.04.2001