ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 10 (437)

УДК 517.988

В.П. ТАНАНА

О СХОДИМОСТИ КОНЕЧНОМЕРНЫХ АППРОКСИМАЦИЙ РЕГУЛЯРИЗОВАННЫХ РЕШЕНИЙ В ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ

Пусть H — гильбертово пространство, H_n — конечномерное подпространство H, а A и A_n — операторы, отображающие H в себя и являющиеся при этом непрерывными и секвенциально слабо непрерывными. Обозначим через $\overline{A}_n$ сужение оператора A_n с пространства H на H_n.

В данной статье введены понятия слабой полузамкнутости и слабо-сильной замкнутости пары A, $\{A_n\}$. Показано, что наряду с A-полнотой последовательности операторов $\{\overline{A}_n\}$ эти условия на пару A, $\{A_{n_k}\}$ являются достаточными для сходимости конечномерных аппроксимаций в методе регуляризации А.Н. Тихонова [1] и что они являются более общими, чем условие слабой замкнутости пары A, $\{A_{n_k}\}$ [2], используемое ранее.

1. Основные определения

Определение 1 ([3], с. 113). Последовательность $\{A_n\}$ будем называть A-полной, если для любого $u_0 \in H$ найдется последовательность $\{u_n\}$ такая, что $u_n \to u_0$ и $A_n u_n \to A u_0$.

Определение 2 ([2]). Пару A, $\{A_n\}$ будем называть слабо замкнутой, если из того, что $u_n \rightharpoonup \widehat{u}$, а $A_n u_n \rightharpoonup \overline{f}$, следует $A\widehat{u} = \overline{f}$.

Определение 3. Пару A, $\{A_n\}$ будем называть слабо-сильно замкнутой, если из того, что $u_n \rightharpoonup \widehat{u}$, а $A_n u_n \to \overline{f}$, следует $A\widehat{u} = \overline{f}$.

Определение 4. Пару A, $\{A_n\}$ будем называть слабо полузамкнутой, если из того, что $\|u_n\| \to a$, а $A_n u_n \rightharpoonup \overline{f}$, следует существование элемента $\overline{u} \in H$ такого, что $\|\overline{u}\| \le a$ и $A\overline{u} = \overline{f}$.

Из определений 2–4 вытекает, что слабо замкнутая пара A, $\{A_n\}$ является одновременно слабо-сильно замкнутой и слабо полузамкнутой.

Приведем пример, показывающий, что в обратную сторону данное утверждение не верно. Пусть $H = l_2$, а оператор A определим формулой

$$A\overline{u} = (|u_1|, u_2, \dots), \tag{1}$$

где $\overline{u}$ и $A\overline{u} \in l_2$. Далее, для любого n оператор A_n определим формулой

$$A_n\overline{u} = \Big(\sqrt{u_1^2 + u_n^2/2}\,, u_2, \dots, u_{n-1}, \frac{u_n}{\sqrt{2}}, u_{n+1}, \dots\Big), \tag{2}$$

где $\overline{u}$ и $A_n\overline{u} \in l_2$. Из (1) и (2) следует, что операторы A и A_n являются непрерывными и секвенциально слабо непрерывными. Кроме того, $A_n\overline{u} \to A\overline{u}$ при $n \to \infty$ для любого $\overline{u} \in l_2$, поэтому последовательность операторов $\{A_n\}$ является A-полной.

Обозначим через $\{A_{n_k}\}$ произвольную подпоследовательность операторов A_n.

Теорема 1. *Пара A, $\{A_{n_k}\}$, определенная формулами* (1) *и* (2), *является слабо полузамкнутой и слабо-сильно замкнутой.*

Доказательство. Пусть последовательность $\{\overline{u}^k\} \subset l_2$ и удовлетворяет соотношениям

$$\lim_{k\to\infty} \|\overline{u}^k\| = a, \tag{3}$$

$$A_{n_k}\overline{u}^k \rightharpoonup \overline{f}. \tag{4}$$

Тогда из (2) будет следовать, что для любого k

$$\|A_{n_k}\overline{u}^k\| = \|\overline{u}^k\|. \tag{5}$$

По свойству нормы слабого предела из (4) следует

$$\|\overline{f}\| \le \varliminf_{k\to\infty} \|A_{n_k}\overline{u}^k\|,$$

а учитывая (3) и (5), получим $\|\overline{f}\| \le a$, а ввиду (1) и $\|\overline{u}\| \le a$, что доказывает слабую полузамкнутость пары A, $\{A_{n_k}\}$.

Теперь докажем ее слабо-сильную замкнутость. Для этого рассмотрим последовательность $\{\overline{u}^k\} \subset l_2$ такую, что

$$\overline{u}^k \rightharpoonup \widehat{\overline{u}} \tag{6}$$

и

$$A_{n_k}\overline{u}^k \to \overline{f}. \tag{7}$$

Из (7) следует

$$u_i^k \to f_i \ \text{(равномерно по } i) \ \text{ при } \ k \to \infty, \tag{8}$$

а из (6) для любого i имеем

$$u_i^k \to \widehat{u}_i \ \text{ при } \ k \to \infty. \tag{9}$$

Из (2), (8), (9) вытекает $u_i^k \to \widehat{u}_i$ (равномерно по $i \ge 2$) при $k \to \infty$, поэтому

$$u_{n_k}^k \to 0 \ \text{ при } \ k \to \infty. \tag{10}$$

Таким образом, учитывая (1), (2), (9), (10), получим $A_{n_k}\overline{u}^k \rightharpoonup A\widehat{\overline{u}}$. $\square$

Теперь покажем, что пара A, $\{A_n\}$, определяемая формулами (1) и (2), не является слабозамкнутой. Для этого рассмотрим последовательность $\{\overline{u}^n\} \subset l_2$ такую, что для любого n

$$\overline{u}^n = (0, \dots, 0, \overset{n}{1}, 0, \dots). \tag{11}$$

Из (11) следует

$$\overline{u}^n \rightharpoonup \overline{0} \tag{12}$$

и для любого n

$$A_n\overline{u}^n = \Big(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \dots, \frac{\overset{n}{1}}{\sqrt{2}}, 0, \dots\Big). \tag{13}$$

Из (13) имеем $A_n\overline{u}^n \to (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \dots) \ne \overline{0}$, что и доказывает слабую незамкнутость пары A, $\{A_n\}$.

2. Конечномерная аппроксимация регуляризованного решения

Регуляризация операторного уравнения

$$Au = \overline{f}, \tag{14}$$

где u и $\overline{f} \in H$, заключается в сведении его к вариационной задаче

$$\inf\{\|Au - \overline{f}\|^2 + \alpha\|u\|^2 : u \in H\}, \tag{15}$$

где $\alpha > 0$ [1]. В ([3], с. 125) доказана разрешимость вариационной задачи (15). Обозначим ее решение через $\overline{M}^{\alpha}$.

Метод конечномерной аппроксимации регуляризованного решения $\overline{M}^{\alpha}$ ([3], с. 88) заключается в сведении задачи (15) к ее конечномерному аналогу

$$\inf\{\|A_n u - \overline{f}_n\|^2 + \alpha\|u\|^2 : u \in H_n\}. \tag{16}$$

Задача (16) разрешима. Решение этой задачи обозначим через $\overline{M}_n^{\alpha}$.

Следуя [4], будем говорить, что последовательность множеств $\{M_n\}$ β-сходится к множеству M и обозначать $M_n \xrightarrow{\beta} M$ при $n \to \infty$, если $\beta(M_n, M) \to 0$ при $n \to \infty$, где $\beta(M_n, M) = \sup\{\rho(u, M) : u \in M_n\}$.

Проблема сходимости конечномерных аппроксимаций заключается в нахождении таких условий, при которых имеет место β-сходимость последовательности множеств $\{\overline{M}_n^{\alpha}\}$ к $\overline{M}^{\alpha}$ при $n \to \infty$.

Теорема 2. *Если последовательность операторов $\{\overline{A}_n\}$ является A-полной, а пара A, $\{A_{n_k}\}$ $\forall\{n_k\} \subseteq \{n\}$ слабо полузамкнута и слабо-сильно замкнута, то при условии, что $\overline{f}_n \to \overline{f}$, имеет место β-сходимость последовательности множеств $\{\overline{M}_n^{\alpha}\}$ к множеству $\overline{M}^{\alpha}$ при $n \to \infty$.*

Доказательство. Предположим противное, т. е. найдутся число $d > 0$ и подпоследовательность $\{u_{n_k}\}$, $u_{n_k} \in \overline{M}_{n_k}^{\alpha}$, такие, что

$$\rho(u_{n_k}, \overline{M}^{\alpha}) \geq d. \tag{17}$$

Так как последовательность операторов $\{\overline{A}_n\}$ является A-полной, то для любого $\widetilde{u} \in \overline{M}^{\alpha}$ найдется последовательность $\{\overline{u}_k\}$ такая, что $\overline{u}_k \in H_{n_k}$ для любого k,

$$\overline{u}_k \to \widetilde{u} \tag{18}$$

и

$$A_{n_k}\overline{u}_k \to A\widetilde{u}. \tag{19}$$

Из (18), (19) и того, что $\overline{f}_{n_k} \to \overline{f}$, следует

$$\|A_{n_k}\overline{u}_k - \overline{f}_{n_k}\|^2 + \alpha\|\overline{u}_k\|^2 \to \|A\widetilde{u} - \overline{f}\|^2 + \alpha\|\widetilde{u}\|^2. \tag{20}$$

Учитывая, что $u_{n_k} \in \overline{M}_{n_k}^{\alpha}$, получим

$$\|A_{n_k}u_{n_k} - \overline{f}_{n_k}\|^2 + \alpha\|u_{n_k}\|^2 \leq \|A_{n_k}\overline{u}_k - \overline{f}_{n_k}\|^2 + \alpha\|\overline{u}_k\|^2. \tag{21}$$

Таким образом, на основании соотношений (20) и (21) имеем

$$\varlimsup_{k\to\infty}\{\|A_{n_k}u_{n_k} - \overline{f}_{n_k}\|^2 + \alpha\|u_{n_k}\|^2\} \leq \|A\widetilde{u} - \overline{f}\|^2 + \alpha\|\widetilde{u}\|^2. \tag{22}$$

Из соотношения (22) следует ограниченность последовательностей $\{u_{n_k}\}$, $\{A_{n_k}u_{n_k}\}$ и $\{A_{n_k}u_{n_k} - \overline{f}_{n_k}\}$, а ввиду гильбертовости H — и их слабая компактность. Без ограничения общности, можем считать

$$u_{n_k} \rightharpoonup \widehat{u}, \tag{23}$$

$$A_{n_k}u_{n_k} \rightharpoonup f' \tag{24}$$

и

$$A_{n_k}u_{n_k} - \overline{f}_{n_k} \rightharpoonup f' - \overline{f}. \tag{25}$$

Так как пара A, $\{A_{n_k}\}$ слабо полузамкнута, то из (23) и (24) следует существование элемента u' такого, что $Au' = f'$ и

$$\varliminf_{k\to\infty} \{u_{n_k}\} \geq \|u'\|. \tag{26}$$

Из соотношения (25) и свойства нормы слабого предела следует

$$\|f' - \overline{f}\| \leq \varliminf_{k\to\infty} \|A_{n_k}u_{n_k} - \overline{f}_{n_k}\|, \tag{27}$$

а из (26) и (27) получим

$$\varliminf_{k\to\infty} \{\|A_{n_k}u_{n_k} - \overline{f}_{n_k}\|^2 + \alpha\|u_{n_k}\|^2\} \geq \|Au' - \overline{f}\|^2 + \alpha\|u'\|^2. \tag{28}$$

Так как $\widetilde{u} \in \overline{M}^{\alpha}$, то

$$\|Au' - \overline{f}\|^2 + \alpha\|u'\|^2 \geq \|A\widetilde{u} - \overline{f}\|^2 + \alpha\|\widetilde{u}\|^2. \tag{29}$$

Таким образом, из (28) и (29) следует

$$\varliminf_{k\to\infty} \{\|A_{n_k}u_{n_k} - \overline{f}_{n_k}\|^2 + \alpha\|u_{n_k}\|^2\} \geq \|A\widetilde{u} - \overline{f}\|^2 + \alpha\|\widetilde{u}\|^2, \tag{30}$$

а из (22) и (30) имеем

$$\lim_{k\to\infty} \{\|A_{n_k}u_{n_k} - \overline{f}_{n_k}\|^2 + \alpha\|u_{n_k}\|^2\} = \|A\widetilde{u} - \overline{f}\|^2 + \alpha\|\widetilde{u}\|^2. \tag{31}$$

Учитывая соотношения (27) и (31), получим

$$\lim_{k\to\infty} \|A_{n_k}u_{n_k} - \overline{f}_{n_k}\| = \|f' - \overline{f}\|. \tag{32}$$

Так как H гильбертово, то из (25) и (32) следует $A_{n_k}u_{n_k} \to f'$, а ввиду слабосильной замкнутости пары A, $\{A_{n_k}\}$ из (23) и (32) следует

$$A\widehat{u} = f'. \tag{33}$$

Из (23) по свойству нормы слабого предела имеем

$$\varliminf_{k\to\infty} \|u_{n_k}\| \geq \|\widehat{u}\|, \tag{34}$$

но тогда из (32), (33) и (34)

$$\varliminf_{k\to\infty} \{\|A_{n_k}u_{n_k} - \overline{f}_{n_k}\|^2 + \alpha\|u_{n_k}\|^2\} \geq \|A\widehat{u} - \overline{f}\|^2 + \alpha\|\widehat{u}\|^2. \tag{35}$$

Из соотношений (31) и (35) следует, что $\widehat{u} \in \overline{M}^{\alpha}$ и

$$\|u_{n_k}\| \to \|\widehat{u}\|, \tag{36}$$

а из (23) и (36) получим $u_{n_k} \to \widehat{u}$. Таким образом, $\rho(u_{n_k}, \overline{M}^{\alpha}) \to 0$ при $k \to \infty$, что противоречит (17). $\square$

Легко видеть, что если в качестве $\{H_n\}$ возьмем последовательность подпространств l_2 таких, что для любого n

$$H_n = \{\overline{u} : \overline{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, 0, \ldots)\}, \tag{37}$$

а через $\overline{A}_n$ обозначим сужение операторов A_n, определенных формулой (2), на подпространство H_n, то последовательность операторов $\{\overline{A}_n\}$ будет являться A-полной, где A задан формулой (1).

Таким образом, учитывая теорему 1, можно заключить, что пара A, $\{A_n\}$, определяемая формулами (1), (2), и подпространства H_n, определяемые (37), удовлетворяют условиям теоремы 2. С другой стороны, как было показано ранее, пара A, $\{A_n\}$ не является слабо замкнутой.

В заключение заметим, что использование в формулировке теоремы 2 подпоследовательностей $\{A_{n_k}\}$ существенно. Это связано с тем, что понятия слабой замкнутости, слабой полузамкнутости и слабосильной замкнутости пар A, $\{A_n\}$ (см. определения 2, 3, 4) не наследственны, т. е. не выполняются для любой подпоследовательности. Покажем это на примере слабозамкнутой пары A, $\{A_n\}$.

Пусть $H = l_2$, а

$$A\overline{u} = \overline{0} \quad \text{для любого} \quad \overline{u} \in l_2, \tag{38}$$

$$A_n\overline{u} = \begin{cases} \overline{u}, & n = 2k-1, \\ \overline{0}, & n = 2k, \end{cases} \tag{39}$$

где $k = 1, 2, \ldots$ Легко видеть, что пара A, $\{A_n\}$, определяемая формулами (38), (39), слабо замкнута, а пара A, $\{A_{2k-1}\}$ таковой не является.

Литература

1. Тихонов А.Н. *О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации* // ДАН СССР. – 1963. – Т. 151. – № 3. – С. 501–504.
2. Васин В.В. *Дискретная сходимость и конечномерная аппроксимация регуляризующих алгоритмов* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1979. – Т. 19. – № 1. – С. 11–21.
3. Танана В.П. *Методы решения операторных уравнений.* – М.: Наука, 1981. – 158 с.
4. Иванов В.К. *О некорректно поставленных задачах* // Матем. сб. – 1963. – Т. 61. – № 2. – С. 211–223.

Челябинский государственный университет

Поступила 05.06.1996