ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2005 МАТЕМАТИКА № 12 (523)

УДК 519.853

И.В. КОННОВ

ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД ДВОЙСТВЕННОГО ТИПА ДЛЯ СИСТЕМ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ

1. Введение

Вариационные неравенства в настоящее время являются достаточно распространенным и эффективным инструментом для исследования и поиска решений самых разнообразных задач равновесного типа (напр., [1]–[3]). По определению решение вариационного неравенства состоит в нахождении точки $z^* \in Z$ такой, что

$$\langle Q(z^*), z - z^* \rangle \geq 0 \quad \forall z \in Z,$$

где Z — некоторое выпуклое множество в нормированном пространстве E, $Q : Z \to E^*$ — заданное отображение (E^* означает сопряженное пространство к E). В работах [4]–[6] была рассмотрена обобщенная прямо-двойственная система вариационных неравенств и показано, что многие равновесные модели экономики формулируются в виде такой системы. Решение системы состоит в определении пары точек $(x^*, y^*) \in X \times Y$ таких, что

$$\langle T(x^*), x - x^* \rangle + \langle y^*, H(x) - H(x^*) \rangle \geq 0 \quad \forall x \in X, \tag{1}$$

$$\langle B(y^*) - H(x^*), y - y^* \rangle \geq 0 \quad \forall y \in Y, \tag{2}$$

где X и Y — непустые, выпуклые и замкнутые подмножества из R^n и

$$R^m_+ = \{y \in R^m \mid y_i \geq 0,\ i = 1, \dots, m\}$$

соответственно, $T : X \to R^n$ и $B : R^m_+ \to R^m$ — заданные непрерывные отображения, $H : X \to R^m$ — непрерывное отображение, компоненты которого $H_i : X \to R$, $i = 1, \dots, m$, являются выпуклыми функциями. Система (1), (2) также обобщает условия оптимальности в виде седловой точки функции Лагранжа [4]–[6], что объясняет ее название. Кроме того, в [7] показано, что к виду (1), (2) приводятся также модели сетевого равновесия и ряд неявных задач оптимизации. Для решения системы (1), (2) в [4]–[7] были предложены итерационные методы двойственного типа, в которых использованы (для обеспечения сходимости) свойства сильной монотонности отображений T и B, а также выполнение условия Липшица для отображения H. Заметим, что условия сильной монотонности можно заменить обычной монотонностью, если в итеративную схему ввести проксимальный метод [6], тогда вспомогательные системы в этом методе будут обладать требуемыми свойствами.

Однако предложенные ранее двойственные методы требуют точного решения вспомогательных задач по переменным x и y, что может вызвать затруднения при их реализации, в особенности для случая нелинейных отображений T и B. Поэтому основной целью данной работы

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта № 04-01-00484).

является построение приближенных двойственных методов, реализуемых и в нелинейном случае. Кроме того, их сходимость доказывается при ослабленных предположениях на отображения T и B по сравнению с предположениями из [4]–[7] для аналогичных точных методов. Таким образом, данные методы могут быть непосредственно применены для гораздо более широкого класса прикладных задач.

2. Приближенный проективный метод

Основой для поиска решений системы (1), (2) будет приближенный метод проективного типа для следующего вариационного неравенства: найти точку $y^* \in Y$ такую, что

$$\langle F(y^*), y - y^* \rangle \geq 0 \quad \forall y \in Y, \tag{3}$$

где $F : Y \to R^m$ — некоторое заданное отображение. Несмотря на большое число работ по проективным методам (напр., [1], [8]), обоснование метода с неточным вычислением элементов потребует дополнительных результатов. Вначале напомним определения свойств монотонности для отображений.

Отображение $F : Y \to R^m$ называется

a) *монотонным*, если для любых точек $y', y'' \in Y$

$$\langle F(y') - F(y''), y' - y'' \rangle \geq 0;$$

b) *сильно монотонным* с константой $\varkappa > 0$, если для любых точек $y', y'' \in Y$

$$\langle F(y') - F(y''), y' - y'' \rangle \geq \varkappa \|y' - y''\|^2;$$

c) *обратно сильно монотонным* (*ОСМ-отображением*) с константой $\gamma > 0$, если для любых точек $y', y'' \in Y$

$$\langle F(y') - F(y''), y' - y'' \rangle \geq \gamma \|F(y') - F(y'')\|^2.$$

Отметим, что свойство обратной сильной монотонности F означает сильную монотонность обратного отображения F^{-1} и называется также ко-коэрцитивностью (напр., [9]). Это свойство влечет монотонность и выполнение условия Липшица для отображения F с константой $1/\gamma$. С другой стороны, любое отображение, удовлетворяющее условию Липшица, которое к тому же либо сильно монотонно, либо является градиентом выпуклой функции, также является ОСМ-отображением. Напомним также, что отображение называется *локально липшицевым*, если оно удовлетворяет условию Липшица на любом ограниченном подмножестве области определения. По аналогии, *локальным ОСМ-отображением* будем называть любое отображение, которое является ОСМ-отображением на любом ограниченном подмножестве области определения.

Рассмотрим теперь следующий проективный метод для задачи (3).

Метод 1. Выберем точку $u^0 \in Y$, последовательность положительных чисел $\{\alpha_k\}$ и последовательности неотрицательных чисел $\{\delta'_k\}$, $\{\delta''_k\}$ такие, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\delta'_k + \delta''_k) < +\infty. \tag{4}$$

Если известна точка $u^k \in Y$, $k \geq 0$, то определяем точку $u^{k+1} \in Y$ из условия

$$\|u^{k+1} - \widetilde{u}^{k+1}\| \leq \delta''_k, \tag{5}$$

где $\widetilde{u}^{k+1} \in Y$ является решением вариационного неравенства

$$\langle f^k + \alpha_k^{-1}(\widetilde{u}^{k+1} - u^k), u - \widetilde{u}^{k+1} \rangle \geq 0 \quad \forall u \in Y, \tag{6}$$

при этом

$$\|f^k - F(u^k)\| \le \delta'_k. \tag{7}$$

Таким образом, метод допускает как приближенное решение вспомогательной задачи (6), так и неточное вычисление значений отображения F. С другой стороны, точка $\widetilde{u}^{k+1}$ есть результат проекции точки $u^k - \alpha_k f^k$ на множество Y, т. е. (6) можно переписать в виде

$$\widetilde{u}^{k+1} = \pi_Y(u^k - \alpha_k f^k), \tag{8}$$

где $\pi_Y(\cdot)$ — отображение проектирования на Y. Приближенное решение задачи (6) позволяет реализовать метод даже в случае, когда множество Y задано с помощью нелинейных ограничений. Кроме того, такое решение значительно облегчает реализацию и в линейном случае.

Вначале приведем два известных результата.

Лемма 2.1 ([8], гл. 3, лемма 1.1). *Если числовая последовательность $\{\mu_k\}$ удовлетворяет условиям*

$$\mu_{k+1} \le \mu_k + \delta_k, \quad \delta_k \ge 0, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k < +\infty,$$

то она имеет предел.

Лемма 2.2 ([8], гл. 5, лемма 1.4). *Если отображение $Q : Y \to R^m$ является ОСМ-отображением с константой γ, то отображение $y \mapsto y - \pi_Y[y - \alpha Q(y)]$ при $\alpha \in [0, 4\gamma)$ является ОСМ-отображением с константой $\widetilde{\gamma} = 1 - \alpha/(4\gamma)$.*

Обоснование сходимости метода 1 будет проводиться на основе следующего свойства итерационного процесса поиска решений задачи $P(y^*) = 0$, которое является обобщением и модификацией близких результатов из ([8], гл. 5, теорема 1 и [10], предложение 2).

Предложение 2.1. *Пусть отображения P и P_k имеют непустое и совпадающее множество корней V^*, отображения P_k являются локальными ОСМ-отображениями, последовательность $\{u^k\}$ построена по правилам*

$$u^{k+1} = u^k - \lambda_k p^k, \quad \|p^k - P_k(u^k)\| \le \delta_k, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k < +\infty \tag{9}$$

и выполняются условия:

a) *для любого $u \in R^m$ существует такая последовательность индексов $\{k_s\}$, что*

$$\lim_{s \to \infty} P_{k_s}(u) = d(u), \quad \|d(u)\| < \infty;$$

b) *для любого $u \notin V^*$ выполняется $\inf\limits_{k \ge 0} \|P_k(u)\| > 0$;*

c) *для фиксированного ограниченного множества V ОСМ-константы γ_k отображений P_k на V ограничены снизу числом $\gamma' = \gamma'(V) > 0$.*

Тогда существуют числа $\lambda', \lambda'' > 0$ такие, что при $\lambda_k \in [\lambda', \lambda'']$ последовательность $\{u^k\}$ сходится к некоторой точке $u^* \in V^*$.

Доказательство. Выберем произвольный элемент $\widetilde{u} \in V^*$, обозначим $v^{k+1} = u^k - \lambda_k P_k(u^k)$. Тогда имеем

$$\begin{aligned}\|v^{k+1} - \widetilde{u}\|^2 &= \|[u^k - \lambda_k P_k(u^k)] - [\widetilde{u} - \lambda_k P_k(\widetilde{u})]\|^2 = \\ &= \|u^k - \widetilde{u}\|^2 - 2\lambda_k \langle P_k(u^k) - P_k(\widetilde{u}), u^k - \widetilde{u}\rangle + \lambda_k^2 \|P_k(u^k) - P_k(\widetilde{u})\|^2 \le \\ &\le \|u^k - \widetilde{u}\|^2 - 2\lambda_k \gamma_k \|P_k(u^k)\|^2 + \lambda_k^2 \|P_k(u^k)\|^2,\end{aligned}$$

где γ_k — ОСМ-константа для P_k на множестве $\{u \,|\, \|u-\widetilde{u}\| \le \|u^k-\widetilde{u}\|\}$. Если выбрать

$$\lambda_k < 2\gamma_k, \tag{10}$$

то

$$\|v^{k+1}-\widetilde{u}\|^2 \le \|u^k-\widetilde{u}\|^2 - \lambda_k(2\gamma_k-\lambda_k)\|P_k(u^k)\|^2 \le \|u^k-\widetilde{u}\|^2.$$

Теперь, используя (8), получаем

$$\|u^{k+1}-\widetilde{u}\| \le \|v^{k+1}-\widetilde{u}\| + \|u^{k+1}-v^{k+1}\| \le \|u^k-\widetilde{u}\| + \delta_k,$$

но тогда последовательность $\{u^k\}$ ограничена, т. е. точки u^k и $\widetilde{u}$ находятся в некотором ограниченном множестве $\widetilde{V}$. Следовательно, по условию c) $\gamma_k \ge \gamma' > 0$ для $k = 0, 1, \ldots$, и можно определить $\lambda'' < 2\gamma'$ и $\lambda' \in (0, \lambda'')$. Таким образом,

$$\|u^{k+1}-\widetilde{u}\|^2 \le \|u^{k+1}-v^{k+1}\|^2 + 2\langle u^{k+1}-v^{k+1}, v^{k+1}-\widetilde{u}\rangle + \|v^{k+1}-\widetilde{u}\|^2 \le$$
$$\le \|u^k-\widetilde{u}\|^2 - \lambda_k(2\gamma'-\lambda_k)\|P_k(u^k)\|^2 + 2\delta_k\|u^k-\widetilde{u}\| + \delta_k^2 \le \|u^k-\widetilde{u}\|^2 - c_1\|P_k(u^k)\|^2 + c_2\delta_k,$$

где $c_1, c_2 < \infty$. Учитывая (9), из леммы 2.1 теперь получаем

$$\lim_{k\to\infty} \|u^k-\widetilde{u}\| = \delta \ge 0 \tag{11}$$

и

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|P_k(u^k)\|^2 < +\infty. \tag{12}$$

Из ограниченности последовательности $\{u^k\}$ следует, что она имеет предельные точки. Пусть подпоследовательность $\{u^{k_l}\}$ сходится к u^*, тогда имеем

$$\gamma_{k_l}\|P_{k_l}(u^*) - P_{k_l}(u^{k_l})\|^2 \le \langle P_{k_l}(u^*), u^*-u^{k_l}\rangle - \langle P_{k_l}(u^{k_l}), u^*-u^{k_l}\rangle.$$

Из условий (11), (12) и a), b) получаем, не ограничивая общности, что $\lim\limits_{k\to\infty} \|P_{k_l}(u^*) - P_{k_l}(u^{k_l})\| = 0$. Это с учетом (12) дает

$$\lim_{k\to\infty} \|P_{k_l}(u^*)\| = 0.$$

Теперь из условия b) следует, что $u^* \in V^*$. Поэтому можно положить $\widetilde{u} = u^*$ в (11). Тогда $\delta = 0$ и утверждение справедливо. □

На основе полученных результатов установим сходимость метода 1.

Теорема 2.1. *Если задача* (3) *имеет решение,* $F : Y \to R^m$ *— локальное ОСМ-отображение, то существуют числа* $\alpha', \alpha'' > 0$ *такие, что последовательность* $\{u^k\}$*, построенная методом* 1 *с* $\alpha_k \in [\alpha', \alpha'']$*, сходится к решению задачи* (3).

Доказательство. Определим отображения $P_k : R^m \to R^m$ по формуле

$$P_k(u) = u - \pi_Y[u - \alpha_k F(u)],$$

а также

$$P(u) = u - \pi_Y[u - \alpha F(u)]$$

для произвольного фиксированного числа $\alpha > 0$. Тогда все отображения P, P_k имеют одинаковое множество корней, совпадающее с множеством решений задачи (3) (напр., [8], гл. 5, лемма 1.5). Покажем, что последовательность $\{u^k\}$, построенная методом 1, удовлетворяет всем условиям предложения 2.1. Действительно, в (9) можно положить $\lambda_k = 1$, тогда $p^k = u^k - u^{k+1}$. Кроме того, используя (5), (7), (8) и нерастягивающее свойство проекции, получаем

$$\|p^k - P_k(u^k)\| = \|(u^k - u^{k+1}) - (u^k - \pi_Y[u^k - \alpha_k F(u^k)])\| = \|u^{k+1} - \pi_Y[u^k - \alpha_k F(u^k)]\| \leq$$
$$\leq \|u^{k+1} - \widetilde{u}^{k+1}\| + \|\widetilde{u}^{k+1} - \pi_Y[u^k - \alpha_k F(u^k)]\| \leq$$
$$\leq \delta_k'' + \|\pi_Y[u^k - \alpha_k f^k] - \pi_Y[u^k - \alpha_k F(u^k)]\| \leq \delta_k'' + \alpha_k\|f^k - F(u^k)\| \leq \delta_k'' + \alpha_k\delta_k' \leq \delta_k'' + \alpha''\delta_k' = \delta_k,$$

и согласно (4) выполняются все условия в (9). Поскольку F — локальное ОСМ-отображение, то для ограниченного множества V оно является ОСМ-отображением с некоторой константой $\gamma = \gamma(V)$, тогда по лемме 2.2 отображения P_k обладают ОСМ-свойством с константой $\gamma_k = \gamma_k(V) = 1 - \alpha_k/(4\gamma)$, если выбрать $\alpha_k \in (0, 4\gamma)$. Аналогично, это свойство выполняется для отображения P с константой $\widetilde{\gamma} = 1 - \alpha/(4\gamma)$, если $\alpha \in (0, 4\gamma)$. Итак, все отображения P и P_k являются локальными ОСМ-отображениями. Более того, если $\alpha_k < 2\gamma$, то

$$2\gamma_k = 2(1 - \alpha_k/(4\gamma)) > 2(1 - 1/2) = 1 = \lambda_k$$

и выполняется неравенство (10) и условие c) предложения 2.1. В силу ограниченности последовательности $\{u^k\}$, отображение F будет ОСМ-отображением на множестве $\widetilde{V}$, содержащем одно из решений и последовательность $\{u^k\}$, и можно определить $\alpha' < \alpha'' < 2\gamma(\widetilde{V})$. Условия a) и b) предложения 2.1 следуют из непрерывности отображения F, нерастягивающего свойства проекции и ограниченности последовательности $\{\alpha_k\}$. Таким образом, последовательность $\{u^k\}$ сходится к решению задачи (3). □

3. Проективный двойственный метод

Перейдем теперь к решению основной системы (1), (2). В этом разделе, дополнительно к сделанным в разделе 1 предположениям, будем считать, что отображение $T : X \to R^n$ сильно монотонно с константой $\varkappa > 0$, отображение $B : R^m_+ \to R^m$ локально обратно сильно монотонно, отображение $H : X \to R^m$ удовлетворяет условию Липшица, его компоненты $H_i : X \to R$, $i = 1, \dots, m$, являются выпуклыми функциями.

При сделанных предположениях для произвольной точки $y \in R^m_+$ существует единственное решение $x(y) \in X$ вариационного неравенства

$$\langle T[x(y)], x - x(y)\rangle + \langle y, H(x) - H[x(y)]\rangle \geq 0 \quad \forall x \in X,$$

(напр., [3], следствие 2.1.4). Поэтому отображение $y \mapsto x(y)$ однозначно и определено на R^m_+. Тогда можно определить однозначное отображение $C : R^m_+ \to R^m$ по формуле

$$C(y) = -H[x(y)].$$

Установим свойства монотонности и непрерывности для отображения C.

Лемма 3.1. a) *Для любых точек $y', y'' \in R^m_+$ выполняется неравенство*

$$\langle y' - y'', C(y') - C(y'')\rangle \geq \varkappa\|x(y') - x(y'')\|^2.$$

b) *Отображение C является ОСМ-отображением с константой $\gamma = \varkappa/L_H^2$, где L_H — константа Липшица отображения H.*

Доказательство. Выберем произвольно точки $y, y'' \in R^m_+$ и обозначим $x' = x(y'), x'' = x(y'')$. По определению имеем

$$\langle T(x'), x'' - x'\rangle + \langle y', H(x'') - H(x')\rangle \geq 0$$

и

$$\langle T(x''), x' - x''\rangle + \langle y'', H(x') - H(x'')\rangle \geq 0.$$

После сложения этих неравенств получаем

$$\langle y' - y'', H(x'') - H(x') \rangle \geq \langle T(x') - T(x''), x' - x'' \rangle \geq \varkappa \|x' - x''\|^2,$$

т. е. утверждение a) справедливо. Поскольку отображение H удовлетворяет условию Липшица, т. е.

$$\|H(x') - H(x'')\| \leq L_H \|x' - x''\| \quad \forall x', x'' \in X,$$

то

$$\langle y' - y'', C(y') - C(y'') \rangle \geq \varkappa \|x(y') - x(y'')\|^2 \geq (\varkappa / L_H^2) \|C(y') - C(y'')\|^2,$$

т.е. C является ОСМ-отображением с константой $\gamma = \varkappa / L_H^2$. Поэтому утверждение b) также справедливо. $\square$

Как уже отмечалось, система (1), (2) представляет собой обобщение условий оптимальности в виде седловой точки. Действительно, в том случае, когда отображение B постоянно, т. е. $B(y) \equiv b$, $Y = R_+^m$, а отображение T является градиентом некоторой выпуклой функции f, соотношения (1), (2) представляют собой условия оптимальности для задачи минимизации функции f на множестве $D = \{x \in X \mid H(x) \leq b\}$ и определяют седловую точку обычной функции Лагранжа $L(x,y) = f(x) + \langle y, H(x) - b \rangle$.

Рассмотрим следующее *двойственное вариационное неравенство*: найти точку $y^* \in Y$ такую, что

$$\langle B(y^*) + C(y^*), y - y^* \rangle \geq 0 \quad \forall y \in Y. \tag{13}$$

Установим связь между задачей (13) и системой (1),(2).

Лемма 3.2. a) *Если пара точек* (x^*, y^*) *является решением системы* (1), (2), *то точка* y^* *является решением задачи* (13).

b) *Если точка* y^* *является решением задачи* (13) *и* $x^* = x(y^*)$, *то пара точек* (x^*, y^*) *является решением системы* (1), (2).

Доказательство этих утверждений следует из определений задач и отображения C. Таким образом, вместо решения системы (1), (2) можно решать вариационное неравенство (13). Очевидно, для этого можно использовать метод 1, если определить отображение F по формуле

$$F(y) = B(y) + C(y). \tag{14}$$

Соответствующая модификация метода будет определяться следующим образом.

Метод 2. Выберем точку $y^0 \in Y$, последовательность положительных чисел $\{\alpha_k\}$ и последовательности неотрицательных чисел $\{\varepsilon_k'\}, \{\varepsilon_k''\}$ такие, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\varepsilon_k' + \varepsilon_k'') < +\infty. \tag{15}$$

На каждой k-й итерации, $k = 0, 1, \ldots$, известна точка $y^k \in Y$, тогда определяем точку $x^k \in X$ такую, что

$$\|x^k - x(y^k)\| \leq \varepsilon_k', \tag{16}$$

полагаем $c^k = -H(x^k)$ и вычисляем итерационную точку $y^{k+1} \in Y$ из условий

$$\|y^{k+1} - \pi_Y[y^k - \alpha_k(B(y^k) + c^k)]\| \leq \varepsilon_k'', \tag{17}$$

после чего переходим к следующей итерации.

Установим сходимость метода 2 к решению исходной задачи.

Теорема 3.1. *Предположим, что система* (1), (2) *имеет решение. Существуют числа* $\alpha', \alpha'' > 0$ *такие, что если последовательность* $\{(x^k, y^k)\}$ *построена методом* 2 *при* $\alpha_k \in [\alpha', \alpha'']$, *то она сходится к решению системы* (1), (2).

Доказательство. По условию отображение B является локальным ОСМ-отображением и таково же отображение C согласно лемме 3.1 b). Для любого ограниченного множества $V \subseteq Y$ они являются ОСМ-отображениями с некоторыми константами γ_1 и γ_2 соответственно, т. е. для любых $y', y'' \in V$ имеем

$$\langle B(y') - B(y''), y' - y'' \rangle \geq \gamma_1 \|B(y') - B(y'')\|^2$$

и

$$\langle C(y') - C(y''), y' - y'' \rangle \geq \gamma_2 \|C(y') - C(y'')\|^2.$$

Поэтому для отображения F из (14) получаем

$$\begin{gathered}\langle F(y') - F(y''), y' - y'' \rangle \geq \gamma_1 \|B(y') - B(y'')\|^2 + \gamma_2 \|C(y') - C(y'')\|^2 \geq \\ \geq (\gamma/2)[\|B(y') - B(y'')\|^2 + \|C(y') - C(y'')\|^2] + \\ +(\gamma/2)[2\|B(y') - B(y'')\|\|C(y') - C(y'')\|] \geq (\gamma/2)\|F(y') - F(y'')\|^2,\end{gathered}$$

где $\gamma = \min\{\gamma_1, \gamma_2\}$, т. е. F является ОСМ-отображением на V. Теперь условия теоремы 2.1 для отображения F и задачи (13) выполняются. Покажем, что выполняются условия (4)–(7). Очевидно, можно положить $\delta''_k = \varepsilon''_k$ согласно (5) и (17). По построению

$$\|c^k - C(y^k)\| = \|H(x^k) - H[x(y^k)]\| \leq L_H \|x^k - x(y^k)\| \leq L_H \varepsilon'_k,$$

где L_H — константа Липшица для отображения H. Поэтому можно определить $\delta'_k = L_H \varepsilon'_k$ и из (15) следует, что соотношения (4) и (7) выполняются. Поэтому утверждение теоремы 2.1 справедливо, т. е. найдутся такие числа $\alpha', \alpha'' > 0$, что при $\alpha_k \in [\alpha', \alpha'']$ последовательность $\{y^k\}$ сходится к точке y^*, которая является решением задачи (13). Из леммы 3.1 следует непрерывность отображения $y \mapsto x(y)$, поэтому с учетом (15) и (16) предельные точки последовательности $\{x^k\}$ существуют и совпадают с единственной точкой $x^* = x(y^*)$. А это значит, что последовательность $\{x^k\}$ сходится к точке x^*. По лемме 3.2 пара точек (x^*, y^*) составляет решение системы (1), (2). □

Поскольку метод 2 также допускает неточное решение вспомогательных задач как по прямым в (16), так и по двойственным переменным в (17), то он может быть полностью численно реализован для различных типов отображений T и B и множеств X и Y. Наибольшую сложность при реализации будет представлять приближенное вычисление точки $x(y^k)$ в (16). Для получения решения с требуемой точностью можно использовать аппарат оценочных функций (напр., [10], [11]). Следуя этому подходу, для заданного числа $\lambda > 0$ и функции $\Phi : Z \times Z \to R$ такой, что $\Phi(z, z) = 0$ для любого $z \in Z$, а также

$$\Phi(z, z') + \Phi(z', z) \leq -\tau \|z - z'\|^2 \quad \forall z, z' \in Z, \tag{18}$$

где Z — непустое, выпуклое и замкнутое подмножество конечномерного пространства E, определим вспомогательную функцию

$$\widetilde{\varphi}_\lambda(z) = \max_{z' \in Z} \{-\Phi(z, z') - 0{,}5\lambda \|z - z'\|^2\}. \tag{19}$$

Если функция $\Phi(z, \cdot)$ выпукла и непрерывна для каждого $z \in Z$, то внутренняя задача в (19) имеет единственное решение $w(z)$, т.е.

$$\widetilde{\varphi}_\lambda(z) = -\Phi(z, w(z)) - 0{,}5\lambda \|z - w(z)\|^2.$$

Отметим также, что в случае, когда выполняется (18) с $\tau > 0$, функция Φ непрерывна, а функция $\Phi(z, \cdot)$ выпукла для любого $z \in Z$, общая задача равновесия, которая состоит в нахождении точки $z^* \in Z$ такой, что

$$\Phi(z^*, z') \geq 0 \quad \forall z' \in Z,$$

имеет единственное решение (напр., [3], следствие 2.1.4). Функция $\widetilde{\varphi}_\lambda$ является оценочной для этой задачи в том смысле, что $\widetilde{\varphi}_\lambda(z) \geq 0$ для любого $z \in Z$ и условие $\widetilde{\varphi}_\lambda(z) = 0$ эквивалентно тому, что $z = z^*$. Кроме того, в этих условиях функция $\widetilde{\varphi}_\lambda$ непрерывна ([11], предложения 3.1 и 3.2).

Лемма 3.3 ([11], лемма 4). *Пусть выполняется соотношение* (18) *с* $\tau > 0$*, функция* Φ *непрерывна, а функция* $\Phi(z, \cdot)$ *выпукла для любого* $z \in Z$*. Тогда для любой точки* $z \in Z$ *выполняется неравенство*

$$\widetilde{\varphi}_\lambda(z) \geq \sigma \|z - z^*\|^2,$$

где

$$\sigma = \begin{cases} \tau - 0{,}5\lambda, & \textit{если } \tau \geq \lambda; \\ 0{,}5\tau^2/\lambda, & \textit{если } \tau < \lambda. \end{cases}$$

Теперь рассмотрим функцию

$$\Phi(x, x') = \langle T(x), x' - x \rangle + \langle y, H(x') - H(x) \rangle \tag{20}$$

при фиксированном $y \in R^m_+$ и определим $Z = X$. Тогда z^* совпадает с $x(y)$, $\Phi(x, x) = 0$ для любого $x \in X$, более того, при сделанных предположениях выполняются все условия леммы 3.3 для функции Φ из (20), при этом $\tau = \varkappa$. Если определить

$$\varphi_\lambda(x) = \max_{x' \in X} \{ \langle T(x), x - x' \rangle + \langle y, H(x) - H(x') \rangle - 0{,}5\lambda \|x - x'\|^2 \},$$

то из леммы 3.3 следует оценка

$$\varphi_\lambda(x) \geq \sigma \|x - x(y)\|^2.$$

Поэтому вместо (16) можно использовать

$$\sqrt{\varphi_\lambda(x^k)} \leq \varepsilon_k. \tag{21}$$

Тогда в доказательстве теоремы 3.1 получим $\delta'_k = L_H \varepsilon'_k / \sqrt{\sigma}$, а из (15) придем к соотношению (4), и утверждение теоремы 3.1 останется справедливым.

Критерий (21), очевидно, намного проще, чем (16).

4. Двойственный метод расщепления

Наряду с проективным методом, в работах [4]–[7] для решения двойственного вариационного неравенства (13) использовался метод расщепления [12] с точным решением всех вспомогательных задач. На основе полученных в предыдущих разделах результатов можно построить приближенный вариант метода расщепления, который обеспечивает сходимость при более слабых предположениях по сравнению с проективным методом. А именно, в этом разделе, дополнительно к предположениям раздела 1, будем считать, что отображение $T : X \to R^n$ сильно монотонно с константой $\varkappa > 0$, отображение $B : R^m_+ \to R^m$ непрерывно и монотонно, а отображение $H : X \to R^m$ удовлетворяет условию Липшица, его компоненты $H_i : X \to R, i = 1, \dots, m$, являются выпуклыми функциями. Таким образом, ослаблено условие на отображение B.

Для заданной точки $y \in R^m$ и числа $\alpha > 0$ в этих условиях существует единственное решение $w \in Y$ задачи

$$\langle B(w) + \alpha^{-1}(w - y), v - w \rangle \geq 0 \quad \forall v \in Y,$$

которое можно считать значением отображения $W^{(\alpha)}$ в точке y. Это отображение обладает основными свойствами проекции, поскольку является проксимальным в отношении отображения B.

Лемма 4.1. a) *Отображение* $W^{(\alpha)}$ *является нерастягивающим и ОСМ-отображением с константой* 1.

b) *Соотношение* $y^* = W^{(\alpha)}[y^* - \alpha C(y^*)]$ *для* $\alpha > 0$ *эквивалентно тому, что точка* y^* *является решением задачи* (13).

Доказательство. Выберем произвольно точки $y', y'' \in Y$ и обозначим $w' = W^{(\alpha)}(y'), w'' = W^{(\alpha)}(y'')$. По определению имеем

$$\langle B(w') + \alpha^{-1}(w' - y'), w'' - w' \rangle \geq 0$$

и

$$\langle B(w'') + \alpha^{-1}(w'' - y''), w' - w'' \rangle \geq 0.$$

После сложения, учитывая монотонность B, получаем

$$-\|w'' - w'\|^2 + \langle y'' - y', w'' - w' \rangle \geq \alpha \langle B(w') - B(w''), w' - w'' \rangle \geq 0,$$

т. е. выполняется ОСМ-свойство для $W^{(\alpha)}$ с константой 1. Отсюда также следует

$$\|y'' - y'\| \geq \|w'' - w'\|,$$

т. е. отображение $W^{(\alpha)}$ нерастягивающее. Далее, условие $y^* = W^{(\alpha)}[y^* - \alpha C(y^*)]$ означает

$$\langle B(y^*) - \alpha^{-1}[y^* - (y^* - \alpha C(y^*))], v - y^* \rangle \geq 0 \quad \forall v \in Y,$$

поэтому y^* есть решение (13). $\square$

Таким образом, отображение $W^{(\alpha)}$ можно использовать вместо проективного π_Y, а для отображения $y \mapsto y - W^{(\alpha)}[y - \alpha Q(y)]$ при $\alpha \in (0, 4\gamma)$ будет выполняться ОСМ-свойство с константой $\widetilde{\gamma} = 1 - \alpha/(4\gamma)$, если $Q : Y \to R^m$ — ОСМ-отображение с константой γ, согласно лемме 2.2.

Метод 3. Выберем точку $y^0 \in Y$, последовательность положительных чисел $\{\alpha_k\}$, последовательности неотрицательных чисел $\{\varepsilon'_k\}$, $\{\varepsilon''_k\}$ такие, что выполняется (15), а также числа $\lambda > 0$, $\beta > 0$.

На каждой k-й итерации, $k = 0, 1, \dots$, известна точка $y^k \in Y$, тогда определяем точку $x^k \in X$ такую, что выполняется (21), полагаем $c^k = -H(x^k)$ и вычисляем итерационную точку $y^{k+1} \in Y$ из условия

$$\sqrt{\psi_\beta(y^{k+1})} \leq \varepsilon''_k, \tag{22}$$

где

$$\psi_\beta(y^{k+1}) = \max_{y \in Y} \{ \langle B(y^{k+1}) + \alpha_k^{-1}(y^{k+1} - y^k) + c^k, y^{k+1} - y \rangle - 0{,}5\beta \|y^{k+1} - y\|^2 \},$$

после чего переходим к следующей итерации.

Таким образом, в методе 3 для оценки точности непосредственно используются оценочные функции. Как и в методе 2, точка x^k является приближением к точке $x(y^k)$, а точка y^{k+1} – приближением к точке $\widetilde{y}^{k+1} = W^{(\alpha_k)}[y^k - \alpha_k c^k]$, т.е.

$$\langle B(\widetilde{y}^{k+1}) + \alpha_k^{-1}(\widetilde{y}^{k+1} - y^k) + c^k, v - \widetilde{y}^{k+1} \rangle \geq 0 \quad \forall v \in Y.$$

Это означает, что проективный метод по двойственным переменным здесь заменен методом расщепления, явным по отношению к отображению C и неявным по отношению к B, что подразумевает достаточную простоту этого отображения. Тем не менее, значение функции ψ_β может быть вычислено без затруднений, чтобы обеспечить требуемую точность приближения.

Сходимость метода 3 можно обосновать с помощью предложения 2.1.

Теорема 4.1. *Предположим, что система* (1), (2) *имеет решение. Существуют числа* $\alpha', \alpha'' > 0$ *такие, что если последовательность* $\{(x^k, y^k)\}$ *построена методом* 3 *при* $\alpha_k \in [\alpha', \alpha'']$, *то она сходится к решению системы* (1), (2).

Доказательство. Согласно лемме 3.1 отображение C является ОСМ-отображением с константой $\gamma = \varkappa/L_H^2$, а отображение $W^{(\alpha)} : R^m \to R^m$ согласно лемме 4.1 обладает свойствами проективного отображения π_Y. Поэтому, если определить

$$P(u) = u - W^{(\alpha)}[u - \alpha C(u)]$$

для $\alpha \in (0, 4\gamma)$, то по лемме 2.2 отображение P будет ОСМ-отображением с константой $\widetilde{\gamma} = 1 - \alpha/(4\gamma)$. Тогда определим

$$P_k(u) = u - W^{(\alpha_k)}[u - \alpha_k C(u)]$$

при $\alpha_k \in (0, 4\gamma)$. Из леммы 4.1 b) следует, что все отображения P и P_k будут иметь одинаковое множество корней, совпадающее с множеством решений задачи (13). Учитывая непрерывность отображения $W^{(\alpha)}$, получаем, что выполняются условия a)–c) предложения 2.1. Покажем, что для последовательности $\{u^k\}$, где $u^k = y^k$, выполняются условия (9) с $\lambda_k = 1$, если $\alpha_k \in (0, 2\gamma)$. Прежде всего заметим, что тогда

$$2\gamma_k = 2(1 - \alpha_k/4\gamma) = 1 + (1 - \alpha_k/2\gamma) \geq 1 = \lambda_k,$$

где γ_k — ОСМ-константа отображения P_k, т. е. условие (10) выполняется и можно определить $0 < \alpha' < \alpha'' < 2\gamma$. Тогда из (22) согласно лемме 3.3 получаем

$$\|y^{k+1} - \widetilde{y}^{k+1}\| \leq \varepsilon''_k/\sqrt{\sigma_2} \ \text{ для } \ \sigma_2 > 0.$$

Аналогично из (21) следует

$$\|x^k - x(y^k)\| \leq \varepsilon'_k/\sqrt{\sigma_1} \ \text{ для } \ \sigma_1 > 0 \tag{23}$$

и

$$\|c^k - C(y^k)\| = \|H(x^k) - H[x(y^k)]\| \leq L_H \varepsilon'_k/\sqrt{\sigma_2}.$$

По построению $y^{k+1} = P_k(y^k) = y^k - p^k$, поэтому

$$\begin{aligned}
\|p^k - P_k(y^k)\| &= \|(y^k - y^{k+1}) - P_k(y^k)\| = \|(y^k - y^{k+1}) - (y^k - W^{(\alpha_k)}[y^k - \alpha_k C(y^k)])\| = \\
&= \|y^{k+1} - W^{(\alpha_k)}[y^k - \alpha_k C(y^k)]\| = \|y^{k+1} - \widetilde{y}^{k+1}\| + \|\widetilde{y}^{k+1} - W^{(\alpha_k)}[y^k - \alpha_k C(y^k)]\| \leq \\
&\leq \varepsilon''_k/\sqrt{\sigma_2} + \|W^{(\alpha_k)}[y^k - \alpha_k c^k] - W^{(\alpha_k)}[y^k - \alpha_k C(y^k)]\| \leq \\
&\leq \varepsilon''_k/\sqrt{\sigma_2} + \alpha_k \|c^k - C(y^k)\| \leq \alpha'' L_H \varepsilon'_k/\sqrt{\sigma_1} + \varepsilon''_k/\sqrt{\sigma_2} = \delta_k.
\end{aligned}$$

Но тогда из (15) следует, что все условия в (9) выполняются, и из предложения 2.1 получаем, что последовательность $\{y^k\}$ в методе 3 сходится к решению x^* задачи (13). Из леммы 3.1 получаем, что отображение $y \mapsto x(y)$ непрерывно, поэтому с учетом (15) и (23) предельные точки последовательности $\{x^k\}$ существуют и совпадают с единственной точкой $x^* = x(y^*)$, т. е. последовательность $\{x^k\}$ сходится к точке x^*. Учитывая утверждение леммы 3.2, заключаем, что пара точек (x^*, y^*) составляет решение системы (1), (2). □

Литература

1. Patriksson M. *Nonlinear programming and variational inequality problems: A unified approach.* – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999. – xiv + 334 p.
2. Nagurney A. *Network economics: A variational inequality approach.* – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999. – xxi + 325 p.
3. Konnov I.V. *Combined relaxation methods for variational inequalities.* – Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 2001. – xi+ 181 p.
4. Коннов И.В. *Двойственный подход для одного класса смешанных вариационных неравенств* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 2002. – Т. 42. – № 9. – С. 1324–1337.
5. Коннов И.В. *Метод расщепления с линейным поиском для прямо-двойственных вариационных неравенств* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 2003. – Т. 43. – № 4. – С. 518–532.
6. Коннов И.В. *Система прямо-двойственных вариационных неравенств в условиях монотонности* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 2003. – Т. 43. – № 10. – С. 1459–1466.
7. Konnov I.V. *Application of splitting methods to a class of equilibrium problems* // J. Nonlinear and Convex Anal. – 2004. – V. 5. – № 6. – P. 71–83.
8. Гольштейн Е.Г., Третьяков Н.В. *Модифицированные функции Лагранжа.* – М.: Наука, 1989. – 400 с.
9. Zhu D.L., Marcotte P. *Co-coercivity and its role in the convergence of iterative schemes for solving variational inequalities* // SIAM J. Optimiz. – 1996. – V. 6. – № 3. – P. 714–726.
10. Коннов И.В. *Приближенные методы для прямо-двойственных вариационных неравенств смешанного типа* // Изв. вузов. Математика. – 2000. – № 12. – С. 55–66.
11. Konnov I.V. *Application of the proximal point method to nonmonotone equilibrium problems* // J. Optimiz. Theory and Appl. – 2003. – V. 119. – № 2. – P. 317–333.
12. Lions P.L., Mercier B. *Splitting algorithm for the sum of two nonlinear operators* // SIAM J. Numer. Anal. – 1979. – V. 16. – № 6. – P. 964–979.

Казанский государственный университет

Поступила
18.11.2004