ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1997 МАТЕМАТИКА № 10 (425)

УДК 515.164.17

О.В. КУНАКОВСКАЯ

О ГЛАДКИХ РАЗБИЕНИЯХ ЕДИНИЦЫ НА БАНАХОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

Как известно ([1]–[3]), существуют банаховы пространства, на которых невозможно построить гладкое разбиение единицы. Так, например, $C_{[0,1]}$ не обладает C^1-разбиением единицы; L^p и l^p, где $p \geq 1$ и не является четным числом, не обладают C^r-разбиением единицы для $r > p$. В данной статье выделен класс банаховых многообразий (в частности, банаховых пространств), которые допускают C^r-разбиение единицы ($r \geq 2$) специального типа. Практическая необходимость в построении таких специальных разбиений единицы возникла у автора при попытке перенести на банаховы пространства теорию Ю.Г. Борисовича и автора (см. [4], [5]) краевых индексов множеств обобщенных собственных векторов пары нелинейных операторов в гильбертовом пространстве. Известная теорема Иллса–Ленга [6] о существовании C^r-разбиения единицы для хаусдорфова паракомпактного C^r-многообразия, где $r \geq 1$, моделированного сепарабельным гильбертовым пространством, здесь получена как следствие более общей теоремы. Терминология стандартна (см. [6]–[9]). Часть результатов анонсирована в [10]–[13].

1. SC^r-функции на банаховых многообразиях

Пусть E — вещественное банахово пространство, U — открытое множество в E. Напомним, что вещественная функция $f : E \to \mathbf{R}$ класса C^2 называется фредгольмовым функционалом [14], если производное отображение $Df : E \to E^*$ является фредгольмовым. Введем несколько более широкое понятие.

Определение 1.1. Вещественную функцию $f : U \to \mathbf{R}$ класса C^r, где $r \geq 2$, будем называть *фредгольмовой C^r-функцией* (*или ΦC^r-функцией*), если производное отображение $Df : U \to E^*$ является фредгольмовым.

Через $\Phi C^r(U)$ обозначим класс всех ΦC^r-функций на U.

Определение 1.2. Функцию $g : U \to \mathbf{R}$ класса C^r, $r \geq 2$, будем называть *элементарной SC^r-функцией* (или, короче, *SC^r_e-функцией*), если она C^∞-гладко зависит от некоторого конечного числа ΦC^r-функций $f_1, \dots, f_k : U \to \mathbf{R}$, т. е. если существует такое открытое в $\mathbf{R}^k$ множество W, что $W \supset F(U)$, где $F = (f_1, \dots, f_k)$, а также C^∞-функция $\varphi : W \to \mathbf{R}$ такая, что $g = \varphi \circ F$.

Обозначим через $SC^r_e(U)$ ассоциативную коммутативную алгебру над $\mathbf{R}$ всех SC^r_e-функций на U. $SC^r_e(U)$ является подалгеброй алгебры $C^r(U)$ всех C^r-функций на U и содержит подалгебру констант на U. Кроме того,

$$\Phi C^r(U) \subset SC^r_e(U). \tag{1}$$

Легко видеть, что следующие три утверждения эквивалентны: 1) $\Phi C^r(U) \neq \emptyset$; 2) $SC^r(U) \neq \emptyset$; 3) любая постоянная функция на U является SC^r_e-функцией. Поэтому если для данного открытого подмножества U в банаховом пространстве E выполнено одно из этих трех условий, то (1) — строгое включение.

Определение 1.3. Банахово пространство E будем называть *SC^r-гладким*, если существует SC_e^r-функция $g : E \to \mathbf{R}$, $r \geq 2$, с ограниченным непустым носителем.

Теорема 1.1. *Банахово пространство E такое, что для некоторого $r \geq 2$ $SC^r(E) \neq \emptyset$, является SC^r-гладким тогда и только тогда, когда топология в E, порожденная нормой, совпадает с топологией, индуцированной в E SC_e^r-гладкими функциями.*

Доказательство. Пусть E является SC^r-гладким пространством при некотором $r \geq 2$, т.е. существует SC_e^r-функция g на E с ограниченным непустым носителем. Покажем, что любое открытое множество U в E открыто в топологии, индуцированной на E SC_e^r-функциями. Действительно, компонируя g с гомотетией и трансляцией, для любой точки $x_0 \in U$ можно построить SC_e^r-функцию g_{x_0} такую, что $x_0 \in \{x : g_0(x) \neq 0\} \subset U$. Из этого следует, что U открыто в топологии, порождаемой SC_e^r-функциями. Из непрерывности SC_e^r-функции следует, что каждое множество, открытое в индуцированной топологии, открыто в топологии, индуцированной нормой.

Обратно, пусть для $r \geq 2$ $SC_e^r(E) \neq \emptyset$ и эти топологии совпадают. Тогда для любой точки x_0 открытого единичного шара B_1 в E найдутся SC_e^r-функции $g_1, \ldots, g_k$ такие, что $x_0 \in \cap g_i^{-1}((\alpha_i, \beta_i)) \subset B_1$. Выберем $\varphi \in C^\infty(\mathbf{R}^k, \mathbf{R})$ так, чтобы $\varphi(t_1, \ldots, t_k) > 0$, если $\alpha_i < t < \beta_i$, и $\varphi(t_1, \ldots, t_k) = 0$ в противном случае. Тогда $g = \varphi \circ (g_1, \ldots, g_k)$ есть SC_e^r-функция, $\{x : g(x) \neq 0\} \neq \emptyset$ и содержится в открытом единичном шаре. По определению это означает, что E есть SC^r-гладкое пространство. □

Определение 1.4. Банахово пространство E будем называть *SC^r-ограниченным*, если существует такая SC_e^r-функция $g : E \to \mathbf{R}$, $r \geq 2$, и такие $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, что $g^{-1}([a, b])$ ограничено и непусто. Если существует фредгольмова C^r-функция g с этим свойством, то пространство E будем называть *ΦC^r-ограниченным.*

Сформулируем признак SC^r-гладкости банаховых пространств.

Теорема 1.2. *Все SC^r-ограниченные (в частности, ΦC^r-ограниченные) банаховы пространства являются SC^r-гладкими (а значит, и C^r-гладкими).*

Доказательство. Пусть $g : E \to \mathbf{R}$ — SC_e^r-функция на E и пусть для некоторых $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, $g^{-1}([a, b])$ — ограниченное непустое множество. Выберем нетривиальную C^∞-функцию $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ с носителем, лежащим в $[a, b]$. Тогда $h = \varphi \circ g$ — искомая SC_e^r-функция с ограниченным непустым носителем. □

Примеры. Пусть $K : H \to H$ — линейный вполне непрерывный самосопряженный оператор на сепарабельном гильбертовом пространстве H со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Обозначим через $\mathbf{1}_H$ тождественное отображение на H. Функция $f_K : H \to \mathbf{R} : x \mapsto \langle (\mathbf{1}_H + K)x, x \rangle$ является ΦC^∞-функцией на H. Выбрав некоторую постоянную функцию $\varphi : \mathbf{R} \to \{\alpha\}$, $\alpha \in \mathbf{R}$, построим SC_e^∞-функцию $g = \varphi \circ f_K$ на H, не являющуюся фредгольмовой. Функция $g_K = f_K - f_0$, $g_K(x) = \langle Kx, x \rangle$ является непостоянной SC_e^∞-функцией (если $K \neq 0$) и не является ΦC^∞-функцией. Из этих примеров, в частности, следует, что сепарабельное гильбертово пространство является ΦC^∞-ограниченным, а следовательно, SC^∞-гладким. Кроме того, из результатов [1]–[3] следует, что $C_{[0,1]}$ не является ΦC^r- и SC^r-ограниченным и SC^r-гладким для $r \geq 1$ и L^p и l^p для $p \neq 2, 4, 6, \ldots$ не являются ΦC^r- и SC^r-ограниченными и SC^r-гладкими для $r \geq 1$, $r > p$.

Кажется правдоподобным, что с помощью теоремы 1.2 можно расширить список C^r-гладких пространств.

2. SC^r-многообразия

Обозначим через $F^* : C^r(V) \to C^r(U)$ изоморфизм алгебр C^r-функций, соответствующий некоторому C^r-диффеоморфизму $F : U \to V$ подмножеств U и V банахова пространства E и определяемый равенством $F^*(f) = f \circ F$.

Определение 2.1. C^r-диффеоморфизм $F : U \to V$, $r \geq 2$, открытых подмножеств банахова пространства E будем называть ΦC^r-*диффеоморфизмом* (соответственно SC^r-*диффеоморфизмом*), если $(F|_{U'})^*(\Phi C^r(V')) = \Phi C^r(U')$ (соответственно $F^*|_{SC_e^r(V')}$ есть изоморфизм алгебр $SC_e^r(V')$ и $SC_e^r(U')$) для любых непустых открытых множеств $U' \subset U$, $V' \subset V$ таких, что $F(U') = V'$.

Определение 2.2. Пусть X — банахово C^r-многообразие с фиксированной C^r-структурой. Атлас данной C^r-структуры на X будем называть ΦC^r-*атласом* (соответственно SC^r-*атласом*), если для любой пары карт (U_i, φ_i), (U_j, φ_j) этого атласа с условием $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ отображение $\varphi_{ij} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \to \varphi_i(U_i \cap U_j)$, $\varphi_{ij} = \varphi_i|_{U_i \cap U_j} \circ \varphi_j^{-1}|_{\varphi_j(U_i \cap U_j)}$ является ΦC^r-диффеоморфизмом (соответственно SC^r-диффеоморфизмом). Если банахово C^r-многообразие X обладает ΦC^r-атласом (соответственно SC^r-атласом), то X будем называть ΦC^r-*многообразием* (соответственно SC^r-*многообразием*). Будем говорить, что карта (U, φ) данной C^r-структуры на ΦC^r-многообразии (соответственно SC^r-многообразии) X *совместима* с его ΦC^r-атласом (соответственно SC^r-атласом) $\{(U_i, \varphi_i)\}$, если каждое отображение $\varphi_i|_{U_i \cap U} \circ \varphi^{-1}|_{\varphi(U_i \cap U)}$ при $U_i \cap U \neq \emptyset$ является ΦC^r-диффеоморфизмом (соответственно SC^r-диффеоморфизмом). Максимальный ΦC^r-атлас Φ на ΦC^r-многообразии (соответственно SC^r-атлас S на SC^r-многообразии) X будем называть ΦC^r-*структурой* (соответственно SC^r-*структурой*) на X. Многообразие X с фиксированной ΦC^r-структурой Φ (соответственно SC^r-структурой S) будем в дальнейшем обозначать через (X, Φ) (соответственно через (X, S)).

Очевидно, каждый ΦC^r-диффеоморфизм является SC^r-диффеоморфизмом. Следовательно, каждая ΦC^r-структура является SC^r-структурой. Неясно, верно ли обратное.

Любое банахово пространство E является ΦC^r- и SC^r-многообразием для любого $2 \leq r \leq \infty$, тривиальные ΦC^r- и SC^r-структуры которого порождаются тождественным отображением. Естественно, имеет смысл рассматривать такие структуры при условии $\Phi C^r(E) \neq \emptyset$.

Легко видеть, что любое открытое подмножество ΦC^r-многообразия (соответственно SC^r-многообразия) является ΦC^r-многообразием (соответственно SC^r-многообразием).

Теорема 2.1. *Пусть C^r-многообразие Y C^r-диффеоморфно ΦC^r-многообразию (X, Φ) (соответственно SC^r-многообразию (X, S)). Тогда этот C^r-диффеоморфизм индуцирует на Y ΦC^r-структуру (соответственно SC^r-структуру).*

Доказательство. Пусть $F : Y \to X$ — ΦC^r-диффеоморфизм (или SC^r-диффеоморфизм). Если $\{(V_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ — ΦC^r-атлас (соответственно SC^r-атлас) на X, то $\{(U_\alpha = F^{-1}(V_\alpha),\ \varphi_\alpha = \psi_\alpha \circ F|_{U_\alpha})\}_{\alpha \in A}$ — ΦC^r-атлас (соответственно SC^r-атлас) на Y. Действительно, система $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ является, как легко видеть, атласом, принадлежащим данной C^r-структуре на Y. Чтобы показать, что $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ есть ΦC^r-атлас (соответственно SC^r-атлас) на Y, выберем $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, (U_β, φ_β) — две карты указанного атласа на Y такие, что $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$. Если $\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta} \circ \varphi_\beta^{-1}|_{\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$, то выберем открытое множество U' в $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) = \psi_\beta(V_\alpha \cap V_\beta)$ и открытое множество V' в $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) = \psi_\alpha(V_\alpha \cap V_\beta)$ такие, что $\varphi_{\alpha\beta}(U') = V'$, и функцию $f \in \Phi C^r(V')$ (соответственно $f \in SC^r(V')$). Тогда

$$\varphi_{\alpha\beta}^*(f) = f \circ (\varphi_{\alpha\beta})|_{U'} = f \circ (\varphi_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta} \circ \varphi_\beta^{-1}|_{\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)})|_{U'} = f \circ (\psi_\alpha|_{V_\alpha \cap V_\beta} \circ \psi_\beta^{-1}|_{\psi_\beta(V_\alpha \cap V_\beta)})|_{U'}.$$

Отсюда $\varphi^*_{\alpha\beta}(f) \in \Phi C^r(U')$ (соответственно $\varphi^*_{\alpha\beta}(f) \in SC^r(U')$). В силу равноправности карт $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ и (U_β, φ_β) получаем $\varphi^*_{\alpha\beta}(\Phi C^r(V')) = \Phi C^r(U')$ (соответственно $\varphi^*_{\alpha\beta}(SC^r_e(V')) = SC^r_e(U')$), откуда следует, что $\varphi^*_{\alpha\beta}$ является изоморфизмом алгебр $SC^r_e(V')$ и $SC^r_e(U')$. $\square$

Известна теорема Дж. Иллса и К.Д. Элворти ([15]), что параллелизуемое сепарабельное метризуемое C^∞-многообразие, моделируемое C^∞-гладким банаховым пространством E, обладающим базисом Шаудера, C^∞-диффеоморфно открытому подмножеству в E. Отсюда и из теоремы 2.1 получаем

Следствие 2.1. Параллелизуемое сепарабельное метризуемое C^∞-многообразие, моделируемое C^∞-гладким банаховым пространством, обладающим базисом Шаудера, является ΦC^r- и SC^r-многообразием для любого $2 \le r \le \infty$.

Следствие 2.2. Каждое сепарабельное метризуемое C^r-многообразие, $r \ge 1$, моделируемое сепарабельным гильбертовым пространством, является ΦC^p- и SC^p-многообразием для $2 \le p \le \infty$.

Теорема 2.2. *Пусть $T : U \to V$ — C^r-отображение, $r \ge 2$, открытых подмножеств U и V банахова пространства E вида $T = \mathbf{1}_H + K$, где $K : U \to V$ — C^r-отображение с локально конечномерным образом. Пусть, кроме того, для любого $x \in U$ $\dim \operatorname{Im} D^2T(x) < \infty$. Тогда для любой ΦC^r-функции $f : V \to \mathbf{R}$ функция $f|_{T(U)} \circ T$ принадлежит $\Phi C^r(U)$.*

Доказательство. Обозначим через C нелинейное отображение $E^* \times L(E,E) \to E^*$, действующее по правилу

$$C(l, A) = l \circ A. \tag{2}$$

Тогда $D(f \circ T) = C \circ ((Df \circ T) \times (DT)) \circ \Delta_2$, где $\Delta_2 : E \to E \times E$ — диагональное вложение. Пусть $C_l : L(E,E) \to E^*$ — линейное отображение, действующее по правилу $C_l(A) = l \circ A$ для каждого фиксированного $l \in E^*$, а $\pi_1 : E^* \times L(E,E) \to E^*$, $\pi_2 : E^* \times L(E,E) \to L(E,E)$ — проекции на сомножители. В таком случае можно записать

$$D(C)(l, A) = C_l \circ \pi - 2 + A^* \circ \pi_1 \tag{3}$$

для произвольного $(l, A) \in E^* \times L(E,E)$. Используя (2) и (3), получаем

$$D^2(f \circ T)(x) = (C_{Df(T(x))} \circ \pi_2 + (DT(x))^* \circ \pi_1) \circ ((D^2 f(T(x)) \circ DT(x)) \times D^2T(x)) \circ \Delta_2.$$

Тогда линейный оператор $D^2(f \circ T)(x) : E \to E^*$ можно записать в виде суммы

$$D^2(f \circ T)(x) = D_1(x) + D_2(x), \tag{4}$$

где

$$D_1(x)h = Df(T(x)) \circ (D^2T(x)h),$$
$$D_2(x)h = ((DT(x))^* \circ D^2 f(T(x)) \circ DT(x))h$$

для $h \in E$.

Очевидно, $D_2(x)$ есть линейный фредгольмов оператор. Легко проверить, что из условия $\dim \operatorname{Im} D^2T(x) < \infty$ для любого $x \in U$ следует, что оператор $D_1(x) : E \to E^*$ имеет образ, лежащий в конечномерном подпространстве в E^*. В силу свойств класса фредгольмовых операторов и соотношения (4) этого достаточно для завершения доказательства. $\square$

Напомним (см. [16], [17], [9]), что банахово C^r-многообразие X с моделью E называется многообразием с L-структурой, если на X существует такой атлас данной C^r-структуры, что все отображения склейки представляют собой отображения вида $\mathbf{1}_E+K$, где K есть C^r-отображение с локально конечномерным образом. Пользуясь теоремой 2.2, получаем ниже естественный пример ΦC^r-многообразия.

Следствие 2.3. Пусть X есть C^r-многообразие с L-структурой, $r \geq 2$. Тогда C^r-атлас многообразия X, задающий L-структуру, является ΦC^r-атласом, если для любой пары его карт (U_i, φ_i), (U_j, φ_j) с условием $U_i \cap U_i \neq \emptyset$ отображение склейки $T = \varphi_i | U_i \cap U_j \circ \varphi_j^{-1} | \varphi_j(U_i \cap U_j)$ таково, что $\dim \operatorname{Im} D^2T(x) < \infty$ для любого $x \in \varphi_j(U_i \cap U_j)$. В этом случае X, конечно, является ΦC^r-многообразием.

3. SC^r-функции на SC^r-многообразии

Определение 3.1. Вещественную C^r-функцию f на SC^r-многообразии (X, S) будем называть *SC^r-функцией*, если хотя бы в одном (а значит, и в любом) атласе структуры S у каждой точки $x \in X$ существует такая открытая окрестность V_x, что $V_x \subset U_x$ для некоторой карты (U_x, φ_x) выбранного атласа и $f|_{V_x} \circ \varphi_x^{-1}|_{\varphi_x(V_x)}$ есть SC^r_e-функция на $\varphi_x(V_x)$.

Через $SC^r(X)$ будем обозначать ассоциативную коммутативную алгебру над $\mathbf{R}$ всех SC^r-функций на SC^r-многообразии (X, S) с $2 \leq r \leq \infty$. $SC^r(X)$ является подалгеброй алгебры $C^r(X)$ всех C^r-функций на X и содержит подалгебру констант на X.

Определение 3.2. Пусть (X, S) — SC^r-многообразие. Семейство функций $\{\varphi_\alpha\} \subset SC^r(X)$ будем называть *SC^r-разбиением единицы*, если каждая точка $x \in X$ обладает окрестностью, пересекающейся лишь с конечным числом носителей функций φ_α и если $\sum_\alpha \varphi_\alpha = 1$ для каждой точки $x \in X$. Будем говорить, что X *допускает SC^r-разбиение единицы*, если для любого открытого покрытия $\{V_\beta\}$ многообразия X существует SC^r-разбиение единицы $\{\varphi_\alpha\}$ такое, что носитель каждой функции φ_α содержится в некотором множестве V_β.

Пусть $C^0(X, \mathbf{R})$ — пространство непрерывных вещественных функций на X, наделенное тонкой топологией, задаваемой фундаментальной системой окрестностей $\{U_p(f)\}$ каждой функции $f \in C^0(X, \mathbf{R})$, где каждая окрестность $U_p(f) = \{g \in C^0(X, \mathbf{R}) \mid \forall x \in X |f(x) - g(x)| < p(x)\}$ ассоциирована с положительной функцией $p \in C^0(X, \mathbf{R}_+)$, где $\mathbf{R}_+ = \{t \in \mathbf{R} \mid t > 0\}$.

Теорема 3.1. *Пусть (X, S) — хаусдорфово SC^r-многообразие со счетной базой, моделированное SC^r-гладким банаховым пространством E, $r \geq 2$. Тогда*

а) *X допускает SC^r-разбиение единицы;*

б) *для произвольных $f \in C^0(X, \mathbf{R})$, $p \in C^0(X, \mathbf{R}_+)$ существует SC^r-функция g, аппроксимирующая f в C^0-тонкой топологии, т. е. $|g(x) - f(x)| < p(x)$ для всех $x \in X$;*

в) *если A и B — замкнутые непересекающиеся множества в X, то существует SC^r-функция $f : X \to [0, 1]$ такая, что $f = 0$ в некоторой окрестности A и $f = 1$ в некоторой окрестности B.*

Доказательство. а) В силу SC^r-гладкости E для любого открытого множества U в X и любой точки $x \in U$ существует SC^r-функция g на X, $g \geq 0$, $g(x) > 0$, такая, что $\mathcal{O}_x = \{y : g(y) > 0\} \subset U$. Поэтому $U = \bigcup\limits_{x \in U} \mathcal{O}_x$. Пусть $\{U_\alpha\}$ — открытое покрытие X. В силу сказанного существует измельчение покрытия $\{U_\alpha\}$, состоящее из множеств вида $\mathcal{O}_x$. Заметим, что хаусдорфово банахово многообразие X является регулярным пространством, а поскольку у X есть счетная база, то X паракомпактно. Так как каждый локально метризуемый паракомпакт метризуем, то X — финально компактное пространство. Выделим из указанного измельчения счетное подпокрытие

$$W_j = \{x : g_j(x) > 0,\ g_j \geq 0,\ g_j \in SC^r(X)\}.$$

Определим последовательность открытых множеств следующим образом:

$$\begin{aligned}
V_1 &= \{x : g_1(x) > 0\},\\
V_2 &= \{x : g_2(x) > 0,\ g_1(x) < \tfrac{1}{2}\},\\
V_3 &= \{x : g_3(x) > 0,\ g_1(x) < \tfrac{1}{3},\ g_2(x) < \tfrac{1}{3}\},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
V_{r+1} &= \{x : g_{r+1}(x) > 0,\ g_1(x) < \tfrac{1}{r}, \ldots, g_r(x) < \tfrac{1}{r}\},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Для каждого x найдется целое $n(x)$ такое, что $g_{n(x)} > 0$ и $g_j(x) = 0$ для $j < n(x)$. Тогда $x \in V_{n(x)}$ и $\{V_n\}$ — покрытие X. Выберем $\alpha(x)$ так, чтобы $0 < \alpha(x) < g_{n(x)}$. Пусть $V_x = \{y : g_{n(x)}(y) > \alpha(x)\}$. Тогда V_x есть окрестность точки x, не пересекающаяся с V_n для любого достаточно большого n. Выберем $\varphi_{r+1} \in C^\infty(\mathbf{R}^{n+1}, \mathbf{R})$ так, чтобы $\varphi_{r+1}(t_1, \ldots, t_{r+1}) > 0$ тогда и только тогда, когда $t_i < \frac{1}{r}$ для $i = 1, \ldots, r$, а $t_{r+1} > 0$. Тогда C^r-функция $h_{r+1} = \varphi_{r+1} \circ (g_1, \ldots, g_{r+1})$ является SC^r-функцией. Более того, $\{x : h_{r+1}(x) > 0\} = V_{r+1}$. Из этого следует, что для каждой точки x все h_i обращаются в нуль на V_x за исключением конечного их числа, и для каждого x $h_{n(x)} > 0$ (т. к. $x \in V_{n(x)}$). Функция $h = \sum h_i$ также является SC^r-функцией. Для каждого x $h|_{V_x} : V_x \to \mathbf{R}_+$, поэтому функция $h^{-1} = \left(\frac{1}{t}\right) \circ h$ является SC^r-функцией. Положим $\varphi_j = h^{-1} h_j$, тогда φ_j — также SC^r-функция. Таким образом, φ_j есть требуемое SC^r-разбиение единицы.

б) Сначала предположим, что U — открытое множество в X, $\varepsilon > 0$ и $f \in C^0(U, \mathbf{R})$. Выберем покрытие оси $\mathbf{R}$ открытыми интервалами длины ε. С помощью f это покрытие индуцирует открытое покрытие $\mathcal{O}$ на U. В силу а) существует SC^r-разбиение единицы $\{\varphi_i\}$, подчиненное $\mathcal{O}$. Без ограничения общности можно считать, что нет ни одной функции φ_i, тождественно равной нулю. Для каждого i выберем x_i в U так, чтобы $\varphi_i(x_i) > 0$. Тогда если $\varphi_i(x) > 0$, то $|f(x_i) - f(x)| < \varepsilon$. Заметим, что функция $g(x) = \sum \varphi_i(x) f(x_i)$ является SC^r-функцией на U. Тогда $|g(x) - f(x)| = \left|\sum \varphi_i(x) f(x_i) - \sum \varphi_i(x) f(x)\right| = \left|\sum \varphi_i(x)(f(x_i) - f(x))\right| \leq \sum \varphi_i(x)|f(x_i) - f(x)| < \varepsilon \sum \varphi_i(x) = \varepsilon$. В общем случае для каждого $x \in X$ существует открытая окрестность U_x точки x такая, что если $y \in U_x$, то $p(x)/2 < p(y)$. Найдем только что указанным способом SC^r-функцию g_x такую, что $|g_x(y) - f(y)| < p(x)/2 < p(y)$ для любого $y \in U_x$. Пусть $\{\varphi_k\}$ — SC^r-разбиение единицы с носителями $\operatorname{supp} \varphi_k$, лежащими в $U_{x(k)}$. Определим $g(y) = \sum \varphi_k(y) g_{x(k)}(y)$. Тогда g есть SC^r-функция и $|g(y) - f(y)| = \sum \varphi_k(y)|g_{x(k)}(y) - f(y)| < p(y)$ для любого $y \in X$.

в) Хаусдорфово банахово многообразие X является регулярным пространством, а регулярное пространство со счетной базой нормально. В силу леммы Урысона существует $g \in C^0(X, \mathbf{R})$ такая, что $g(x) = 0$ при $x \in A$ и $g(x) = 1$ при $x \in B$. Используя б), выберем SC^r-функцию h так, чтобы $|h(x) - g(x)| < 1/4$ для всех $x \in X$. Выберем $\varphi \in C^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, где $\varphi(t) = 0$ для $|t| < 1/3$, $\varphi(t) = 1$ для $2/3 \leq t \leq 4/3$ и $0 \leq \varphi(t) \leq 1$ для всех t. Тогда $f = \varphi \circ h$ есть искомая функция. □

Очевидно, условиям теоремы 3.1, в частности, удовлетворяет любое сепарабельное SC^r-гладкое банахово пространство.

Известно [17], [9], что если на C^r-многообразии с фредгольмовой структурой существует C^r-разбиение единицы, то эта структура допускает редукцию к L-структуре. Частичным обобщением этой теоремы является следующий результат, опирающийся на теорему 2.2.

Следствие 3.1. Если X — хаусдорфово C^r-многообразие со счетной базой, $r \geq 2$, обладающее L-структурой, и для любой пары карт (U_i, φ_i), (U_j, φ_j), где $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, некоторого атласа этой структуры $\dim \operatorname{Im} D^2(\varphi_i \mid U_i \cap U_j \circ \varphi_j^{-1} \mid (U_i \cap U_j))(x) < \infty$ для каждой точки $x \in \varphi_j(U_i \cap U_j)$, причем модельное банахово пространство является SC^r-гладким, то X допускает SC^r-разбиение единицы.

Теорема 3.2. *C^r-многообразие M, $r \geq 1$, являющееся паракомпактом и моделированное сепарабельным SC^p-гладким банаховым пространством, где $p \geq \max(2, r)$, допускает C^r-разбиение единицы.*

Доказательство. Под паракомпактом, как обычно, понимаем хаусдорфово паракомпактное топологическое пространство. Для любой точки $x \in M$ и произвольной ее окрестности $\mathcal{O}$ всегда можно найти такую карту (G, γ), что $G \subset \mathcal{O}$, $\gamma(G) = E$. Следовательно, для любого открытого покрытия многообразия M можно найти такой подчиненный ему атлас $(G_\alpha, \gamma_\alpha)_{\alpha \in A}$, что $\gamma_\alpha(G_\alpha) = E$. В силу паракомпактности можно найти локально конечное измельчение $\{U_\beta\}_{\beta \in B}$ покрытия $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$. Каждое U_β содержится в некотором $G_{\alpha(\beta)}$, поэтому положим $\varphi_\beta = \gamma_{\alpha(\beta)} |_{U_\beta}$. Построим такие открытые измельчения $\{V_\beta\}_{\beta \in B}$, $\{W_\beta\}_{\beta \in B}$ покрытия $\{U_\beta\}_{\beta \in B}$, что $\overline{W}_\beta \subset V_\beta \subset \overline{V}_\beta \in U_\beta$, тогда $\varphi_\beta(\overline{V}_\beta)$ и $\varphi_\beta(\overline{W}_\beta)$ замкнуты в E.

Теорема 3.2 в), примененная к случаю $X = E$ с тривиальной SC^p-структурой, позволяет построить SC^p-функции $\chi_\beta : E \to [0, 1]$, которые равны 1 в некоторой окрестности $\varphi_\beta(\overline{W}_\beta)$ и 0 в некоторой окрестности дополнения к $\varphi_\beta(V_\beta)$. Перенося каждую такую функцию посредством φ_β на M, получим C^r-функции $\psi_\beta : M \to [0, 1]$, каждая из которых равна 1 в окрестности $\overline{W}_\beta$ и 0 в окрестности дополнения к V_β. Положим $\psi = \sum \psi_\beta$. В силу локальной конечности сумма определена; кроме того, она ни в одной точке не обращается в нуль. Пусть $\theta_\beta = \psi_\beta / \psi$, тогда $\{\theta_\beta\}_{\beta \in B}$ — искомое C^r-разбиение единицы на M. $\square$

Поскольку сепарабельное гильбертово пространство является SC^∞-гладким, из теоремы 3.2 получаем следующий результат Иллса-Ленга, опубликованный в [6].

Следствие 3.2. C^r-многообразие M, $r \geq 1$, являющееся паракомпактом и моделированное сепарабельным гильбертовым пространством, допускает C^r-разбиение единицы.

Автор выражает глубокую благодарность за полезные обсуждения Ю.Г. Борисовичу и Ю.И. Сапронову.

Литература

1. Bonic R., Frampton J. *Smooth functions on Banach manifolds* // J. Math. Mech. – 1966. – V. 15. – № 5. – P. 877–898.
2. Bonic R., Frampton J. *Differentiable functions on certain Banach spaces* // Bull. Amer. Math. Soc. – 1965. – V. 71. – № 2. – P. 393–395.
3. Kurzweil J. *On approximation in real Banach spaces* // Studia Math. – 1954. – V. 14. – № 2. – P. 214–231.
4. Borisovich Yu.G., Kunakovskaya O.V. *Boundary indices of nonlinear operators and the problem of eigenvectors* // Methods and Appl. of Global Analysis. – Voronezh, Voronezh Univ. Press, 1993. – P. 39–44.
5. Борисович Ю.Г. *Топологические характеристики и фредгольмов анализ в нелинейных проблемах* // Изв. вузов. Математика. – 1994. – № 2. – С. 22–26.
6. Ленг С. *Введение в теорию дифференцируемых многообразий.* – М.: Мир, 1967. – 204 с.
7. Иллс Дж. *Основания глобального анализа* // УМН. – 1969. – Т. 24. – вып. 3. – С. 157–210.
8. Иллс Дж. *Фредгольмовы структуры* // УМН. – 1971. – Т. 26. – вып. 6. – С. 213–240.
9. Борисович Ю.Г., Звягин В.Г., Сапронов Ю.И. *Нелинейные фредгольмовы отображения и теория Лере–Шаудера* // УМН. – 1977. – Т. 32. – вып. 4. – С. 3–54.
10. Kunakovskaya O.V. *On the properties of the compositions of Fredholm functionals* // Abstr. of IX Intern. Conf. on Topology and its Appl. – Kiev, Academy of Sciences of Ukraine, 1992. – P. 92.

11. Кунаковская О.В. *О признаках C^r-гладкости банаховых пространств* // Тез. докл. Весенней воронежской матем. школы “Понтрягинские чтения–IV”. – Воронеж, 1993. – С. 116.
12. Kunakovskaya O.V. *On properties of some classes of smooth functions on Banach spaces and manifolds* // Methods and Appl. of Global Analysis. – Voronezh, Voronezh Univ. Press, 1993. – P. 81–93.
13. Кунаковская О.В. *О некоторых классах гладких функций на банаховых многообразиях.* – 1994. – 28 с. – Деп. в ВИНИТИ 11.04.94, № 864–В94.
14. Похожаев С.И. *О множестве критических значений функционалов* // Матем. сб. – 1968. – Т. 75. – № 1. – С. 106–111.
15. Eells J., Elworthy K.D. *Open embeddings of certain Banach manifolds* // Ann. of Math. – 1970. – V. 91. – № 3. – P. 465–485.
16. Elworthy K.D. *Fredholm maps and $GL_C(E)$-structures* // Bull. Amer. Math. Soc. – 1968. – V. 74. – P. 582–586.
17. Elworthy K.D., Tromba A.J. *Differential structures and Fredholm maps on Banach manifolds* // Proc. Sympos. Pure Math. – Providence, R. I., 1970. – V. 15. – P. 45–94.

Воронежский государственный университет

Поступила
13.03.1995