ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2003 МАТЕМАТИКА № 2 (489)

УДК 517.518

Б.Г. ВАКУЛОВ, Н.К. КАРАПЕТЯНЦ, Л.Д. ШАНКИШВИЛИ

ОПЕРАТОРЫ СФЕРИЧЕСКОЙ СВЕРТКИ СО СТЕПЕННО-ЛОГАРИФМИЧЕСКИМ ЯДРОМ В ОБОБЩЕННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ГЁЛЬДЕРА

В данной работе изучаются операторы сферической свертки типа потенциала $K^{\alpha,\nu}$, $0 < \operatorname{Re}\alpha < 1$, со степенно-логарифмическим ядром вида

$$(K^{\alpha,\nu} f)(x) = \int\limits_{S_{n-1}} \frac{f(\sigma)}{|x-\sigma|^{n-1-\alpha}} \ln^\nu \frac{m}{|x-\sigma|} d\sigma, \quad x \in S_{n-1}, \tag{0.1}$$

и гиперсингулярные сферические операторы $D^{\alpha,\nu}$, $\operatorname{Re}\alpha \geq 0$, с таким же ядром

$$(D^{\alpha,\nu} f)(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\substack{S_{n-1} \\ |x-\sigma|\geq\varepsilon}} \frac{f(\sigma)-f(x)}{|x-\sigma|^{n-1+\alpha}} \ln^\nu \frac{m}{|x-\sigma|} d\sigma, \quad x \in S_{n-1}, \tag{0.2}$$

где $\nu \in R^1$, S_{n-1} — единичная сфера в R^n, а $m > 3$ фиксировано. Цель работы — дать описание образа и выявить зависимость от α, ν свойств указанных операторов в обобщенных пространствах Гёльдера $H_0^\omega(S_{n-1}, \rho)$, $\rho(x) = |x-a|^\mu$, $0 < \mu < n$, с характеристикой $\omega(t)$ из классов типа Бари–Стечкина. При $\nu = 0$ операторы сферической свертки порядка $0 < \alpha < 1$ и связанные с ними гиперсингулярные сферические операторы с этой точки зрения с большой полнотой изучены в [1]–[3] (в [3] рассмотрен также случай произвольных порядков $\alpha > 0$). Известно, что важную роль при изучении операторов сферической свертки играют мультипликаторы (см., напр., обзор [4] и монографию [5]) и их знание позволяет судить об образе оператора сферической свертки и делать выводы о той или иной его гладкости. Принципиальным моментом при изучении операторов (0.1)–(0.2) при $\nu = 0$ оказалось то, что возможно явно просчитать их мультипликаторы [4], [6], и анализ этих мультипликаторов позволил сделать вывод об улучшении гладкости. Более точный результат об изоморфизме был уже достигнут с помощью оценок типа Зигмунда. Оказалось, например, что (при $0 < \alpha < 1$) образ оператора (0.1) совпадает с аналогичным обобщенным весовым пространством Гёльдера с другой характеристикой $t^\alpha\omega(t)$ и тем самым порядок гладкости улучшается точно на α. В последнее время [7], [8] подобным образом были рассмотрены операторы сферической свертки комплексного порядка $0 \leq \operatorname{Re}\alpha < 1$, при этом оказалось, что при $\operatorname{Re}\alpha = 0$ операторы сферической свертки имеет смысл определять с самого начала как гиперсингулярные сферические операторы.

Цель работы — выявить при $\nu \neq 0$ зависимость гладкостных свойств оператора не только от α, но и от ν. К сожалению, в этом случае при произвольных α и ν мультипликаторы явно не просчитываются, и потому основной метод исследования заключается в получении оценок типа Зигмунда, и, как оказывается, в этих оценках возникает дополнительная особенность логарифмического типа того же порядка ν. Отметим, что в случае дробных интегралов порядка $0 < \alpha < 1$ по отрезку вещественной оси подобные операторы со степенно-логарифмическим ядром в безвесовом и весовом случаях при натуральных ν рассматривались в [9], [10] (при $\nu > 0$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 00-01-00046а.

см. [11], § 21, [12], а также [13], [14], где рассмотрены вольтерровские операторы на отрезке). Однако применяемые там методы основаны на вольтерровости и одномерности и неприменимы в нашем случае тем более для комплексных порядков. С помощью оценок типа Зигмунда доказываются теоремы о действии вида $K^{\alpha,\nu} : H_0^{\omega}(S_{n-1},\rho) \to H_0^{\omega_\alpha,\nu}(S_{n-1},\rho)$, где $\omega_\alpha(t) = t^\alpha \ln^\nu \frac{m}{t}\omega(t)$ и подобные же результаты для операторов $D^{\alpha,\nu}$, $0 < \operatorname{Re}\alpha < 1$, и $D^{i\theta}$. В отличие от дробных интегралов на отрезке подобного рода теоремы в некоторых случаях требуют обращения уже не к однопараметрическим, а к двупараметрическим классам типа Бари–Стечкина (определение 1.3).

1. Обозначения и вспомогательные сведения

Считаем $n \geq 3$. Пусть x, y — точки на единичной сфере $S_{n-1} = \{x : x \in R^n, |x| = 1\}$ и $|S_{n-1}| = 2\pi^{\frac{n-1}{2}}\Gamma^{-1}\left(\frac{n-1}{2}\right)$ — площадь этой сферы, $c_n = |S_{n-2}|$. Через

$$\omega(f,t) = \sup_{\substack{|x-y|\leq t \\ x,y\in S_{n-1}}} |f(x) - f(y)|$$

обозначим модуль непрерывности на сфере. Будем также использовать обозначения $(\Delta f)(x,y) = f(x) - f(y)$, $k_{\alpha,\nu}(t) = t^{\alpha-n+1}\ln^\nu \frac{m}{t}$, $t > 0$, для ядра, $\rho(x) = |x-a|^\mu$ при $0 < \mu < n$ для веса и полагать $\gamma = n - 1 - \operatorname{Re}\alpha$. Встречающиеся ниже константы обозначим буквой c и будем считать, если не оговорено иное, $h = |x-y| < 1$, $m > 3, m_1 > 2$.

В дальнейшем понадобятся следующие классические числовые неравенства в случае комплексных показателей:

$$|x^\mu - y^\mu| \leq c|x-y|x^{\operatorname{Re}\mu-1}, \quad x \geq y > 0, \qquad \operatorname{Re}\mu \geq 0; \tag{1.1}$$

$$|x^\mu - y^\mu| \leq c|x-y|y^{\operatorname{Re}\mu-1}, \quad x \geq y > 0, \qquad \operatorname{Re}\mu \leq 1; \tag{1.2}$$

$$|x^\mu - y^\mu| \leq c|x-y|^{\operatorname{Re}\mu}, \qquad x,y > 0, \quad 0 \leq \operatorname{Re}\mu \leq 1. \tag{1.3}$$

Справедлива

Лемма 1.1 ([3]). *Пусть $n \geq 3$ и $0 \leq a < b \leq 2$, тогда*

$$J(a,b) = \int\limits_{a<|x-\sigma|<b} g(|x-\sigma|)d\sigma \leq c_n \int\limits_a^b g(u)u^{n-2}du, \tag{1.4}$$

$$\int\limits_{a<|x-\sigma|<b} g(|x-\sigma|)d\sigma = \int\limits_{a<|y-\sigma|<b} g(|y-\sigma|)d\sigma, \quad x,y \in S_{n-1}. \tag{1.5}$$

Утверждения леммы следуют из справедливого при $n \geq 2$ равенства

$$J(a,b) = 2^{3-n}c_n \int_a^b g(u)u^{n-2}(4-u^2)^{\frac{n-3}{2}}du, \tag{1.6}$$

аналогичного формуле Каталана (напр., [5], с. 20), и очевидной независимости от $x \in S_{n-1}$ правой части в (1.6). Непосредственный анализ формулы (1.6) дает следующее полезное

Следствие 1.1. Пусть b — комплексное число, $\operatorname{Re} b < n-1$. Тогда

$$\int\limits_{|x-\sigma|<a} |x-\sigma|^{-b}d\sigma = c_n a^{n-1-b}\left(\frac{1}{n-1-b} + o(1)\right), \quad a \to 0,$$

причем

$$|o(1)| \leq \frac{(n-3)a^2}{8(n+1-\operatorname{Re} b)},$$

и

$$\int\limits_{|x-\sigma|>a} |x-\sigma|^{-b} d\sigma = c_n \begin{cases} a^{n-1-b}\left(\frac{1}{n-1-b}+o(1)\right), & a\to 0,\quad \operatorname{Re} b > n-1;\\ \ln\frac{2}{a}\left(1+o(1)\right), & a\to 0,\quad b=n-1;\\ 2^{-b+n-2}B\left(\frac{n-1-b}{2},\frac{n-1}{2}\right)+o(1), & a\to 0,\quad \operatorname{Re} b < n-1;\\ \frac{a^{i\operatorname{Im} b}}{i\operatorname{Im} b}+C+o(1), & a\to 0,\quad \operatorname{Re} b = n-1,\quad b\neq n-1,\end{cases}$$

где $C=-\frac{2^{i\operatorname{Im} b}}{i\operatorname{Im} b}+2^{3-n}\int\limits_0^2 u^{-i\operatorname{Im} b-1}\left[(4-u^2)^{\frac{n-3}{2}}-2^{n-3}\right]du.$

Лемма 1.2. *Пусть $x,y,\sigma\in S_{n-1}$ и $|x-\sigma|\geq 2|x-y|$. Тогда при $\operatorname{Re}\gamma\geq 0$ и $\nu\in R^1$ справедливо неравенство*

$$\left||x-\sigma|^{-\gamma}\ln^\nu\frac{m}{|x-\sigma|}-|y-\sigma|^{-\gamma}\ln^\nu\frac{m}{|y-\sigma|}\right|\leq\frac{c|x-y|}{|x-\sigma|^{\operatorname{Re}\gamma+1}}\ln^\nu\frac{m_1}{|x-\sigma|},\quad m_1>2. \tag{1.7}$$

Доказательство. Проведем его для простоты при $\gamma\geq 0$. Обозначим $f(a)=a^{-\gamma}\ln^\nu\frac{m}{a}$, $\nu\in R^1$, $0<a\leq 2$. Пусть далее $0<b\leq 2$ таково, что $a\geq 2|b-a|$. По формуле Лагранжа имеем $f(b)-f(a)=-(b-a)\left(\gamma+\nu\ln^{-1}\frac{m}{\xi}\right)\xi^{-\gamma-1}\ln^\nu\frac{m}{\xi}$, где $\xi\in(\min(a,b),\max(a,b))$. Остается учесть, что из условий на a, b следует $\frac{a}{2}\leq\min(a,b)\leq\max(a,b)\leq\frac{3}{2}a$, что сразу дает $|f(b)-f(a)|\leq c|b-a|a^{-\gamma-1}\ln^\nu\frac{m_1}{a}$, откуда получим (1.7) при $\gamma\geq 0$. Случай $\operatorname{Re}\gamma\geq 0$ рассматривается уже с учетом доказанного и числовых неравенств (1.1)–(1.2) для комплексных порядков. □

Лемма 1.3. *Пусть $\theta\in R^1\setminus\{0\}$, $\nu\geq 0$, $x,y\in S_{n-1}$ и $h=|x-y|$. Тогда*

$$|\mathbf{A}(h)|=\left|\int\limits_{|x-\sigma|\geq 2h}\frac{d\sigma}{|y-\sigma|^{n-1+i\theta}}\ln^\nu\frac{m}{|y-\sigma|}\right|\leq c\ln^\nu\frac{m}{h},$$

где $m>3$ и c зависит от ν и θ, но не зависит от h.

Доказательство. Прежде всего заметим, что интеграл $\mathbf{A}(h)$ представляет собой функцию, инвариантную относительно всех вращений по x и y, и, следовательно (напр., [5], с. 36), зависит только от $|x-y|=h$, так что обозначение $\mathbf{A}(h)$ корректно. Имеем [15]

$$\mathbf{A}(h)=\int\limits_{|y-\sigma|\geq 2h}\frac{\ln^\nu\frac{m}{|y-\sigma|}d\sigma}{|y-\sigma|^{n-1+i\theta}}-\int\limits_{\substack{h\leq|x-\sigma|\leq 2h\\ |y-\sigma|\geq 2h}}\frac{\ln^\nu\frac{m}{|y-\sigma|}d\sigma}{|y-\sigma|^{n-1+i\theta}}+\int\limits_{\substack{|x-\sigma|\geq 2h\\ h\leq|y-\sigma|\leq 2h}}\frac{\ln^\nu\frac{m}{|y-\sigma|}d\sigma}{|y-\sigma|^{n-1+i\theta}}=$$

$$=A_1+A_2+A_3.$$

Проще всего оценивается A_3, поскольку здесь возможна абсолютная оценка, и в силу (1.4) сразу получаем $|A_3|\leq c\ln^\nu\frac{m}{h}$. В силу $|x-\sigma|\leq 2h\leq|y-\sigma|$ замечаем, что оценка $|A_2|$ аналогична оценке $|A_3|$, поэтому $|A_2|\leq c\ln^\nu\frac{m}{h}$. Оценим теперь A_1. Обозначим $A(\nu)=\int\limits_{2h}^{2}u^{-1-i\theta}\ln^\nu\frac{m}{u}du$. В силу формулы (1.6) интеграл $A_1-c_nA(\nu)$ сходится абсолютно, поэтому остается оценить $A(\nu)$. Покажем, что

$$|A(\nu)|\leq\left(\frac{c_1}{|\theta|}+\frac{c_2}{|\theta|^2}+\cdots+\frac{c_s}{|\theta|^s}\right)\ln^\nu\frac{m}{h}, \tag{1.8}$$

где $s=\nu+1$, если $\nu\in N$, и $s=[\nu]+2$, если $\nu\notin N$. Учтем очевидное неравенство $|A(0)|\leq\frac{2}{|\theta|}$. При $\nu>0$ используем рекуррентное неравенство, получаемое интегрированием в $A(\nu)$ по частям

$$|A(\nu)|\leq\frac{\nu}{|\theta|}|A(\nu-1)|+\frac{c}{|\theta|}\ln^\nu\frac{m}{h},\quad \nu>0. \tag{1.9}$$

Отсюда и из оценки для $A(0)$ имеем (1.9) $\forall \nu \in N$. Учитывая это, видим, что для произвольного $\nu > 0$ достаточно рассмотреть случай $0 < \nu < 1$. При таком ν продолжим интегрирование по частям, приводящее к (1.8), что даст рекуррентную формулу вида $|A(\nu)| \leq \frac{c_1}{|\theta|} \ln^\nu \frac{m}{h} + \frac{c_2}{|\theta|^2} \ln^{\nu-1} \frac{m}{h} + \frac{c_3}{|\theta|^2}|A(\nu-2)|$, откуда с учетом $|A(\nu-2)| \leq c$ сразу выводится (1.9) для $\nu \in (0,1)$. Аналогично рассматриваем случай остальных $\nu \notin N$ (подробнее см. [15]). $\square$

Замечание 1.1. При $\beta > 0$, $\nu \in R^1$ справедливы неравенства

$$\int_0^h u^{\beta-1} \ln^\nu \frac{m}{u} du \leq c h^\beta \ln^\nu \frac{m}{h}, \quad \int_h^2 u^{-\beta-1} \ln^\nu \frac{m}{u} du \leq c h^{-\beta} \ln^\nu \frac{m}{h}. \tag{1.10}$$

При $\beta > 0$, $\nu \geq 0$ они легко следуют, если использовать рассуждения из леммы 1.3. Для $\nu < 0$ левое из неравенств (1.10) очевидно, а что касается правого, то оно может быть проверено с помощью простого утверждения, которое для удобства приведем в виде леммы.

Лемма 1.4. *Пусть $\varepsilon, \nu \in R^1$. Функция*

$$t^\varepsilon \ln^\nu \frac{m}{t}, \quad 0 < t < 2, \tag{1.11}$$

почти убывает, если $\varepsilon < 0$ или $\varepsilon = 0, \nu \geq 0$, и почти возрастает, если $\varepsilon > 0$ или $\varepsilon = 0, \nu \leq 0$.

Лемма 1.5. *Пусть $m > 3$, $\nu \in R^1$, $\xi < n-1$, $\eta < n-1$. Тогда*

$$\int\limits_{S_{n-1}} \frac{\ln^\nu \frac{m}{|x-\sigma|}}{|x-\sigma|^\xi |y-\sigma|^\eta} d\sigma \leq c \begin{cases} |x-y|^{-(\xi+\eta-n+1)}, & \xi+\eta > n-1; \\ \ln \frac{2}{|x-y|}, & \xi+\eta = n-1; \\ 1, & \xi+\eta < n-1, \end{cases} \tag{1.12}$$

$$\int\limits_{S_{n-1}} \frac{\ln^\nu \frac{m}{|x-\sigma|}}{|x-\sigma|^\xi |y-\sigma|^\eta} d\sigma \geq d \begin{cases} |x-y|^{-(\xi+\eta-n+1)}, & \xi+\eta > n-1; \\ \ln \frac{2}{|x-y|}, & \xi+\eta = n-1; \\ 1, & \xi+\eta < n-1, \end{cases} \tag{1.13}$$

где c, d — некоторые положительные константы и $|x-y| < 1$.

Доказательство (1.12) при $\nu = 0$ можно найти в [16], [17]. В случае $\nu \neq 0$ оно проводится по аналогичной схеме с использованием следствия 1.1 и замечания 1.2. Более того, (1.12) справедливо и для комплексных ξ, η, если оценивать модуль интеграла в левой части (1.12) и заменить в правой части неравенства ξ, η на $\operatorname{Re}\xi$, $\operatorname{Re}\eta$. Аналогично доказывается и (1.13). Кроме того, (1.13) справедливо для комплексных ξ, η в случае $\operatorname{Re}\xi + \operatorname{Re}\eta \leq n-1$ с теми же оговорками, что и выше.

Определение 1.1. Будем говорить, что $\omega(t) \in W$, $t \in [0, \ell]$, если
а) $\omega(t)$ непрерывна;
б) $\omega(0) = 0$, $w(t) > 0$, $t > 0$;
в) $\omega(t)$ почти возрастает.

Определение 1.2. Пусть $\omega(h) \in W$. Через $H^\omega(S_{n-1})$ обозначим класс функций $f \in C(S_{n-1})$ таких, что $\omega(f,h) \leq c\omega(h)$, с нормой $\|f\|_{H^\omega(S_{n-1})} = \|f\|_{C(S_{n-1})} + \sup\limits_{t>0} \frac{\omega(f,t)}{\omega(t)}$. Обобщенным весовым пространством Гёльдера назовем класс $H^\omega(S_{n-1}, \rho) = \{f : \rho f \in H^\omega(S_{n-1})\}$. Если дополнительно выполнено и условие $\lim\limits_{x \to a} (\rho f)(x) = 0$, где $\rho(x) = |x-a|^\mu$, $a \in S_{n-1}$, то полагаем $f \in H_0^\omega(S_{n-1}, \rho)$.

Определение 1.3. Скажем, что $\omega(t) \in \Phi_\beta^\delta$, $\beta > \delta \ge 0$, если $\omega(t) \in W$ и

$$\int_0^\tau \left(\frac{\tau}{t}\right)^\delta \frac{\omega(t)}{t} dt \le c\omega(\tau), \quad \int_\tau^\ell \left(\frac{\tau}{t}\right)^\beta \frac{\omega(t)}{t} dt \le c\omega(\tau), \quad 0 < \tau < \ell/2. \tag{1.14}$$

Соответствующий класс, когда выполнено только первое из условий (1.14), обычно обозначают Φ^δ, и $\omega(t) \in \Phi_\beta$, если выполнено только второе из условий (1.14), поэтому $\Phi_\beta^\delta = \Phi^\delta \cap \Phi_\beta$. В случае $\delta = 0$, $\beta = 1$ получаем известный класс Φ_1^0 Бари–Стечкина [18], [19].

Замечание 1.2. Важно отметить, что в случае модулей непрерывности при $\delta \ge 0$, $\beta \le 1$ всегда верны противоположные неравенства [8]

$$\omega(f,\tau) \le c\int_0^\tau \left(\frac{\tau}{t}\right)^\delta \frac{\omega(f,t)}{t} dt, \quad \omega(f,\tau) \le c\int_\tau^\ell \left(\frac{\tau}{t}\right)^\beta \frac{\omega(f,t)}{t} dt. \tag{1.15}$$

Учитывая (напр., [20]) свойства классов Φ^δ и Φ_β, нетрудно доказать справедливость следующей леммы.

Лемма 1.6. *Пусть* $m > \ell$, $\nu \in R^1$. *Если* $\omega(t) \in \Phi^\delta$, $\delta \ge 0$ $(\Phi_\beta,\ \beta > 0)$, $t \in [0,\ell]$, *то и* $\omega(t)\ln^\nu \frac{m}{t} \in \Phi^\delta$ $(\omega(t)\ln^\nu \frac{m}{t} \in \Phi_\beta$ *соответственно*).

2. Сферические операторы со степенно-логарифмическим ядром в пространстве $H^\omega(S_{n-1})$

1^0. Случай $0 < \operatorname{Re}\alpha < 1$.

Теорема 2.1. *Пусть* $0 < \operatorname{Re}\alpha < 1$, $\nu \in R^1$ *и* $f \in C(S_{n-1})$. *Тогда для* $K^{\alpha,\nu}$ *справедлива оценка*

$$\omega(K^{\alpha,\nu}f,h) \le ch \begin{cases} \ln^\nu \frac{m}{h} \displaystyle\int_h^2 \frac{\omega(f,u)}{u^{2-\operatorname{Re}\alpha}} du, & \nu \ge 0; \\ \displaystyle\int_h^2 \frac{\omega(f,u)\ln^\nu \frac{m}{u}}{u^{2-\operatorname{Re}\alpha}} du, & \nu < 0. \end{cases}$$

Доказательство. Используя обозначение $k_{\alpha,\nu}(t)$ и учитывая (1.5), представим разность $(\Delta K^{\alpha,\nu}f)(x,y)$ для $x,y \in S_{n-1}$ в виде

$$(\Delta K^{\alpha,\nu}f)(x,y) = \int\limits_{|x-\sigma|\le 2h} (\Delta f)(\sigma,x)k_{\alpha,\nu}(|x-\sigma|)d\sigma - \int\limits_{|x-\sigma|\le 2h} (\Delta f)(\sigma,x)k_{\alpha,\nu}(|y-\sigma|)d\sigma +$$

$$+ \int\limits_{|x-\sigma|>2h} (\Delta f)(\sigma,x)\left\{k_{\alpha,\nu}(|x-\sigma|) - k_{\alpha,\nu}(|y-\sigma|)\right\} d\sigma = I_1 + I_2 + I_3.$$

В силу (1.4) и (1.11) имеем

$$|I_1| \le c\int_0^{2h} \frac{\omega(f,u)}{u^{1-\operatorname{Re}\alpha}} \ln^\nu \frac{m}{u} du \le ch^{\operatorname{Re}\alpha} \ln^\nu \frac{m}{h}\omega(f,h).$$

Слагаемое I_2 оценивается аналогично, если заметить, что $\{\sigma : \ |x-\sigma| \le 2h\} \subset \{\sigma : \ |y-\sigma| \le 3h\}$. Остается оценить I_3. С учетом (1.7) получим

$$|I_3| \le ch \int\limits_{|x-\sigma|>2h} \frac{\omega(f,|x-\sigma|)}{|x-\sigma|^{n-\operatorname{Re}\alpha}} \ln^\nu \frac{m}{|x-\sigma|} d\sigma \le ch \int\limits_h^2 \frac{\omega(f,u)\ln^\nu \frac{m}{u}}{u^{2-\operatorname{Re}\alpha}} du.$$

Остается собрать полученные оценки и учесть левое из неравенств (1.15). $\square$

Теорема 2.2. *Пусть* $0 < \operatorname{Re}\alpha < 1$, $\nu \in R^1$. *Если* $f \in C(S_{n-1})$, *то для* $D^{\alpha,\nu} f$ *справедлива оценка*

$$\omega(D^{\alpha,\nu}f,h) \le c \begin{cases} \displaystyle\int_0^h \frac{\omega(f,u)}{u^{1+\operatorname{Re}\alpha}} \ln^\nu \frac{m}{u} du, & \nu \ge 0; \\ \ln^\nu \frac{m}{h} \displaystyle\int_0^h \frac{\omega(f,u)}{u^{1+\operatorname{Re}\alpha}} du, & \nu < 0. \end{cases}$$

Доказательство. Составим разность

$$(\Delta D^{\alpha,\nu} f)(x,y) = \int\limits_{|x-\sigma|\le 2h} (\Delta f)(\sigma,x) k_{-\alpha,\nu}(|x-\sigma|) d\sigma - \int\limits_{|x-\sigma|\le 2h} (\Delta f)(\sigma,y) k_{-\alpha,\nu}(|y-\sigma|) d\sigma +$$
$$+ \int\limits_{|x-\sigma|>2h} (\Delta f)(\sigma,x) \left\{ k_{-\alpha,\nu}(|x-\sigma|) - k_{-\alpha,\nu}(|y-\sigma|) \right\} d\sigma +$$
$$+ (\Delta f)(x,y) \int\limits_{|x-\sigma|>2h} \frac{d\sigma}{|y-\sigma|^{n-1+\alpha}} \ln^\nu \frac{m}{|y-\sigma|} = A_1 + A_2 + A_3 + A_4. \quad (2.1)$$

Оценки слагаемых A_1, A_2, A_3 проводятся по аналогии с оценками I_1, I_2, I_3, при этом лишь необходимо дополнительно принять во внимание почти убывание функции $\omega(f,t)/t$, а при $\nu < 0$ и замечание 1.2. Наконец, A_4 оценивается согласно второму утверждению в (1.11) и остается учесть правое неравенство (1.15) и знак ν. □

2^0. Случай $\operatorname{Re}\alpha = 0$. Рассмотрим теперь $D^{\alpha,\nu}$ в случае, когда $\alpha = i\theta$, и предположим $\nu \ge 0$.

Теорема 2.3. *Пусть* $f \in C(S_{n-1})$, $\nu \ge 0$ *и* $\theta \in R^1 \setminus \{0\}$. *Тогда для* $D^{i\theta,\nu} f$ *справедлива оценка Зигмунда*

$$\omega(D^{i\theta,\nu}f,h) \le c \left\{ \int_0^h \frac{\omega(f,t)}{t} \ln^\nu \frac{m}{t} dt + h \ln^\nu \frac{m}{h} \int_h^2 \frac{\omega(f,t)}{t^2} dt \right\}.$$

Доказательство. Используем представление (2.1) с учетом того, что теперь $\alpha = i\theta$, и далее анализируем, где нужно изменить доказательство. Хотя оценки слагаемых A_1, A_2, A_3 и проводятся по аналогии с предыдущим случаем, в конечной оценке остаются два слагаемых, а не одно, как в теореме 2.2. Что касается A_4, то имеем $|A_4| \le |\mathbf{A}(h)|\omega(f,h)$, где $\mathbf{A}(h)$ оценивается согласно лемме 1.3, и остается использовать (1.15). □

3. Сферические операторы со степенно-логарифмическим ядром в пространстве $H^\omega(S_{n-1},\rho)$

Переходя к весовым оценкам типа Зигмунда, для функции $f(x) \in H^\omega(S_{n-1},\rho)$ будем использовать обозначение $|x-a|^\mu f(x) = \psi(x) \in H^\omega(S_{n-1})$, так что $|\psi(\sigma)| \le \omega(\psi, |\sigma - a|)$. Кроме того, учитывая, что ниже в оценках интегралов по различным частям сферы от одинаковых подинтегральных функций конечные оценки оказываются совпадающими, будем отождествлять все эти оцениваемые интегралы, обозначая их одним символом.

1^0. Случай $0 < \operatorname{Re}\alpha < 1$.

Теорема 3.1. *Пусть* $\rho(x) = |x-a|^\mu$, $0 < \mu < n - \operatorname{Re}\alpha$, $\eta = \min(1,\mu)$ *и* $\nu \in R^1$. *Если* $(\rho f)(x) \in C(S_{n-1})$ *и* $(\rho f)(a) = 0$, *то справедлива оценка*

$$(\rho K^{\alpha,\nu} f, h) \le c h^\eta \begin{cases} \ln^\nu \dfrac{m}{h} \displaystyle\int_h^2 \frac{\omega(f,u)}{u^{1+\eta-\operatorname{Re}\alpha}} du, & \nu \ge 0; \\ \displaystyle\int_h^2 \frac{\omega(f,u) \ln^\nu \frac{m}{u}}{u^{1+\eta-\operatorname{Re}\alpha}} du, & \nu < 0, \end{cases}$$

при $0<\mu<n-1$ *и*

$$(\rho K^{\alpha,\nu}f,h)\le c\begin{cases} h^{\mu+\mathrm{Re}\,\alpha-n+1}\displaystyle\int_0^h \frac{\omega(\rho f,u)}{u^{\mu+2-n}}\ln^\nu\frac{m}{u}du+h\ln^\nu\frac{m}{h}\int_h^2\frac{\omega(\rho f,u)}{u^{2-\mathrm{Re}\,\alpha}}du, & \nu\ge 0;\\ h^{\mu+\mathrm{Re}\,\alpha-n+1}\displaystyle\int_0^h \frac{\omega(\rho f,u)}{u^{\mu+2-n}}\ln^\nu\frac{m}{u}du+h\int_h^2\frac{\omega(\rho f,u)\ln^\nu\frac{m}{u}}{u^{2-\mathrm{Re}\,\alpha}}du, & \nu<0,\end{cases}$$

при $n-1\le\mu<n-\mathrm{Re}\,\alpha$. *Кроме того, в условиях теоремы* $(\rho K^{\alpha,\nu}f)(a)=0$.

Доказательство. Имеем $\rho(x)(K^{\alpha,\nu}f)(x)=(K^{\alpha,\nu}\psi)(x)+g(x)$, где

$$g(x)=\int\limits_{S_{n-1}}\ell(x,\sigma)d\sigma,\quad \ell(x,\sigma)=\Big(\frac{|x-a|^\mu}{|\sigma-a|^\mu}-1\Big)k_{\alpha,\nu}(|x-\sigma|).$$

Оценка модуля непрерывности $(K^{\alpha,\nu}\psi)(x)$ уже получена в безвесовом случае (см. теорему 2.1). Остается оценить лишь второе слагаемое. Проведем это для простоты в случае $\nu\ge 0$. Представим разность

$$g(x)-g(y)=\int\limits_{|x-\sigma|\le 2h}\ell(x,\sigma)\psi(\sigma)d\sigma-\int\limits_{|x-\sigma|\le 2h}\ell(y,\sigma)\psi(\sigma)d\sigma+$$
$$+\int\limits_{|x-\sigma|>2h}\{\ell(x,\sigma)-\ell(y,\sigma)\}\,\psi(\sigma)d\sigma=I_1+I_2+I_3. \quad (3.1)$$

Для оценки I_1 и I_2 используем неравенство

$$|\ell(x,\sigma)|\le c\frac{\ln^\nu\frac{m}{|x-\sigma|}}{|x-\sigma|^\gamma}\begin{cases}\frac{|x-\sigma|}{|\sigma-a|}, & |x-\sigma|\le|\sigma-a|;\\ \Big(\frac{|x-\sigma|}{|\sigma-a|}\Big)^{\max(1,\mu)}, & |x-\sigma|>|\sigma-a|.\end{cases} \quad (3.2)$$

Действительно, в силу (1.1)–(1.2) оценка (3.2) сразу следует для $0<\mu\le 1$, а также для $\mu\ge 1$ с учетом $\max(|x-a|,|\sigma-a|)\le(|x-\sigma|+|\sigma-a|)$.

Замечание 3.1. Оценка (3.2) замечательна тем, что "склеивается" при $\mu=1$. Это позволяет подобно [21], [22] проводить оценку I_1, I_2 только при $\mu\ge 1$, и ее вид, полученный для $\mu=1$, будет справедлив для всех $0<\mu\le 1$.

Рассмотрим случай $1\le\mu<n-\mathrm{Re}\,\alpha$. При $|x-\sigma|\le|\sigma-a|$ на основе первого неравенства (3.2) с учетом почти убывания $\frac{\omega(\psi,t)}{t}$ и (1.4) получаем $|I_1|\le ch^{\mathrm{Re}\,\alpha}\omega(\psi,h)\ln^\nu\frac{m}{h}$. Если $|x-\sigma|>|\sigma-a|$, на основе (3.2) с учетом монотонного возрастания логарифмической функции получаем

$$|I_1|\le c\int\limits_{|x-\sigma|\le 2h}\frac{\omega(\psi,|\sigma-a|)}{|\sigma-a|^\mu|x-\sigma|^{\gamma-\mu}}\ln^\nu\frac{m}{|a-\sigma|}d\sigma. \quad (3.3)$$

Если $\gamma-\mu\ge 0$, т. е. $\mu<n-1-\mathrm{Re}\,\alpha$, то с использованием (1.4) и первого утверждения замечания 1.1 получаем (как и выше) $|I_1|\le ch^{\mathrm{Re}\,\alpha}\omega(\psi,h)\ln^\nu\frac{m}{h}$. Если же $\gamma-\mu\le 0$, т. е. $n-1-\mathrm{Re}\,\alpha\le\mu$ ($<n-\mathrm{Re}\,\alpha$), то из (3.3) с применением (1.4) имеем

$$|I_1|\le ch^{\mu-n+1+\mathrm{Re}\,\alpha}\int_0^h\frac{\omega(\psi,u)}{u^{\mu+2-n}}\ln^\nu\frac{m}{u}du, \quad (3.4)$$

причем для $\mu<n-1$ правая часть в (3.4) легко оценивается через $ch^{\mathrm{Re}\,\alpha}\omega(\psi,h)\ln^\nu\frac{m}{h}$.

Оценка I_1 завершена, а I_2 сводится к I_1. Перейдем к оценке I_3. Прежде всего оценим $\ell(x,\sigma)-\ell(y,\sigma)$. Рассмотрим вначале случай $1\le\mu<n-\operatorname{Re}\alpha$. Применяя (1.1) и лемму 1.2, получим

$$|\ell(x,\sigma)-\ell(y,\sigma)|\le c\frac{\ln^{\nu}\frac{m}{|x-\sigma|}}{|x-\sigma|^{\gamma}}\begin{cases}\dfrac{h}{|\sigma-a|}, & |x-\sigma|\le|\sigma-a|;\\ \dfrac{h}{|\sigma-a|^{\mu}|x-\sigma|^{1-\mu}}, & |x-\sigma|>|\sigma-a|.\end{cases}\tag{3.5}$$

При $|x-\sigma|<|\sigma-a|$ с учетом почти убывания $\frac{\omega(\psi,t)}{t}$ сразу получаем

$$|I_3|\le ch\int\limits_{|x-\sigma|>2h}\frac{\omega(\psi,|\sigma-a|)}{|\sigma-a||x-\sigma|^{\gamma}}\ln^{\nu}\frac{m}{|x-\sigma|}d\sigma\le ch\ln^{\nu}\frac{m}{h}\int\limits_h^2\frac{\omega(\psi,u)}{u^{2-\operatorname{Re}\alpha}}du.\tag{3.6}$$

Если $|x-\sigma|>|\sigma-a|$, то используем вторую оценку из (3.5)

$$|I_3|\le ch\ln^{\nu}\frac{m}{h}\int\limits_{|x-\sigma|>2h}\frac{\omega(\psi,|\sigma-a|)}{|\sigma-a|^{\mu}|x-\sigma|^{\gamma+1-\mu}}d\sigma.$$

При $|x-\sigma|>|\sigma-a|>2h$ с учетом $\gamma+1-\mu=n-\operatorname{Re}\alpha-\mu>0$ получаем оценку I_3 подобно (3.6). Если же $|x-\sigma|>2h>|\sigma-a|$ и $\mu<n-\operatorname{Re}\alpha$, то из (3.6) получаем

$$|I_3|\le ch^{\mu-\gamma}\ln^{\nu}\frac{m}{h}\int\limits_{|\sigma-a|<2h}\frac{\omega(\psi,|\sigma-a|)}{|\sigma-a|^{\mu}}d\sigma\le ch^{\mu-n+1+\operatorname{Re}\alpha}\ln^{\nu}\frac{m}{h}\int\limits_0^h\frac{\omega(\psi,u)}{u^{\mu+2-n}}du,$$

что совпадает с правой частью в (3.4).

Рассмотрим теперь оценку I_3 в случае $0<\mu\le1$. При $|x-\sigma|>2h$ с использованием (1.2)–(1.3) получим оценку [3]

$$|\ell(x,\sigma)-\ell(y,\sigma)|\le ch^{\mu}\frac{\ln^{\nu}\frac{m}{|x-\sigma|}}{|a-\sigma||x-\sigma|^{n-2-\operatorname{Re}\alpha+\mu}}.\tag{3.7}$$

Таким образом,

$$|I_3|\le ch^{\mu}\ln^{\nu}\frac{m}{h}\int\limits_{|x-\sigma|>2h}\frac{\omega(\psi,|\sigma-a|)}{|\sigma-a||x-\sigma|^{n-2-\operatorname{Re}\alpha+\mu}}d\sigma.\tag{3.8}$$

Пусть $|x-\sigma|<|\sigma-a|$, тогда с учетом почти убывания $\frac{\omega(\psi,t)}{t}$ получим

$$|I_3|\le ch^{\mu}\ln^{\nu}\frac{m}{h}\int\limits_{|x-\sigma|>2h}\frac{\omega(\psi,|x-\sigma|)}{|x-\sigma|^{n-2-\operatorname{Re}\alpha+\mu}}d\sigma\le ch^{\mu}\ln^{\nu}\frac{m}{h}\int\limits_h^2\frac{\omega(\psi,u)}{u^{1+\mu-\operatorname{Re}\alpha}}du.\tag{3.9}$$

При $|x-\sigma|>|\sigma-a|>2h$ оценка I_3 проводится, как в (3.9), если учесть, что $n-2-\operatorname{Re}\alpha+\mu>0$. Наконец, при $|x-\sigma|>2h>|\sigma-a|$ из (3.8) получаем

$$|I_3|\le c\,h^{1-\gamma}\ln^{\nu}\frac{m}{h}\int\limits_{|\sigma-a|<2h}\frac{\omega(\psi,|\sigma-a|)}{|\sigma-a|}d\sigma\le ch^{\operatorname{Re}\alpha}\ln^{\nu}\frac{m}{h}\omega(\psi,h).$$

Остается объединить все ранее полученные оценки. $\square$

Рассмотрим теперь $D^{\alpha,\nu}$ при $0<\operatorname{Re}\alpha<1$.

Теорема 3.2. *Пусть* $\rho(x) = |x-a|^{\mu}$, $0 < \mu < n$, $\eta = \min(1,\mu)$ *и* $\nu \in R^1$. *Если* $(\rho f)(x) \in C(S_{n-1})$ *и* $(\rho f)(a) = 0$, *то для* $D^{\alpha,\nu} f$ *справедлива оценка типа Зигмунда*

$$\omega(\rho D^{\alpha,\nu} f, h) \leq c \begin{cases} \int_0^h \frac{\omega(\rho f, u)}{u^{1+\operatorname{Re}\alpha}} \ln^{\nu} \frac{m}{u} du + ch^{\eta} \ln^{\nu} \frac{m}{h} \int_h^2 \frac{\omega(\rho f, u)}{u^{\eta+1+\operatorname{Re}\alpha}} du, & \nu \geq 0; \\ \int_0^h \ln^{\nu} \frac{m}{h} \frac{\omega(\rho f, u)}{u^{1+\operatorname{Re}\alpha}} du + ch^{\eta} \int_h^2 \frac{\omega(\rho f, u) \ln^{\nu} \frac{m}{u}}{u^{\eta+1+\operatorname{Re}\alpha}} du, & \nu < 0, \end{cases} \tag{3.10}$$

при $0 < \mu < n - 1 + \operatorname{Re}\alpha$ *и*

$$\omega(\rho D^{\alpha,\nu} f, h) \leq ch^{\mu-n-\operatorname{Re}\alpha+1} \begin{cases} \int_0^h \frac{\omega(\rho f, u)}{u^{2+\mu-n}} \ln^{\nu} \frac{m}{u} du, & \nu \geq 0; \\ \ln^{\nu} \frac{m}{h} \int_0^h \frac{\omega(\rho f, u)}{u^{2+\mu-n}} du, & \nu < 0, \end{cases} \tag{3.11}$$

при $n - 1 + \operatorname{Re}\alpha \leq \mu < n$. *Кроме того, в условиях теоремы* $(\rho D^{\alpha,\nu} f)(a) = 0$.

Доказательство. Будем следовать схеме доказательства теоремы 3.1, считая для простоты $\nu \geq 0$. В этом случае по-прежнему справедливо представление (3.1), только в выражении для $\ell(x,\sigma)$ следует α заменить на $-\alpha$. В силу замечания 3.1 оценку I_1 достаточно провести при $1 \leq \mu < n$. С учетом (3.2) и почти убывания $\frac{\omega(f,t)}{t}$ имеем при $|x-\sigma| \leq |\sigma - a|$

$$|I_1| \leq c \int\limits_{|x-\sigma| \leq 2h} \frac{\omega(\psi, |\sigma - a|)}{|\sigma - a||x-\sigma|^{\gamma-1}} \ln^{\nu} \frac{m}{|x-\sigma|} d\sigma \leq c \int\limits_0^h \frac{\omega(\psi, u)}{u^{1+\operatorname{Re}\alpha}} \ln^{\nu} \frac{m}{u} du, \tag{3.12}$$

и аналогичная оценка имеет место при $|x-\sigma| > |\sigma - a|$, когда $\gamma - \mu = n - 1 + \operatorname{Re}\alpha - \mu > 0$. Если же в этом случае $\gamma - \mu \leq 0$, то

$$|I_1| \leq ch^{\mu-\gamma} \int\limits_{|\sigma-a|<2h} \frac{\omega(\psi, |\sigma - a|)}{|\sigma - a|^{\mu}} \ln^{\nu} \frac{m}{|\sigma - a|} d\sigma \leq ch^{\mu-n+1-\operatorname{Re}\alpha} \int\limits_0^h \frac{\omega(\psi, u)}{u^{\mu+2-n}} \ln^{\nu} \frac{m}{u} du. \tag{3.13}$$

Для завершения оценки I_1 остается заметить, что при $n - 1 + \operatorname{Re}\alpha \leq \mu < n$ правая часть в (3.13) оценивается через правую часть в (3.12). Поскольку оценка I_2 фактически та же, остается оценить I_3. Используем вначале (3.5) для $1 \leq \mu < n$, где следует заменить α на $-\alpha$. При $|x-\sigma| < |\sigma - a|$ из первого неравенства (3.5) с учетом почти убывания $\frac{\omega(f,t)}{t}$ легко получим $|I_3| \leq c \ln^{\nu} \frac{m}{h} \omega(\psi, h) h^{-\operatorname{Re}\alpha}$. Если $|x-\sigma| > |\sigma - a|$, то используем вторую оценку (3.5)

$$|I_3| \leq ch \int\limits_{|x-\sigma|>2h} \frac{\omega(\psi, |\sigma - a|)}{|\sigma - a|^{\mu}|x-\sigma|^{n+\operatorname{Re}\alpha-\mu}} \ln^{\nu} \frac{m}{|x-\sigma|} d\sigma,$$

откуда при $|x-\sigma| > |\sigma - a| > 2h$ находим, как и выше, $|I_3| \leq c \ln^{\nu} \frac{m}{h} \omega(\psi, h) h^{-\operatorname{Re}\alpha}$. Если же $|x-\sigma| > 2h > |\sigma - a|$, то оценка I_3 подобна I_1 из (3.13). Собирая полученные оценки, с учетом (1.15) получаем (3.10), (3.11).

Рассмотрим теперь оценку I_3 в случае $0 < \mu \leq 1$. Имеем неравенство (3.7), где вновь следует заменить α на $-\alpha$. Используя (3.7), получаем при $|x-\sigma| \leq |\sigma - a|$

$$|I_3| \leq c \ln^{\nu} \frac{m}{h} h^{\mu} \int\limits_{|x-\sigma|>2h} \frac{\omega(\psi, |x-\sigma|)}{|x-\sigma|^{\mu+n-1+\operatorname{Re}\alpha}} d\sigma \leq ch^{\mu} \ln^{\nu} \frac{m}{h} \int\limits_h^2 \frac{\omega(\psi, u)}{u^{1+\mu+\operatorname{Re}\alpha}} du.$$

При $|x-\sigma| > |\sigma - a| > 2h$ оценка аналогична. Наконец, при $|x-\sigma| > 2h > |\sigma - a|$ получаем

$$|I_3| \le ch^{2-n+\operatorname{Re}\alpha} \ln^\nu \frac{m}{h} \int\limits_{|\sigma-a|<2h} \frac{\omega(\psi, |\sigma-a|)}{|\sigma-a|} d\sigma \le ch^{-\operatorname{Re}\alpha} \omega(\psi, h) \ln^\nu \frac{m}{h}.$$

Объединение полученных оценок завершает доказательство. □

2^0. Весовые оценки типа Зигмунда для $D^{i\theta,\nu}$, $\theta \in R^1 \setminus \{0\}$.

Теорема 3.3. *Пусть $\rho(x) = |x-a|^\mu$, $0 < \mu < n$, $\eta = \min(1,\mu)$ и $\nu \ge 0$. Если $(\rho f)(x) \in C(S_{n-1})$ и $(\rho f)(a) = 0$, то для $D^{i\theta,\nu}$, $\theta \in R^1 \setminus \{0\}$, справедлива оценка*

$$\omega(\rho D^{i\theta,\nu} f, h) \le c\left\{ \int_0^h \frac{\omega(\rho f, u)}{u} \ln^\nu \frac{m}{u} du + ch^\eta \ln^\nu \frac{m}{h} \int_h^2 \frac{\omega(\rho f, u)}{u^{1+\eta}} du \right\}$$

при $0 < \mu < n-1$ и

$$\omega(\rho D^{i\theta,\nu} f, h) \le c\left\{ h^{\mu+1-n} \int_0^h \frac{\omega(\rho f, u)}{u^{\mu+2-n}} \ln^\nu \frac{m}{u} du + h \ln^\nu \frac{m}{h} \int_h^2 \frac{\omega(\rho f, u)}{u^2} du \right\}$$

при $n-1 \le \mu < n$. Кроме того, в условиях теоремы $(\rho D^{i\theta,\nu} f)(a) = 0$.

4. Теоремы о действии операторов $K^{\alpha,\nu}$ и $D^{\alpha,\nu}$

На основе оценок типа Зигмунда, полученных выше, выясним действие $K^{\alpha,\nu}$, $D^{\alpha,\nu}$ при $0 < \operatorname{Re}\alpha < 1$ и $D^{i\theta,\nu}$ $\forall \theta \in R^1 \setminus \{0\}$ в обобщенных пространствах Гёльдера. Обозначим

$$\omega_{\alpha,\nu}(t) = \omega(t) t^{\operatorname{Re}\alpha} \ln^\nu \frac{m}{t}, \quad \omega_{-\alpha,\nu}(t) = \omega(t) t^{-\operatorname{Re}\alpha} \ln^\nu \frac{m}{t}.$$

Теорема 4.1. *Пусть $0 < \operatorname{Re}\alpha < 1$, $\nu \in R^1$. Если $\omega(t) \in \Phi_{1-\operatorname{Re}\alpha}$, то оператор $K^{\alpha,\nu}$ ограничен из $H^\omega(S_{n-1})$ в $H^{\omega_{\alpha,\nu}}(S_{n-1})$. Если $\omega(t) \in \Phi^{\operatorname{Re}\alpha}$, то оператор $D^{\alpha,\nu}$ ограничен из $H^\omega(S_{n-1})$ в $H^{\omega_{-\alpha,\nu}}(S_{n-1})$.*

Теорема 4.1 доказывается по той же схеме, что и теорема 4.2.

Теорема 4.2. *Пусть $0 < \operatorname{Re}\alpha < 1$, $\nu \in R^1$ и $\omega(t) \in \Phi_{\min(1,\mu)-\operatorname{Re}\alpha}$, если $\operatorname{Re}\alpha < \mu < n-1$, либо $\omega(t) \in \Phi^{\mu+1-n}_{1-\operatorname{Re}\alpha}$, если $n-1 \le \mu < n - \operatorname{Re}\alpha$. Тогда оператор $K^{\alpha,\nu}$ ограничен из $H^\omega_0(S_{n-1},\rho)$ в $H^{\omega_{\alpha,\nu}}_0(S_{n-1},\rho)$.*

Доказательство. В силу теоремы 3.1 при $\operatorname{Re}\alpha < \mu < n-1$ имеем

$$\omega(\rho K^{\alpha,\nu} f, h) \le ch^\eta \ln^\nu \frac{m}{h} \int_h^2 \frac{\omega(\rho f, u)}{u^{1+\eta-\operatorname{Re}\alpha}} du,$$

где $\eta = \min(1,\mu)$. Так как $f \in H^\omega_0(S_{n-1},\rho)$, $\omega \in \Phi_{\eta-\operatorname{Re}\alpha}$, то

$$\omega(\rho K^{\alpha,\nu} f, h) \le ch^{\operatorname{Re}\alpha} \omega(h) \ln^\nu \frac{m}{h} \|\rho f\|_{H^\omega_0(S_{n-1})},$$

что и требовалось. □

Подобные утверждения можно получить и для других значений μ. Перейдем теперь к оператору $D^{\alpha,\nu}$.

Теорема 4.3. *Пусть $0 < \operatorname{Re}\alpha < 1$, $\nu \in R^1$ и $\omega(t) \in \Phi^{\operatorname{Re}\alpha}_{\min(1,\mu)+\operatorname{Re}\alpha}$, если $0 < \mu < n-1+\operatorname{Re}\alpha$, либо $\omega(t) \in \Phi^{\mu+1-n}$, если $n-1+\operatorname{Re}\alpha \le \mu < n$. Тогда оператор $D^{\alpha,\nu}$ ограничен из $H^\omega_0(S_{n-1},\rho)$ в $H^{\omega_{-\alpha,\nu}}_0(S_{n-1},\rho)$.*

Доказательство аналогично приводимому ниже доказательству теоремы 4.4 для чисто мнимого случая.

Теорема 4.4. *Пусть $\omega \in \Phi^{\max(0,\mu-n+1)}_{\min(1,\mu)}$, $0 < \mu < n$, $\nu \ge 0$. Оператор $D^{i\theta,\nu}$ $\forall\theta \in R^1 \setminus \{0\}$ ограничен в $H^\omega_0(S_{n-1},\rho)$.*

Доказательство. В силу теоремы 3.3 при $\mu < n-1$ имеем

$$\omega(\rho D^{i\theta,\nu} f, h) \le c\Big\{ \int_0^h \frac{\omega(\rho f,t)}{t} \ln^\nu \frac{m}{t} dt + h^\eta \ln^\nu \frac{m}{h} \int_h^2 \frac{\omega(\rho f,t)}{t^{1+\eta}} dt \Big\}.$$

В силу того, что $f \in H_0^\omega(S_{n-1},\rho)$, $\omega \in \Phi_\eta^0$, с учетом леммы 1.4 получим

$$\frac{\omega(\rho D^{i\theta,\nu} f, h)}{\omega(h)\ln^\nu \frac{m}{h}} \le \frac{c\|\rho f\|_{H_0^\omega(S_{n-1})}}{\omega(h)\ln^\nu \frac{m}{h}} \Big\{ \int_0^h \frac{\omega(t)}{t} \ln^\nu \frac{m}{t} dt + \ln^\nu \frac{m}{h} \int_h^2 \left(\frac{h}{t}\right)^\eta \frac{\omega(t)}{t} dt \Big\},$$

откуда следует $\|D^{i\theta,\nu} f\|_{H_0^\omega(S_{n-1},\rho)} \le c\|f\|_{H_0^\omega(S_{n-1},\rho)}$.

В заключение отметим, что в случае обычной гёльдеровской характеристики $\omega(t) = t^\lambda$ можно показать, что для действия оператора $K^{\alpha,\nu}$, $0 < \alpha, \lambda, \lambda+\alpha < 1$ в условиях теоремы 4.2 необходимо и достаточно, чтобы показатель веса $\rho(x) = |x-a|^\mu$, $0 < \mu < n-\alpha$, удовлетворял условиям

$$\max(0, \mu - n + 1) < \lambda < \min(1, \mu) - \alpha. \tag{4.1}$$

Достаточная часть следует из оценки Зигмунда, если положить $\omega(t) = t^\lambda$ в теореме 4.2. Для доказательства необходимости рассмотрим два случая. Пусть вначале от противного $0 < \lambda \le \mu - n + 1$. Тогда для $f(\sigma) = |\sigma - a|^{\lambda-\mu} \in H_0^\lambda(S_{n-1},\rho)$ имеем

$$(\rho K^{\alpha,\nu} f)(x) = |x-a|^\mu \int\limits_{S_{n-1}} \frac{|\sigma-a|^{\lambda-\mu} \ln^\nu \frac{m}{|x-\sigma|}}{|x-\sigma|^{n-1-\alpha}} d\sigma = \infty$$

для всех $x \in S_{n-1}$, т. к. $\mu - \lambda \ge n-1$. Пусть теперь от противного $\mu - \alpha \le \lambda < 1$. Положим, как и выше, $f(\sigma) = |\sigma - a|^{\lambda-\mu} \in H_0^\lambda(S_{n-1},\rho)$. Тогда в силу $(\rho K^{\alpha,\nu} f)(a) = 0$ должно быть

$$c|x-a|^{\lambda+\alpha} \ln^\nu \frac{m}{|x-a|} \ge |(\rho K^{\alpha,\nu} f)(x)| \ge c_1 |x-a|^\mu \ln^\nu \frac{m}{|x-a|},$$

что невозможно. Учтено второе утверждение леммы 1.5 для чисел $\xi = \mu - \lambda$ и $\eta = n-1-\alpha$. $\square$

Отметим еще, что условия (4.1) естественно записать в виде условий на показатель веса. В таком случае они принимают вид $\lambda + \alpha < \mu < \lambda + n - 1$ и обращаются в известные условия для веса во внутренних точках отрезка при рассмотрении дробных интегралов.

Литература

1. Вакулов Б.Г. *Операторы типа потенциала на сфере в обобщенных пространствах Гёльдера.* – Ростовск. гос. ун-т, Ростов, 1986. – 31 с. – Деп. в ВИНИТИ 6.03.86, № 1553-В.
2. Вакулов Б.Г. *Операторы типа потенциала в обобщенных классах Гёльдера* // Изв. вузов. Математика. – 1986. – № 11. – С. 66–69.
3. Вакулов Б.Г. *Сферические операторы типа потенциала в обобщенных пространствах Гёльдера с весом на сфере* // Изв. вузов. Сев.-Кавк. Регион. Естеств. науки. – 1999. – № 4. – С. 5–10.
4. Самко С.Г. *Сингулярные интегралы по сфере и построение характеристики по символу* // Изв. вузов. Математика. – 1983. – № 4. – С. 28–42.
5. Самко С.Г. *Гиперсингулярные интегралы и их приложения.* – Ростов-на-Дону: Изд-во РГУ, 1984. – 208 с.
6. Павлов П.М., Самко С.Г. *Описание пространств $L_p^\alpha(S_{n-1})$ в терминах гиперсингулярных интегралов* // ДАН СССР. – 1984. – Т. 276. – № 3. – С. 546–550.
7. Вакулов Б.Г., Карапетянц Н.К., Шанкишвили Л.Д. *Сферические потенциалы комплексного порядка в обобщенных пространствах Гёльдера с весом* // Докл. РАН. – 2002. – Т. 382. – № 3. – С. 1–4.
8. Vakulov B.G., Karapetiants N.K., Shankishvili L.D. *Spherical hypersingular operators of imaginary order and their multipliers* // Frac. Calculus and Apll. Anal. – 2001. – V. 4. – № 1. – P. 101–112.

9. Килбас А.А. *Степенно-логарифмические интегралы в пространствах гёльдеровских функций* // Изв. АН БССР. Сер. физ.-матем. наук. – 1975. – № 1. – С. 37–43.
10. Килбас А.А. *Операторы типа потенциала со степенно-логарифмическими ядрами в пространствах Гёльдера с весом* // Изв. АН БССР. Сер. физ.-матем. наук. – 1978. – № 2. – С. 29–37.
11. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.* – Минск: Навука і тэхніка, 1987. – 688 с.
12. Kilbas A.A., Saigo M., Bubakar S. *Sygmund type estimates and mapping properties of operators with power–logarithmic kernels in generalized Hölder spaces* // Math. Japonica. – 1994. – V. 40. – № 3. – P. 473–485.
13. Samko S.G., Mussalaeva Z.U. *Fractional type operators in weighted generalized Hölder spaces* // Proc. Georgian Acad. Sci. Math. – 1993. – V. 1. – № 5. – P. 601–626.
14. Карапетянц Н.К., Муссалаева З.У. *О разрешимости интегрального уравнения дробного порядка в обобщенных гёльдеровских пространствах* // Дифференц. уравнения. – 1996. – Т. 32. – № 8. – С. 1102–1109.
15. Вакулов Б.Г., Шанкишвили Л.Д. *Операторы со степенно-логарифмическим ядром в обобщенных пространствах Гёльдера.* – Ростовск. гос. ун-т, Ростов, 1999. – 28 с. – Деп. в ВИНИТИ 17.03.99, № 819-В99.
16. Samko S.G., Vakulov B.G. *On equivalent norms in fractional order functions on a sphere* // Frac. Calculus and Apll. Anal. – 2000. – V. 3. – № 4. – P. 401–433.
17. Samko S. *Hypersingular integrals and their applications.* International series "Analytic methods and special functions". – London, New York: Taylor and Francis. – 2002. – V. 5. – 378 p.
18. Бари Н.К., Стечкин С.Б. *Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций* // Тр. Моск. матем. о-ва. – 1956. – № 5. – С. 485–522.
19. Гусейнов А.И., Мухтаров Х.Ш. *Введение в теорию нелинейных сингулярных интегральных уравнений.* – М.: Наука, 1980.– 415 с.
20. Самко С.Г., Мурдаев Х.М. *Весовые оценки Зигмунда для гиперсингулярных интегралов* // Тр. МИАН СССР. – 1987. – Т. 180. – С. 197–198.
21. Karapetiants N.K., Shankishvili L.D. *A short proof of Hardy–Littlewood type theorem for fractional integrals in Hölder spaces* // Fract. Calc. and Appl. Anal. – 1999. – V. 2. – № 2. – P. 177–192.
22. Карапетянц Н.К., Шанкишвили Л.Д. *Дробные интегралы мнимого порядка в пространствах Гёльдера с весом* // Докл. РАН. – 1999. – Т. 364. – № 6. – С. 738–740.

Ростовский государственный университет

Поступила
19.03.2002