ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 11 (450)

УДК 517.953

У.Д. БЕКБАЕВ

ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ И ИНВАРИАНТАХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА ОТ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО ЗАМЕНЫ ПЕРЕМЕННЫХ

В задаче приведения дифференциальных уравнений к каноническому виду заменой неизвестной и переменных естественным образом появляются (относительные) инварианты дифференциальных уравнений относительно таких преобразований [1], [2]. Инварианты важны и в задаче грубой классификации дифференциальных уравнений (напр., на эллиптические, гиперболические, параболические квазилинейные дифференциальные уравнения) [3]. Хотя в различных вопросах, касающихся линейных дифференциальных уравнений (ЛДУ) в частных производных, были использованы некоторые конкретные инварианты различных подклассов таких уравнений (напр., инвариант Лапласа) [4], [5], тем не менее инварианты всего класса ЛДУ в частных производных второго порядка оставались почти не изученными.

Что касается обыкновенных ЛДУ n-го порядка, их (относительные) инварианты находились разными способами [1], [2], [6]–[11]. В частности, в [10], [11] был предложен алгебраический метод описания инвариантов таких уравнений, заданных над обыкновенным дифференциальным полем.

В данной работе рассматриваются ЛДУ частных производных второго порядка, заданные над дифференциальным полем $(F, \partial_1, \partial_2)$. Вводится естественный аналог "замены переменных" (замена дифференциальных операторов ∂_1, ∂_2 по специальному закону), задача эквивалентности таких уравнений сводится к более простой задаче эквивалентности (теорема 1) и с помощью этой теоремы описывается поле инвариантных дифференциальных рациональных функций таких уравнений над полем констант поля $(F, \partial_1, \partial_2)$ (теорема 2). Для простоты все рассматриваемые дифференциальные поля считаются содержащими поле рациональных чисел.

Использованные понятия и результаты дифференциальной алгебры могут быть найдены в [12], [13].

При замене переменных $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = (x, y)$ уравнение

$$A(x,y)u_{xx} + B(x,y)u_{xy} + C(x,y)u_{yy} + a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = 0$$

переходит в уравнение того же вида

$$A_1(\xi,\eta)v_{\xi\xi} + B_1(\xi,\eta)v_{\xi\eta} + C_1(\xi,\eta)v_{\xi\eta} + a_1(\xi,\eta)v_\xi + b_1(\xi,\eta)v_\eta = 0,$$

причем операторы частных производных по ξ, η и x, y связаны соотношением $\delta = g^{-1}\partial$, где ∂ (δ) есть вектор-столбец с "координатами" $\partial_1 = \partial/\partial x$, $\partial_2 = \partial/\partial y$ (соответственно $\delta_1 = \partial/\partial\xi$, $\delta_2 = \partial/\partial\eta$) и g — матрица с элементами $g_{11} = \xi_x$, $g_{12} = \eta_x$, $g_{21} = \xi_y$, $g_{22} = \eta_y$.

В случае произвольного дифференциального поля $(F, \partial_1, \partial_2)$, где $\partial_1\partial_2 = \partial_2\partial_1$, то же самое может быть представлено в следующем виде. Пусть

$$A\partial_1^2 u + B\partial_1\partial_2 u + C\partial_2^2 u + a\partial_1 u + b\partial_2 u = 0 \qquad (1)$$

— ЛДУ над $(F, \partial_1, \partial_2)$. При замене $\delta = g^{-1}\partial$ уравнение (1) переходит в уравнение того же вида

$$A_1\delta_1^2 v + B_1\delta_1\delta_2 v + C_1\delta_2^2 v + a_1\delta_1 v + b_1\delta_2 v = 0, \tag{2}$$

где $g \in GL^\partial(2,F) = \{g = (g_{ij})_{i,j=1,2} \in GL(2,F) : \partial_2 g_{1j} = \partial_1 g_{12}$ при $j = 1,2\}$, ∂ (δ) — вектор-столбец с "координатами" ∂_1, ∂_2 (соответственно δ_1, δ_1). Заметим, что при этом новые дифференциальные операторы δ_1, δ_2 также коммутируют между собой. Кроме того, коэффициенты уравнений (1), (2) и компоненты g связаны соотношениями

$$\begin{cases} A_1 = Ag_{11}^2 + Bg_{11}g_{21} + Cg_{21}^2, \\ B_1 = 2Ag_{11}g_{12} + B(g_{11}g_{22} + g_{12}g_{21}) + 2Cg_{21}g_{22}, \\ C_1 = Ag_{12}^2 + Bg_{12}g_{22} + Cg_{22}^2, \\ a_1 = A\partial_1 g_{11} + B\partial_1 g_{21} + C\partial_2 g_{21} + ag_{11} + bg_{21}, \\ b_1 = A\partial_1 g_{12} + B\partial_1 g_{22} + C\partial_2 g_{22} + ag_{12} + bg_{22}. \end{cases} \tag{3}$$

Определение. Если для $g \in GL^\partial(2,F)$ коэффициенты уравнений (1) и (2) связаны соотношениями (3) и $\delta = g^{-1}\partial$, то уравнения (1) и (2) назовем эквивалентными относительно g и будем писать $V_1 = \rho^\partial\langle g, V\rangle$, где $V_1 = (A_1, B_1, C_1, a_1, b_1)$, $V = (A, B, C, a, b)$. Кроме того, для простоты вместо ∂_1 (соответственно $\partial_2 u$, $\delta_1 u$, $\delta_2 u$) будем писать u_x (соответственно u_y, u_ξ, u_η) и $\rho_i^\partial\langle g, V\rangle$ будет означать i-ю компоненту вектора $\rho^\partial\langle g, V\rangle$.

Из системы соотношений (3) трудно получить инварианты ЛДУ. Поэтому сначала найдем более простую, но эквивалентную (3) систему равенств. В данной работе будем рассматривать случай уравнений (1) с обратимыми дискриминантами, т. е. таких, для которых $D\langle V\rangle = B^2 - 4AC \in F^*$. Введем следующие дифференциально-рациональные функции:

$$\begin{aligned} a^\partial\{V\} &= AC_x - A_xC + BC_y - B_yC - bB + 2aC, \\ b^\partial\{V\} &= A_xB - AB_x + A_yC - AC_y - aB + 2bA, \\ \alpha^\partial\langle V\rangle &= a^\partial\{V\}/D\langle V\rangle, \quad \beta^\partial\langle V\rangle = b^\partial\{V\}/D\langle V\rangle. \end{aligned}$$

Теорема 1. *Если $g \in GL^\partial(2,F)$, $\delta = g^{-1}\partial$, то уравнения (1) и (2) эквивалентны относительно g тогда и только тогда, когда справедливы*

$$\begin{gathered} \begin{pmatrix} A_1 & B_1/2 \\ B_1/2 & C^1 \end{pmatrix} = g^t \begin{pmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{pmatrix} g, \\ \begin{pmatrix} \alpha^\partial\langle V_1\rangle \\ \beta^\partial\langle V\rangle \end{pmatrix} = g^{-1} \begin{pmatrix} \alpha^\partial\langle V\rangle \\ \beta^\partial\langle V\rangle \end{pmatrix}, \end{gathered} \tag{4}$$

где t означает транспонирование.

Докажем сначала

Предложение 1. *Пусть λ — произвольный элемент F. Тогда существует такое расширение дифференциального поля $(F, \partial_1, \partial_2)$, что система уравнений*

$$\begin{cases} \partial_2 s = \partial_1 t, \\ \quad s = \lambda t \end{cases}$$

имеет нетривиальное решение в этом расширении.

Доказательство. Если данная система не имеет нетривиального решения в исходном поле, то, считая t дифференциальной переменной, рассмотрим $F \subset F\langle t, \partial_2\rangle$, где $F \subset F\langle t, \partial_2\rangle$ — поле всех ∂_2-дифференциальных рациональных функций от t над F. Положив $\partial_1 t = \partial_2\lambda t + \lambda\partial_2 t$, превратим его в (∂_1, ∂_2)-дифференциальное поле. При этом полученное дифференциальное поле будет расширением $(F, \partial_1, \partial_2)$, и $(\lambda t, t)$ будет решением заданной системы. $\square$

Предложение 2. *Если* $g^1 \in GL^\partial(2,F)$ — *такой элемент, что* $A(g^1_{11})^2 + Bg^1_{11}g^1_{21} + C(g^1_{21})^2 = A(g^1_{12})^2 + Bg^1_{12}g^1_{22} + C(g^1_{22})^2 = 0$ (*т. е. диагональные элементы матрицы* $(g^1)t\left(\begin{smallmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{smallmatrix}\right)g^1$ *равны нулю*), *то*

$$\begin{pmatrix} \rho_4^\partial\langle g^1, V\rangle \\ \rho_5^\partial\langle g^1, V\rangle \end{pmatrix} = -(g^1)^t \begin{pmatrix} 2A & B \\ B & 2C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^\partial\langle V\rangle \\ \beta^\partial\langle V\rangle \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Справедливость этого предложения может быть проверена прямыми выкладками.

Доказательство теоремы 1. Заметим, что, не нарушая общности, можно считать условия предложения 2 выполненными. Действительно, при $A = C = 0$, $B \neq 0$ в качестве g^1 можно взять единичную матрицу E второго порядка. Если же $A \neq 0$ или $C \neq 0$ (скажем $A \neq 0$), то, не нарушая общности, можно допустить существование $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in F$, которые являются решениями уравнения

$$A\lambda^2 + B\lambda + C = 0.$$

Тогда согласно предложению 1 существуют такое расширение $(F, \partial_1, \partial_2) \subset (\overline{F}, \partial_1, \partial_2)$ и элементы g^1_{ij} из $\overline{F}$, что справедливы системы равенств

$$\begin{cases} \partial_2 g^1_{11} = \partial_1 g^1_{21}; \\ \quad g^1_{11} = \lambda_1 g^1_{21}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \partial_2 g^1_{21} = \partial_1 g^1_{22}; \\ \quad g^1_{12} = \lambda_2 g^1_{22}. \end{cases}$$

Для такого $g^1 = (g^1_{ij})_{i,j=1,2}$ имеем $g^1 \in GL^\partial(2, \overline{F})$.

Первое равенство системы (4) есть не что иное, как матричная запись первых трех равенств системы (3). Пусть справедлива система равенств (3) и $g^1 \in GL^\partial(2,F)$ удовлетворяет условиям предложения 2. Тогда согласно предложению 2 имеем равенство (5). Из первых трех равенств системы (3) получим, что для матрицы $\overline{g}^1 = g^{-1}g^1$ диагональные элементы матрицы

$$(\overline{g}^1)^t \begin{pmatrix} A_1 & B_1/2 \\ B_1/2 & C_1 \end{pmatrix} \overline{g}^1 \tag{6}$$

также равны нулю. Поэтому снова согласно предложению 2 имеем

$$\begin{pmatrix} \rho_4^\partial\langle \overline{g}^1, V_1\rangle \\ \rho_5^\partial\langle \overline{g}^1, V_1\rangle \end{pmatrix} = -(\overline{g}^1)^t \begin{pmatrix} 2A_1 & B_1 \\ B_1 & 2C_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^\partial\langle V_1\rangle \\ \beta^\partial\langle V_1\rangle \end{pmatrix}. \tag{7}$$

С другой стороны, при $g_1 \in GL^\partial(2,F)$, $g_2 \in GL^{g_1^{-1}\partial}(2,F)$ равенство

$$\rho^{g_1^{-1}\partial}\langle g_2, \rho^\partial\langle g_1, z\rangle\rangle = \rho^\partial\langle \partial/\partial g_1 g_2, z\rangle \tag{8}$$

очевидно. Поэтому

$$\rho^\delta\langle \overline{g}^1, V_1\rangle = \rho^\delta\langle \overline{g}^1, \rho^\partial\langle g, V\rangle\rangle = \rho^\partial\langle g^1, V\rangle,$$

откуда немедленно получаем второе равенство системы (4). Этим показано, что из системы равенств (3) следует система равенств (4).

Обратно, пусть верна система равенств (4) и $g_1 \in GL^\partial(2,F)$ удовлетворяет условиям предложения 2. Тогда снова для матрицы $\overline{g}^1 = g^{-1}g^1$ диагональные элементы матрицы (6) равны нулю. Кроме того, справедливы равенства (5) и (7) и второе равенство системы (4). Отсюда легко получим равенство

$$\begin{pmatrix} \rho_4^\delta\langle \overline{g}^1, V_1\rangle \\ \rho_5^\delta\langle \overline{g}^1, V_1\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_4^\partial\langle g^1, V\rangle \\ \rho_5^\partial\langle g^1, V\rangle \end{pmatrix},$$

т. е.

$$\rho^\delta\langle \overline{g}^1, V_1\rangle = \rho^\partial\langle g^1, V\rangle.$$

С другой стороны, согласно (8) имеем

$$\rho^\delta\langle \overline{g}^1, \rho^\partial\langle g, V\rangle\rangle = \rho^\partial\langle g^1, V\rangle.$$

Из этих последних двух равенств получим равенство $V_1 = \rho^\partial\langle g, V\rangle$. $\square$

Замечание. В самом деле, теорема 1 останется справедливой и в случае, когда дифференциальные уравнения вида (1) заданы над коммутативным дифференциальным кольцом $(F, \partial_1, \partial_2)$, причем дискриминант $D\langle V\rangle$ является обратимым элементом кольца. В этом можно убедиться непосредственным вычислением.

В дальнейшем при описании инвариантов будут нужны следующие две леммы для случая $m = 2$.

Лемма 1. *Пусть $(F, \partial_1, \partial_2, \ldots, \partial_m)$ — дифференциальное поле характеристики нуль. Следующие три условия эквивалентны:*

1) *дифференциальные операторы $\partial_1, \partial_2, \ldots, \partial_m$ линейно независимы над F;*
2) *не существует ненулевого ∂-дифференциального многочлена над F, аннулирующегося при всех значениях переменных из F;*
3) *если*

$$p^{\partial}\{x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1m}, x_{21}, \ldots, x_{2m}, \ldots, x_{m1}, \ldots, x_{mm}\} = p^{\partial}\{(x_{ij})_{i,j=\overline{1,m}}\}$$

— такой дифференциальный многочлен над F, что $p^{\partial}\{g\} = 0$ при любом $g = (g_{ij})_{i,j=\overline{1,m}} \in GL^{\partial}(m, F) = \{g = (g_{ij})_{i,j=\overline{1,m}} \in GL(m, F) : \partial_k g_{ij} = \partial_i g_{kj}$ при $i, j, k = \overline{1,m}\}$, то для переменных $(t_{ij})_{i,j=\overline{1,m}}$, для которых $\partial_k t_{ij} = \partial_i t_{kj}$ при $i, j, k = \overline{1,m}$, также выполнено равенство $p^{\partial}\{(t_{ij})_{i,j=\overline{1,m}}\} = 0$.

Доказательство. Эквивалентность условий (1) и (2) доказана в ([13], с. 139). Легко убедиться, что из третьего условия следует второе, и поэтому достаточно показать, что из второго условия следует третье. Предположим обратное. Дифференциальный многочлен $p^{\partial}\{(t_{ij})_{i,j=\overline{1,m}}\}$ может быть переписан в виде многочлена q от мономов $\partial_k^{n_{k,i}} \partial_{k+1}^{n_{k+1,i}} \ldots \partial_m^{n_{m,i}} t_{ki}$, где $n_{i,j}$ — неотрицательные целые числа, $i, k = \overline{1,m}$. Пусть $t_1, t_2, \ldots, t_m$ — дифференциальные переменные над F. Полагая $t_{ij} = \partial_i t_j$, из неравенства $0 \neq p^{\partial}\{(t_{ij})_{i,j=\overline{1,m}}\}$ получим ненулевой дифференциальный многочлен q от $t_1, t_2, \ldots, t_m$, значение которого при всех значениях $t_1, t_2, \ldots, t_m$ из F равно нулю, что противоречит п. 2 данной леммы. $\square$

Лемма 2. *Пусть $(F, \partial_1, \partial_2, \ldots, \partial_m)$ — дифференциальное поле характеристики нуль, $\partial_1, \partial_2, \ldots, \partial_m$ линейно независимы над F, $(t_{ij})_{i,j=\overline{1,m}}$ — такие дифференциальные переменные, что $\partial_k t_{ij} = \partial_i t_{kj}$ при $i, j, k = \overline{1,m}$ и $p^{\partial}\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ — произвольный ненулевой дифференциальный многочлен над F. Тогда дифференциальная рациональная функция $p^{\partial}\{\tau_{11}/\tau, \tau_{21}/\tau, \ldots, \tau_{m1}/\tau\}$ также не равна нулю, где $\tau = \det(t_{ij})_{i,j=\overline{1,m}}$ и τ_{k1} есть алгебраическое дополнение элемента t_{k1} в $(t_{ij})_{i,j=\overline{1,m}}$.*

Доказательство. Пусть $(t_{ij})_{i=\overline{2,m}, j=\overline{1,m}}$ — такие дифференциальные переменные над F, что $\partial_k t_{ij} = \partial_i t_{kj}$ при $i, k = \overline{2,m}$, $j = \overline{1,m}$ и $x_1, x_2, \ldots, x_m$ — произвольные дифференциальные переменные над F. Положим

$$t_{11} = 1/x_1 - \sum_{i=2}^{m} t_{i1} x_i / x_1, \quad t_{1k} = -\sum_{i=2}^{m} t_{ik} x_i / x_1$$

при $k = \overline{2,m}$ и

$$\partial_1 t_{k1} = \partial_k \Big\{1/x_1 - \sum_{i=2}^{m} t_{i1} x_i / x_1\Big\}, \quad \partial_1 t_{kj} = \partial_k \Big\{-\sum_{i=2}^{m} t_{ij} x_i / x_1\Big\}$$

при $j, k = \overline{2,m}$, тогда для $(t_{ij})_{i,j=\overline{1,m}}$ при $i, j, k = \overline{1,m}$ имеем $\partial_k t_{ij} = \partial_i t_{kj}$. Кроме того, для $(t_{ij})_{i,j=\overline{1,m}}$ при любом $k = \overline{1,m}$ выполнены равенства $\tau_{k1}/\tau = x_k$ и поэтому $p^{\partial}\{\tau_{11}/\tau, \tau_{21}/\tau, \ldots, \tau_{m1}/\tau\} \neq 0$. $\square$

Отметим также, что если дифференциальные операторы $\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_m$ линейно независимы над F, то они также линейно независимы над полем ∂ дифференциальных рациональных функций от ∂-дифференциально-алгебраически независимых переменных над F.

Перейдем к описанию инвариантов. Для этого в дальнейшем будем считать, что ∂_1, ∂_2 линейно независимы над F, $K = \{a \in F : \partial_1 a = \partial_2 a = 0\}$ — поле констант F, $z_1, z_2, \dots, z_5$ — дифференциально-алгебраически независимые переменные над F и $z = (z_1, z_2, \dots, z_5)$.

Определение. Дифференциально-рациональную функцию $f^{\partial}\langle z\rangle$ над K назовем инвариантной, если для любого $g \in GL^{\partial}(2, F)$ выполняется равенство

$$f^{g^{-1}\partial}\langle \rho^{\partial}\langle g, z\rangle\rangle = f^{\partial}\langle z\rangle.$$

Множество всех таких инвариантов обозначим через K_1.

Приведем примеры инвариантных дифференциальных рациональных функций. Из второго равенства системы (4) получим

$$\begin{pmatrix} \alpha^{g^{-1}\partial}\langle \rho^{\partial}\langle g, z\rangle\rangle \\ \beta^{g^{-1}\partial}\langle \rho^{\partial}\langle g, z\rangle\rangle \end{pmatrix} = g^{-1} \begin{pmatrix} \alpha^{\partial}\langle z\rangle \\ \beta^{\partial}\langle z\rangle \end{pmatrix}.$$

Поэтому функция

$$\chi_1^{\partial}\langle z\rangle = \left(\begin{pmatrix} \alpha^{\partial}\langle z\rangle \\ \beta^{\partial}\langle z\rangle \end{pmatrix} \right)^t \left(\begin{pmatrix} z_1 & z_2/2 \\ z_2/2 & z_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^{\partial}\langle z\rangle \\ \beta^{\partial}\langle z\rangle \end{pmatrix} \right)^2$$

является инвариантной дифференциальной рациональной функцией. Так же получим инвариантность функции

$$\chi_2^{\partial}\langle z\rangle = \left((\partial\chi_1^{\partial}\langle z\rangle)^t \begin{pmatrix} z_1 & z_2/2 \\ z_2/2 & z_3 \end{pmatrix} \partial\chi_1^{\partial}\langle z\rangle \right)^2.$$

Кроме того, если определим матрицу $\Phi^{\partial}\langle z\rangle$ как матрицу с элементами $\Phi_{11}^{\partial}\langle z\rangle = \partial_1\chi_1^{\partial}\langle z\rangle$, $\Phi_{12}^{\partial}\langle z\rangle = \partial_1\chi_2^{\partial}\langle z\rangle$, $\Phi_{21}^{\partial}\langle z\rangle = \partial_2\chi_1^{\partial}\langle z\rangle$, $\Phi_{22}^{\partial}\langle z\rangle = \partial_2\chi_2^{\partial}\langle z\rangle$, то при $g \in GL^{\partial}(2, F)$ имеем равенство

$$\Phi^{g^{-1}\partial}\langle \rho^{\partial}\langle g, z\rangle\rangle = g^{-1}\Phi^{\partial}\langle z\rangle,$$

и матрица $\Phi^{\partial}\langle z\rangle$ будет невырожденной. Положим $\overline{\partial} = (\Phi^{\partial}\langle z\rangle)^{-1}\partial$.

Следующая теорема дает описание элементов K_1.

Теорема 2. *Поле K_1 является дифференциальным полем над K относительно дифференциальных операторов $\overline{\partial}_1$, $\overline{\partial}_2$ и порождается компонентами $\rho^{\partial}\langle \Phi^{\partial}\langle z\rangle, z\rangle$. Кроме того, его степень дифференциальной трансцендентности над K равна* 3.

Доказательство. Инвариантность K_1 относительно дифференциальных операторов $\overline{\partial}_1$, $\overline{\partial}_2$ непосредственно следует из равенства

$$\Phi^{g^{-1}\partial}\langle \rho^{\partial}\langle g, h, z\rangle\rangle = g^{-1}\Phi^{\partial}\langle z\rangle.$$

Покажем инвариантность компонент $\rho^{\partial}\langle \Phi^{\partial}\langle z\rangle, z\rangle$. Действительно, при $g \in GL^{\partial}(2, F)$ имеем

$$\rho^{g^{-1}\partial}\left\langle \Phi^{g^{-1}\partial}\langle \rho^{\partial}\langle g, z\rangle\rangle, \rho^{\partial}\langle g, z\rangle \right\rangle = \rho^{g^{-1}\partial}\langle g^{-1}\Phi^{\partial}\langle z\rangle, \rho^{\partial}\langle g, z\rangle\rangle,$$

и последнее выражение согласно (8) равно $\rho^{\partial}\langle \Phi^{\partial}\langle z\rangle, z\rangle$, что и требовалось показать.

Если для дифференциальной рациональной функции $f^{\partial}\langle z\rangle$ при любом $g \in GL^{\partial}(2, F)$ выполняется равенство

$$f^{g^{-1}\partial}\langle \rho^{\partial}\langle g, z\rangle\rangle = f^{\partial}\langle z\rangle,$$

то при $g = \Phi^{\partial}\langle z\rangle$ согласно леммам 1 и 2, в частности, имеем

$$f^{(\Phi^{\partial}\langle z\rangle)^{-1}\partial}\left\langle \rho^{\partial}\langle \Phi^{\partial}\langle z\rangle, z\rangle \right\rangle = f^{\partial}\langle z\rangle,$$

т. е. K_1 порождается компонентами $\rho^\partial\langle\Phi^\partial\langle z\rangle, z\rangle$ как $\overline{\partial}$-дифференциальное поле над K.

Для доказательства равенства $\overline{\partial}-\operatorname{tr.deg} K_1/K = 3$ рассмотрим башню $\overline{\partial}$-дифференциальных полей

$$K \subset K_1 \subset K_1\langle\Phi^\partial_{11}\langle z\rangle, \Phi^\partial_{12}\langle z\rangle, \Phi^\partial_{21}\langle z\rangle, \Phi^\partial_{22}\langle z\rangle\rangle.$$

Последнее поле есть $K\langle z\rangle$-поле всех ∂-дифференциальных рациональных функций от z над K, рассматриваемое как $\overline{\partial}$-дифференциальное поле (поскольку $\rho^{\overline{\partial}}\langle(\Phi^\partial\langle z\rangle)^{-1}, \rho^\partial\langle\Phi^\partial\langle z\rangle, z\rangle\rangle = z$), и поэтому $\overline{\partial}-\operatorname{tr.deg} K\langle z\rangle/K = 5$. Для завершения доказательства теоремы 2 достаточно показать равенство $\overline{\partial}-\operatorname{tr.deg} K\langle z\rangle/K_1 = 2$.

Элементы $\Phi^\partial_{21}\langle z\rangle$, $\Phi^\partial_{22}\langle z\rangle$ $\overline{\partial}$-дифференциально-алгебраичны над $K_1\langle\Phi^\partial_{11}\langle z\rangle, \Phi^\partial_{12}\langle z\rangle\rangle$. Покажем это, например, для $\Phi^\partial_{21}\langle z\rangle$. Согласно равенствам

$$\partial_1\Phi^\partial_{21}\langle z\rangle = \partial_2\Phi^\partial_{11}\langle z\rangle, \quad \partial_1\Phi^\partial_{22}\langle z\rangle = \partial_2\Phi^\partial_{12}\langle z\rangle,$$
$$\partial_1 = \Phi^\partial_{11}\langle z\rangle\overline{\partial}_1 + \Phi^\partial_{12}\langle z\rangle\overline{\partial}_2 \quad \text{и} \quad \partial_2 = \Phi^\partial_{21}\langle z\rangle\overline{\partial}_1 + \Phi^\partial_{22}\langle z\rangle\overline{\partial}_2$$

имеем

$$\begin{aligned}(\Phi^\partial_{11}\langle z\rangle\overline{\partial}_1 + \Phi^\partial_{12}\langle z\rangle\overline{\partial}_2)\Phi^\partial_{21}\langle z\rangle &= (\Phi^\partial_{21}\langle z\rangle\overline{\partial}_1 + \Phi^\partial_{22}\langle z\rangle\overline{\partial}_2)\Phi^\partial_{11}\langle z\rangle,\\ (\Phi^\partial_{11}\langle z\rangle\overline{\partial}_1 + \Phi^\partial_{12}\langle z\rangle\overline{\partial}_2)\Phi^\partial_{22}\langle z\rangle &= (\Phi^\partial_{21}\langle z\rangle\overline{\partial}_1 + \Phi^\partial_{22}\langle z\rangle\overline{\partial}_2)\Phi^\partial_{12}\langle z\rangle.\end{aligned} \tag{9}$$

Последнее равенство в векторной форме имеет вид

$$(\Phi^\partial_{11}\langle z\rangle, \Phi^\partial_{12}\langle z\rangle)\overline{\partial}\Phi^\partial_{22}\langle z\rangle = (\Phi^\partial_{21}\langle z\rangle, \Phi^\partial_{22}\langle z\rangle)\overline{\partial}\Phi^\partial_{12}\langle z\rangle. \tag{10}$$

Из первого уравнения системы (9) следует

$$\overline{\partial}[(\Phi^\partial_{11}\langle z\rangle\overline{\partial}_1 + \Phi^\partial_{12}\langle z\rangle\overline{\partial}_2)\Phi^\partial_{21}\langle z\rangle] = \overline{\partial}(\Phi^\partial_{21}\langle z\rangle\overline{\partial}_1\Phi^\partial_{11}\langle z\rangle) + \overline{\partial}\Phi^\partial_{22}\langle z\rangle\overline{\partial}_2\Phi^\partial_{11}\langle z\rangle + \Phi^\partial_{22}\langle z\rangle\overline{\partial}\,\overline{\partial}_2\Phi^\partial_{11}\langle z\rangle.$$

Умножив последнее равенство слева на $(\Phi^\partial_{11}\langle z\rangle, \Phi^\partial_{12}\langle z\rangle)$ с учетом (10), имеем

$$\begin{aligned}&(\Phi^\partial_{11}\langle z\rangle, \Phi^\partial_{12}\langle z\rangle)\overline{\partial}[(\Phi^\partial_{11}\langle z\rangle\overline{\partial}_1 + \Phi^\partial_{12}\langle z\rangle\overline{\partial}_2)\Phi^\partial_{21}\langle z\rangle] =\\ &\quad = (\Phi^\partial_{11}\langle z\rangle, \Phi^\partial_{12}\langle z\rangle)\overline{\partial}(\Phi^\partial_{21}\langle z\rangle\overline{\partial}_1\Phi^\partial_{11}\langle z\rangle) + (\Phi^\partial_{21}\langle z\rangle, \Phi^\partial_{22}\langle z\rangle)\overline{\partial}\Phi^\partial_{12}\langle z\rangle\overline{\partial}_2\Phi^\partial_{11}\langle z\rangle +\\ &\qquad + \Phi^\partial_{22}\langle z\rangle(\Phi^\partial_{11}\langle z\rangle, \Phi^\partial_{12}\langle z\rangle)\overline{\partial}\,\overline{\partial}_2\Phi^\partial_{11}\langle z\rangle.\end{aligned} \tag{11}$$

Если $\overline{\partial}_2\Phi^\partial_{11}\langle z\rangle = 0$, то первое уравнение системы (9) показывает дифференциальную алгебраичность элемента $\Phi^\partial_{21}\langle z\rangle$ над $K_1\langle\Phi^\partial_{11}\langle z\rangle, \Phi^\partial_{12}\langle z\rangle\rangle$.

Если $\overline{\partial}_2\Phi^\partial_{11}\langle z\rangle \neq 0$, то из первого уравнения системы (9) $\Phi^\partial_{22}\langle z\rangle$ можно выразить через $\Phi^\partial_{11}\langle z\rangle$, $\Phi^\partial_{12}\langle z\rangle$, $\Phi^\partial_{21}\langle z\rangle$ и их $\overline{\partial}$-дифференциалы и положить это вместо $\Phi^\partial_{22}\langle z\rangle$ в (11). Такая процедура дает ненулевое $\overline{\partial}$-дифференциальное полиномиальное уравнение над $K_1\langle\Phi^\partial_{11}\langle z\rangle, \Phi^\partial_{12}\langle z\rangle\rangle$, которое аннулируется на $\Phi^\partial_{21}\langle z\rangle$, что показывает $\overline{\partial}$-дифференциальную алгебраичность элемента $\Phi^\partial_{21}\langle z\rangle$ над $K_1\langle\Phi^\partial_{11}\langle z\rangle, \Phi^\partial_{12}\langle z\rangle\rangle$.

Покажем $\overline{\partial}$-дифференциально-алгебраическую независимость системы элементов $\Phi^\partial_{11}\langle z\rangle$, $\Phi^\partial_{12}\langle z\rangle$ над K_1. Пусть $p^{\overline{\partial}}\{t_1, t_2\}$ — такой ненулевой дифференциальный многочлен над K_1, что

$$p^{\overline{\partial}}\{\Phi^\partial_{11}\langle z\rangle, \Phi^\partial_{12}\langle z\rangle\} = 0.$$

Тогда это равенство должно выполняться и при замене $z \mapsto \rho^\partial\langle g, z\rangle$, $\partial \mapsto g^{-1}\partial$, где $g \in GL^\partial(2, F)$. Так как при этом дифференциальный оператор $\overline{\partial}$ и коэффициенты многочлена $p^{\overline{\partial}}\{t_1, t_2\}$ не меняются, имеем

$$p^{\overline{\partial}}\{G_{11}\Phi^\partial_{11}\langle z\rangle + G_{12}\Phi^\partial_{21}\langle z\rangle, G_{11}\Phi^\partial_{12}\langle z\rangle + G_{12}\Phi^\partial_{22}\langle z\rangle\} = 0, \tag{12}$$

где G_{ij} — соответствующие элементы матрицы, обратной к g. Пусть $(t_{ij})_{i,j=1,2}$ — такие $\overline{\partial}$-переменные, что $\overline{\partial}_1 t_{21} = \overline{\partial}_2 t_{11}$, $\overline{\partial}_1 t_{22} = \overline{\partial}_2 t_{12}$. Нетрудно убедиться, что для матрицы

$$g = \begin{pmatrix} \Phi_{11}^{\partial}\langle z\rangle & \Phi_{12}^{\partial}\langle z\rangle \\ \Phi_{21}^{\partial}\langle z\rangle & \Phi_{22}^{\partial}\langle z\rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix}$$

выполняются равенства $\partial_2 g_{1j} = \partial_1 g_{2j}$ при $j = 1, 2$, и поэтому согласно лемме 1 из равенства (12) имеем $p^{\overline{\partial}}\{\tau_{11}/\tau, \tau_{21}/\tau\} = 0$, поскольку в этом случае $G_{11}\Phi_{11}^{\partial}\langle z\rangle + G_{12}\Phi_{21}^{\partial}\langle z\rangle = \tau_{11}/\tau = t_{22}/(t_{11}t_{22} - t_{12}t_{21})$, $G_{11}\Phi_{12}^{\partial}\langle z\rangle + G_{12}\Phi_{22}^{\partial}\langle z\rangle = \tau_{21}/\tau = -t_{12}/(t_{11}t_{22} - t_{12}t_{21})$. Полученное равенство $p^{\overline{\partial}}\{\tau_{11}/\tau, \tau_{21}/\tau\} = 0$ противоречит лемме 2. $\square$

Предположим, что заданы такие произвольные $\chi_1^{\partial}\langle z\rangle$, $\chi_2^{\partial}\langle z\rangle$ элементы K_1, что $\Phi^{\partial}\langle z\rangle$ — обратимая матрица, построенная с помощью $\chi_1^{\partial}\langle z\rangle$, $\chi_2^{\partial}\langle z\rangle$ вышеизложенным способом. Положим

$$X = \{z \in F^5 : \chi_1^{\partial}\langle z\rangle,\ \chi_2^{\partial}\langle z\rangle \text{ определены в } z \text{ и } (z_2^2 - z_1 z_3)\det\Phi^{\partial}\langle z\rangle \neq 0\}.$$

Согласно лемме 2 $X \neq 0$.

Следующая теорема является аналогом известного результата из алгебраической теории инвариантов о разделении инвариантами орбит общего положения.

Теорема 3. *Пусть $g \in GL^{\partial}(2, F)$, $\delta = g^{-1}\partial$. Если для уравнения* (1) $V \in X$ *и для любого $f^{\partial}\langle z\rangle \in K_1$, определенного на X, выполняется равенство $f^{\partial}\langle V\rangle = f^{\partial}\langle V_1\rangle$, то уравнения* (1) *и* (2) *эквивалентны относительно g.*

Доказательство. Поскольку $\delta = g^{-1}\partial$ и $\chi_i^{\delta}\langle V_1\rangle = \chi_i^{\partial}\langle V\rangle$ при $i = 1, 2$, имеем $\Phi^{\delta}\langle V_1\rangle = g^{-1}\Phi^{\partial}\langle V\rangle$. Компоненты матрицы

$$(\Phi^{\partial}\langle z\rangle)^t \begin{pmatrix} z_1 & z_2/2 \\ z_2/2 & z_3 \end{pmatrix} \Phi^{\partial}\langle z\rangle$$

и вектора

$$(\Phi^{\partial}\langle z\rangle)^{-1} \begin{pmatrix} \alpha^{\partial}\langle z\rangle \\ \beta^{\partial}\langle z\rangle \end{pmatrix}$$

определены на X и являются инвариантами. Поэтому

$$(\Phi^{\delta}\langle V_1\rangle)^t \begin{pmatrix} A_1 & B_1/2 \\ B_1/2 & C_1 \end{pmatrix} \Phi^{\delta}\langle V_1\rangle = (\Phi^{\delta}\langle V\rangle)^t \begin{pmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{pmatrix} \Phi^{\partial}\langle V\rangle,$$

$$(\Phi^{\delta}\langle V_1\rangle)^{-1} \begin{pmatrix} \alpha^{\delta}\langle V_1\rangle \\ \beta^{\delta}\langle V_1\rangle \end{pmatrix} = (\Phi^{\partial}\langle V\rangle)^{-1} \begin{pmatrix} \alpha^{\partial}\langle V\rangle \\ \beta^{\partial}\langle V\rangle \end{pmatrix}.$$

Эти равенства означают, что

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1/2 \\ B_1/2 & C_1 \end{pmatrix} = g^t \begin{pmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{pmatrix} g,$$

$$\begin{pmatrix} \alpha^{\delta}\langle V_1\rangle \\ \beta^{\delta}\langle V_1\rangle \end{pmatrix} = g^{-1} \begin{pmatrix} \alpha^{\partial}\langle V\rangle \\ \beta^{\partial}\langle V\rangle \end{pmatrix},$$

и согласно теореме 1 это и означает эквивалентность уравнений (1) и (2) относительно g.

Литература

1. Wilczynski E.J. *Projective differential geometry of curves and ruled surfaces.* – Leipzig: B.G. Teubner, 1906.
2. Беркович Л.М. *Задача Альфана об эквивалентности обыкновенных линейных дифференциальных уравнений* // УМН. – 1986. – Т. 41. – Вып. 1. – С. 183–184.
3. Петровский И.Г. *Лекции об уравнениях с частными производными.* – 3-е изд. – М.: Физматгиз, 1961. – 400 с.
4. Овсянников Л.В. *Групповой анализ дифференциальных уравнений.* – М.: Наука, 1978.
5. Ибрагимов Н.Х. *Группы преобразований в математической физике.* – М.: Наука, 1983. – 280 с.
6. Удалов А.С. *К теории кривых в проективном пространстве n измерений* // ДАН СССР. – 1962. – Т. 146. – № 1. – С. 46–49.
7. Цирулик В.Г., Брусенцев Ф.А. *Об эквивалентности свойств коммутативной факторизуемости и приводимости линейных дифференциальных операторов* // Изв. вузов. Математика. – 1976. – № 8. – С. 81–84.
8. Королев Г.М. *Инварианты линейного дифференциального уравнения и его приводимость* // Дифференц. и интегр. уравнения. – Горький, 1981. – С. 38–41.
9. Newman F. *A survey of global properties of linear differential equations of the n-th order* // Lect. Notes. Math. – 1982. – № 964. – P. 548–563.
10. Бекбаев У.Д. *Об эквивалентности и инвариантах обыкновенных дифференциальных уравнений* // Дифференц. уравнения. – 1994. – Т. 30. – № 5. – С. 911–912.
11. Бекбаев У.Д. *Еще раз об эквивалентности и инвариантах дифференциальных уравнений вида* $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = 0$ // Узб. матем. журн. – 1995. – № 3. – С. 19–31.
12. Михалев А.В., Панкратьев Е.В. *Дифференциальная и разностная алгебра* // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Алгебра. Топология. Геометрия. – 1987. – Т. 25. – С. 67–139.
13. Kolchin E.R. *Differential algebra and algebraic groups.* – N. Y.–London: Academic Press, 1973. – 446 p.

Институт математики
Академии наук Узбекистана

Поступила
22.04.1997