

УДК 528.2

## СОВРЕМЕННЫЙ ВЗГЛЯД НА ПРОБЛЕМУ ИЗУЧЕНИЯ ФИГУРЫ ЗЕМЛИ И ФИГУР ТЕЛ СОЛНЕЧНОЙ СИСТЕМЫ

*Р.А. Кащеев*

### Аннотация

В статье обсуждаются основные положения современной теории фигуры Земли. Показано, что благодаря развитию космической геодезии классические методы исследования фигуры Земли по результатам геодезических и гравиметрических измерений вытесняются спутниковыми методами. Высокая точность и оперативность получения спутниковой наблюдательной информации позволяют выявлять геодинамические изменения фигуры Земли и ее гравитационного поля со временем. Подчеркнуто, что спутниковые методы являются пригодными для изучения других тел Солнечной системы и в первую очередь для планет земной группы.

**Ключевые слова:** фигура Земли, геоид, спутниковые технологии, геодинамика.

---

Определение размеров и фигуры (формы) Земли уже на протяжении многих столетий рассматривается в качестве одной из наиболее фундаментальных задач естествознания. В наши дни развитие космических средств и технологий ее решения открывает новые возможности и перспективы изучения фигуры Земли, осуществления мониторинга ее изменений с течением времени, определения фигур других тел Солнечной системы.

Концептуально в качестве фигуры Земли (или иного небесного тела) могут быть выбраны следующие варианты.

1. **Геометрическая фигура**, ограниченная физической (топографической, гипсометрической) поверхностью Земли, включающей поверхность материков и поверхность Мирового океана. Эта поверхность чрезвычайно нерегулярна, плохо поддается математическому описанию, а также подвержена временным (темпоральным) изменениям.

С целью изучения глобальных особенностей геометрической фигуры и ее изменений вследствие природных и антропогенных процессов физическая поверхность может быть описана моделью, представляющей высоты рельефа над априорно выбранной поверхностью относимости (сферой, эллипсоидом вращения, трехосным эллипсоидом и т. д.) в виде ряда по сферическим функциям координат. Коэффициенты этого ряда вычисляются путем численного интегрирования значений высот рельефа точек физической поверхности, осредненных по элементарным площадкам.

2. **Гравитационная фигура**, ограниченная уровенной поверхностью потенциала силы тяжести (для Земли – поверхностью геоида), проходящей через

нуль-пункт счета высот нивелирной сети. С погрешностью, не превышающей метра, фигура планетарного геоида описывается поверхностью, на акватории Мирового океана совпадающей с невозмущенной поверхностью воды, а под материками проходящей перпендикулярно к направлениям отвесных линий. Фигура планетарного геоида отражает неоднородный характер распределения масс в недрах Земли, по сравнению с ее геометрической фигурой имеет значительно более сглаженную форму и также претерпевает изменения со временем.

Целесообразность изучения фигуры планетарного геоида и ее региональных и локальных фрагментов обоснована не только тем, что большая часть поверхности земного шара покрыта водой, но и тем, что значительная доля классических геодезических измерений связана с направлениями отвесных линий. В этой связи сразу же необходимо подчеркнуть, что «геодезия не является чисто геометрической наукой, поскольку поле земного тяготения вовлечено во многие геодезические измерения» [1, с. 179].

В большинстве случаев фигуру планетарного геоида принято описывать моделью, представляющей высоты (превышения) геоида над априорно выбранной **фигурой относимости** (сферой, эллипсоидом вращения, трехосным эллипсоидом и т. д.) в виде ряда по сферическим функциям координат точек ее поверхности, коэффициенты которого выражаются через безразмерные гармонические коэффициенты  $\{C_{nm}, S_{nm}\}$  разложения в ряд гравитационного потенциала:

$$V(\rho, \varphi, \lambda) = \frac{GM}{\rho} \left[ 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left( \frac{R}{\rho} \right)^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \varphi) \right], \quad (1)$$

где  $GM$  – произведение гравитационной постоянной на полную массу Земли;  $R$  – средний радиус Земли;  $P_{nm}(\sin \varphi)$  – присоединенная функция Лежандра степени  $n$  порядка  $m$ .

Напомним, что значения гармонических коэффициентов  $\{C_{nm}, S_{nm}\}$  определяются методами динамической космической геодезии по данным спутниковых наблюдений и наземных гравиметрических измерений.

3. С геофизической точки зрения наилучшей моделью первого приближения для описания внутреннего строения планеты и его темпоральных вариаций является **фигура гидростатического равновесия**, являющаяся одновременно поверхностью постоянной плотности, постоянного давления и постоянного потенциала силы тяжести. Для Земли фигура равновесия близка к эллипсоиду вращения и совпадает с ним с точностью до первого порядка малой величины его сжатия.

4. **Фигура относимости** (нормальная фигура), как правило, выбираемая в форме сферы, эллипсоида вращения или трехосного эллипсоида, представляет собой простейшую и потому широко используемую в практике геодезических и гравиметрических работ математическую модель фигуры планетарного геоида. Фигура относимости как модель первого приближения не подвержена изменениям со временем.

Заметим, что каждая из описанных выше фигур может рассматриваться не только в отношении Земли, но и с необходимыми оговорками в отношении любого тела Солнечной системы, обеспечивая тем самым идеологическую общность

подходов к изучению такого рода проблем и универсальность методов исследования небесных тел. В то же время, несмотря на специфику методов изучения каждого внеземного объекта, основа их базируется на методологии теории фигуры Земли, важнейшие этапы развития которой полезно в этой связи конспективно напомнить [2].

Знаменитая монография А. Клеро «Теория фигуры Земли, основанная на началах гидростатики» (1743), заложила основы теории фигуры эллипсоидальной Земли и теории фигур равновесия вращающейся жидкости, частицы которой притягиваются друг к другу согласно ньютоновскому закону всемирного притяжения. Столетие спустя, опираясь на теорему единственности решения краевых задач теории гравитационного потенциала, Д. Стокс доказал возможность определения внешнего гравитационного поля и гравитационной фигуры Земли без знания распределения плотности земных недр. В роли исходных наблюдательных данных при этом выступают значения силы тяжести, приведенные на уровенную поверхность геопотенциала, целиком охватывающую все гравитирующие массы. Позднее авторитетная теория определения геометрической фигуры физической поверхности Земли по совокупности данных астрономических, геодезических и гравиметрических наблюдений М.С. Молоденского позволила освободиться от необходимости внесения этих редуций, оперируя лишь данными измерений, выполненных на физической поверхности Земли.

Следует отметить в этой связи, что основополагающие работы Стокса и Молоденского на многие десятилетия определили независимое друг от друга развитие геодезии, занятой изучением геометрической и гравитационной фигур Земли, и геофизики, предметом интересов которой является внутреннее строение Земли и происходящие в теле планеты геодинамические процессы различной природы.

Развитие космических методов и технологий повлекли за собой не только изменение источников и диверсификацию видов используемой наблюдательной информации, но и кардинальные изменения сложившихся представлений классической теории фигуры Земли, обусловленные возможностями изучения каждой из перечисленных выше фигур спутниковыми методами. Достижимая при этом прецизионная точность геодезических измерений открывает перспективы обнаружения геодинамических эффектов, следствием чего становится актуализация объединения интересов различных наук о Земле.

Решающее влияние на изучение геометрической фигуры физической поверхности Земли оказало широкое распространение методов определения координат точек земной поверхности относительно спутников созвездий глобальных навигационных спутниковых систем (ГНСС) ГЛОНАСС/GPS. Затруднительное с точки зрения классической геодезии определение пространственного положения точек физической поверхности Земли, а тем самым геометрической ее фигуры, в наши дни оказалось легко достижимым благодаря спутниковому позиционированию. Важно подчеркнуть, что точность полученных данных позволяет в настоящее время исследовать динамику геометрической фигуры Земли как в глобальном масштабе, так и в пределах отдельных регионов.

Не менее впечатляющим оказывается вклад методов спутникового позиционирования в изучение гравитационной фигуры регионального геоида/квазигеоида

и ее геодинимических изменений с течением времени. Как известно, в классических разделах теоретической геодезии определение фигуры геоида осуществляется путем решения смешанной (третьей) краевой задачи теории потенциала. Роль экспериментально полученных величин при этом играют аномалии силы тяжести  $\Delta g$ , называемые смешанными, поскольку они представляют собой разности измеренных и вычисленных (нормальных) значений силы тяжести, относящихся к различным, отличающимся по высоте над поверхностью эллипсоида точкам опущенной на него нормали. В настоящее время геодезические высоты, определяемые методом ГНСС-позиционирования, позволяют использовать так называемые «чистые» аномалии силы тяжести  $\delta g$ , измеряемая и вычисляемая компоненты которых относятся к одной и той же точке  $P$  физической поверхности Земли. В этом случае классическая геодезическая краевая задача из смешанной краевой задачи со свободной границей (краевой поверхностью) преобразуется в краевую задачу Нейманна с фиксированной границей, в роли которой выступает определяемая методом спутникового позиционирования физическая поверхность Земли [1]. На практике задача детального и оперативного изучения региональной фигуры геоида/квазигеоида и ее геодинимических изменений в настоящее время решается методом ГНСС-нивелирования, основанным на определении аномалий высоты  $\zeta$  (превышений квазигеоида над эллипсоидом относимости) как разности геодезической  $H$  и нормальной  $h$  высот точки  $P$ :  $\zeta(P) = H(P) - h(P)$ . При этом геодезическую высоту пункта  $P$  получают методом спутникового позиционирования, а нормальную высоту  $h$  – методом геометрического нивелирования. Из приведенной выше формулы следует, что, располагая точными региональными картами значений аномалий высот, возможно, вычисляя нормальную высоту  $h(P) = H(P) - \zeta(P)$ , заменить трудоемкую процедуру традиционного геометрического нивелирования менее затратной процедурой спутникового позиционирования. Понятно, что применение указанного подхода в основе своей содержит постулат об отсутствии изменений со временем фигуры квазигеоида на исследуемой территории, поскольку потребитель ГНСС оперирует только геометрическими величинами, в то время как геометрическое нивелирование связано одновременно и с урвенной, и с физической поверхностями гравитационной и геометрической фигур Земли соответственно.

В то же время изучение глобального гравитационного поля Земли (то есть гравитационной ее фигуры), прежде основывавшееся исключительно на наземных гравиметрических измерениях, благодаря развитию динамических методов космической геодезии трансформировалось в оценку численных значений параметров моделей геопотенциала, выполняемую по наблюдениям за эволюцией орбит искусственных спутников Земли.

Классическая схема определения параметров гравитационного поля небесного тела опирается на интегрирование дифференциальных уравнений возмущенного движения искусственного спутника этого тела. Однако, как показывает опыт, следуя традиционной методике, не удастся построить подробные многопараметрические модели потенциала силы притяжения, детально описывающие

аномальную структуру поля, что вынуждает обращаться к методам, не связанным со сглаживающей процедурой интегрирования по времени [3].

Наиболее перспективными с этой точки зрения оказываются так называемые дифференциальные методы спутниковых измерений в системах с изменяемой геометрией расположения элементов, использующие искусственный спутник в качестве пробной массы, слежение за движением которой доставляет необходимые сведения о структуре внешнего гравитационного поля исследуемого небесного тела. Речь идет о бортовых измерениях вторых производных гравитационного потенциала методом спутниковой градиентометрии (SGG – Satellite Gravity Gradiometry) и бортовых измерениях характеристик относительного движения двух или более спутников методом межспутникового слежения (SST – Satellite-to-Satellite Tracking). Спутники при этом могут обращаться либо по низким орбитам (как в коорбитальном варианте, так и по близким некомпланарным орбитам), либо по разновысоким орбитам. Перечисленные виды бортовых измерительных данных отличаются беспрецедентной точностью и высокой чувствительностью к влиянию региональных и локальных аномалий поля, что открывает возможности оперативного определения параметров потенциала в широком диапазоне частот, а также изучения динамики фигуры Земли и акватории Мирового океана.

Результаты реализуемых в настоящее время в околоземном пространстве космических проектов CHAMP и GRACE наглядно демонстрируют эффективность применения метода межспутникового слежения для оперативного получения высокоточных данных о структуре гравитационного поля Земли, в особенности в области низких и средних частот. К моменту подготовки настоящей статьи по результатам программ CHAMP и GRACE построен ряд моделей гравитационного поля Земли (как чисто спутниковых, так и с привлечением наземных гравиметрических данных и результатов лазерной локации ИСЗ), обеспечивающих разрешение подробностей фигуры геоида с простиранием от 100 и более километров. Большого разрешения предполагается достичь благодаря работе запущенного 17 марта 2009 г. низкоорбитального ИСЗ GOCE, оснащенного бортовым градиентометром, предназначенным для выполнения высокоточных измерений вторых производных гравитационного потенциала.

Рассматривая программы межспутникового слежения и спутниковой градиентометрии, отметим, что ключевую роль в каждом из этих проектов играет высокоточное позиционирование низкоорбитального спутника посредством привязки к созвездию спутников системы GPS. Ранее нами было показано [4], что применение дифференциальных спутниковых методов предъявляет весьма строгие требования к точности положений и скоростей элементов спутниковой системы. В частности, на низких спутниковых высотах необходима метровая и даже субметровая точность позиционирования инструмента, недостижимая при использовании традиционных способов навигации космических аппаратов.

Столь высокие требования могут быть удовлетворены лишь посредством высокоточной привязки спутников CHAMP, GRACE и GOCE к спутникам ГНСС, обеспечивающей ошибку позиционирования на уровне первых сантиметров. Тем самым ГНСС ГЛОНАСС/GPS, представляющие собой одно из важнейших технических достижений конца прошлого столетия, оказываются

непосредственно интегрированными не только в навигацию и геодезию, но и в гравиметрию, геофизику и другие науки о Земле. Заметим, что вследствие отсутствия аналогичных систем вблизи Луны и Марса проблема высокоточного текущего позиционирования их искусственных спутников остается одним из наиболее значительных препятствий на пути детального изучения гравитационных полей этих планет дифференциальными спутниковыми методами.

В то же время потребность в разработке перспективных программ, использующих технологии межспутникового слежения и спутниковой градиентометрии для изучения Луны и других планет земной группы, отличающихся сложным внутренним строением и плотностной стратификацией недр, представляется, на наш взгляд, не менее настоятельной, чем для исследования Земли. Дело в том, что при построении многопараметрических моделей геопотенциала традиционно широко привлекаются результаты наземной гравиметрической съемки и спутниковой альтиметрии акватории Мирового океана. Альтернативой такого рода данным для других небесных тел могут быть лишь данные дифференциальных спутниковых измерений.

Как уже отмечалось выше, чрезвычайно важным достижением современной космической геодезии стали высокая точность и оперативность получения наблюдательных данных, позволяющие выявлять геодинамические изменения геометрической и гравитационной фигур Земли. Напомним в этой связи, что предмет геодинамики состоит в изучении эволюции пространственно-временной структуры поверхности Земли, ее физических полей и геосфер. Практическое значение исследований такого рода состоит в обеспечении возможностей прогнозирования медленных (эволюционных) и быстрых (катастрофических) изменений топографии физической и геоидальной поверхностей, необходимых для обеспечения безопасной жизнедеятельности и устойчивого развития территории. Подчеркнем, что возрастание интереса к геодинамическим исследованиям стимулирует усиление интегративных тенденций наук о Земле и требует применения комплексного совместного изучения фигуры, гравитационного поля и внутреннего строения Земли.

С учетом особенностей современного состояния и ближайших перспектив космических исследований Земли, Луны и других тел Солнечной системы основная задача планетной геодезии может быть сформулирована как определение фигур и внешнего гравитационного поля небесных тел по данным разнородных измерений, выполненных в различных точках пространства. Нет сомнений в том, что богатейший арсенал методов определения фигуры Земли, топографии рельефа ее поверхности и структуры внешнего гравитационного поля, накопленный геодезией за многие десятилетия, должен быть с максимальной эффективностью использован для изучения планет и их спутников. Столь же очевидно, что методы решения этой задачи должны отличаться возможно большей универсальностью с точки зрения как диверсификации видов и источников получения наблюдательной информации, так и применения их к небесным телам, значительно различающимся по размерам, массам, форме, рельефу поверхности и внутреннему строению.

Принципу универсальности в геодезии в максимальной степени удовлетворяет интегративный подход, в течение последних десятилетий развиваемый

рядом отечественных и зарубежных исследователей. Важнейшим принципом интегративного подхода является совместная обработка (уравнивание) всех измерительных данных в рамках единой вычислительной модели.

Основанием для совместного уравнивания разнородных наблюдательных данных в планетной геодезии является тот факт, что результат  $L$  любого измерения в общем случае представляет собой нелинейный функционал на потенциале силы тяжести  $W$ :

$$L = F(\mathbf{X}, W), \quad (2)$$

где  $\mathbf{X} \in E_k$  – вектор положения одной или нескольких точек, участвующих в измерении  $L$ ,  $E_k$  – евклидово пространство размерности  $k$ ,  $W = V + \frac{\omega^2}{2}(X^2 + Y^2)$ ,  $V \in H$ ,  $V$  – потенциал ньютоновской силы притяжения во внешнем пространстве,  $H$  – гильбертово пространство гармонических функций. Согласно (2) функционал  $F$  отображает произведение пространств  $E_k$  и  $H$  в пространство  $E_1$  действительных чисел (на числовую ось):  $F: E_k \times H \rightarrow L \in E_1$ .

Однократный характер дистанционных спутниковых измерений предполагает использование модельных представлений потенциала (например, вида (1)), вследствие чего (2) возможно переписать в виде:

$$L = F(\mathbf{X}, V\{C_{nm}, S_{nm}\}). \quad (3)$$

Тогда неизбежное на практике усечение ряда (1) максимальным значением  $N$  индекса степени  $n$  обеспечивает возможность проведения всех дальнейших вычислительных процедур в конечномерном пространстве векторов.

Вводя в рассмотрение темпоральные изменения фигуры и гравитационного поля Земли, уравнение наблюдений (2) возможно переписать в форме:

$$L(t) = F(\mathbf{X}(\mathbf{a}, t), W(\mathbf{X}(\mathbf{a}, t), \mathbf{b}, t)), \quad (4)$$

где  $L(t)$  – зависящий от времени результат наблюдения;  $\mathbf{X}(\mathbf{a}, t)$  – зависящий от времени вектор положения одной или нескольких участвующих в наблюдении точек;  $\mathbf{a}$  – постоянный во времени вектор параметров априорно устанавливаемой модели изменения вектора  $\mathbf{X}$  со временем;  $W(\mathbf{X}(\mathbf{a}, t), \mathbf{b}, t)$  – зависящий от времени потенциал силы тяжести;  $\mathbf{b}$  – постоянный во времени вектор априорно устанавливаемой модели изменения потенциала силы тяжести со временем.

Благодаря возрастанию полетной активности и широкому внедрению новейших информационных технологий получения и обработки наблюдательных данных в настоящее время достигнуты значительные успехи в изучении и картографировании поверхностей Меркурия, Венеры, Луны, Марса, спутников планет-гигантов, ряда астероидов, что позволяет исследовать их фигуры как в планетарном, так и в региональном масштабах. Распространение сферы интересов наук о Земле на иные тела Солнечной системы формирует основу для интеграции всех смежных дисциплин в рамках **общей планетологии**, объединяющей планетную геодезию, планетную гравиметрию, планетную картографию и планетную геологию. Становление этого комплексного научного направления, актуализируемое постановкой новых амбициозных задач исследования и грядущего

освоения планет (создание долговременной лунной базы, пилотируемые полеты на астероиды, поиск внеземных ресурсов, экспедиция на Марс и др.), заставляет задуматься о необходимости подготовки в классических университетах специалистов указанного профиля, например, в рамках соответствующей программы междисциплинарной магистратуры.

Подчеркнем в этой связи, что в Казанском университете сложились давние и богатые традиции геодезических, гравиметрических и планетных исследований. Работы последних лет в этом направлении связаны с разработкой универсальных методов и алгоритмов определения параметров моделей гравитационных полей небесных тел по данным дифференциальных измерений в спутниковых системах с изменяемой геометрией расположения элементов с целью поиска оптимальных орбитальных конфигураций искусственных спутников Луны и Марса и условий проведения измерений, обеспечивающих максимальную точность оценивания параметров поля [3, 4]. Не менее важным направлением исследований геодезистов Казанского университета является применение спутниковых технологий для изучения геометрической фигуры и фигуры квазигеоида, а также их геодинамических изменений со временем на территории Республики Татарстан [5–7].

### Summary

*R.A. Kashcheev. Modern Viewpoint on Studying the Figures of the Earth and Solar System Bodies.*

The article regards the main tenets of the modern theory of the figure of the Earth. It is shown that, due to the development of cosmic geodesy, classical investigations of the figure of the Earth based on the results of geodesic and gravimetric measurements are squeezed out by satellite methods. High accuracy and efficiency of obtaining the satellite observation data allow revealing the temporal geodynamic variations of the figure of the Earth and its gravity field. It is emphasized that satellite methods are applicable to studying other Solar system bodies, first of all, the planets of the Earth group.

**Key words:** figure of the Earth, geoid, satellite technologies, geodynamics.

### Литература

1. Гофман-Велленгоф Б., Мориц Г. Физическая геодезия. – М.: Изд-во МИИГАиК, 2007. – 426 с.
2. Мориц Г. Фигура Земли: теоретическая геодезия и внутреннее строение Земли. – Киев: Изд-во НАН Украины, 1994. – 248 с.
3. Кащеев Р.А. О точности решения задач планетной гравиметрии методами спутниковой градиентометрии и межспутникового слежения // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 1997. – № 4. – С. 90–98.
4. Кащеев Р.А. Дифференциальные спутниковые методы планетной гравиметрии и перспективы их применения // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 2002. – № 4. – С. 74–80.
5. Комаров Р.В., Загреддинов Р.В., Кащеев Р.А. Фигура локального квазигеоида Республики Татарстан // Геодезия и картография. – 2005. – № 12. – С. 40–43.
6. Komarov R.V., Kascheev R.A., Zagretdinov R.V. Geoid determination by GPS/leveling method in the Republic of Tatarstan // Georesources. – 2007. – No 2(10). – P. 43–45.



7. *Кашеев Р.А., Нургалиев Д.К., Загретдинов Р.В., Чернова И.Ю., Комаров Р.В.* Геодезический мониторинг динамики земной коры центральной части Республики Татарстан // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 2008. – № 4. – С. 9–12.

Поступила в редакцию  
28.12.09

---

**Кашеев Рафаэль Александрович** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры астрономии и космической геодезии Казанского государственного университета.

E-mail: [rafael.kascheev@ksu.ru](mailto:rafael.kascheev@ksu.ru)