ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1997 МАТЕМАТИКА № 7 (422)

УДК 517.958

И.Н. СИДОРОВ

ПОСТРОЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ РАЗЛИЧНЫХ ВАРИАНТОВ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК СЛОЖНОЙ ГЕОМЕТРИИ

В данной работе рассматривается изотропная тонкая или пологая оболочка постоянной толщины $2h$ в трехмерном евклидовом пространстве R^3. Оболочка имеет срединную поверхность S, удовлетворяющую необходимым требованиям гладкости, кусочно-гладкий контур этой поверхности Γ и боковую поверхность Σ, образованную движением нормали $\mathbf{m}$ к поверхности S вдоль контура Γ. В работе [1] для такой оболочки получена конечная система уравнений равновесия в векторной форме в криволинейной нормальной системе координат, связанной с ее срединной поверхностью. Следуя обозначениям этой работы, представим конечную систему уравнений равновесия в виде

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\partial_{\alpha,x}(\sqrt{\alpha}\mathbf{P}^{(k)\alpha}(\mathbf{r}_x)) - \frac{1}{h}\underline{\mathbf{P}^{(k)3}}(\mathbf{r}_x) + \mathbf{\Phi}^{(k)}(\mathbf{r}_x) = 0, \quad \mathbf{r}_x \in S, \quad k = \overline{0,N}, \tag{1}$$

где $\mathbf{r}_x$ — радиус-вектор точек срединной поверхности S

$$\mathbf{P}^{(k)i} = \frac{2k+1}{2h}\int_{-h}^{h} P_k\left(\frac{z}{h}\right)\mathbf{P}^i dz,$$

$$\underline{\mathbf{P}^{(k)3}} = (2k+1)\sum_{i=0}^{[(k-1)/2]}\mathbf{P}^{(k-2i-1)3}, \quad k=\overline{1,N}, \quad \underline{\mathbf{P}^{(0)3}} = 0,$$

$$\mathbf{\Phi}^{(k)} = \mathbf{F}^{(k)} + [\mathbf{p}_n^{(+)} + (-1)^k\mathbf{p}_n^{(-)}]\frac{(2k+1)}{2h},$$

$\mathbf{P}^i$ — векторные составляющие тензора напряжений, $\mathbf{F}$ — вектор объемных сил, $\mathbf{p}_n^{(\pm)}$ — заданный вектор напряжений на верхней (нижней) лицевой поверхности оболочки, $P_k\left(\frac{z}{h}\right)$ — полином Лежандра k-го порядка, $z \in [-h,h]$ — поперечная координата нормальной системы координат, $\partial_{\alpha,x} \equiv \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$ (x^1, x^2 — криволинейные координаты), a — определитель метрического тензора срединной поверхности. В системе уравнений (1) и в последующих формулах греческие индексы пробегают значения 1, 2, латинские индексы — 1, 2, 3, по повторяющимся индексам проводится суммирование (исключением является индекс, определяющий порядковый номер в разложении вектор-функции по полиномам Лежандра).

В рамках $(N+1)$-моментного приближения вектор перемещений для элементов оболочки определяется формулой [1]

$$\mathbf{u}_N = \sum_{k=0}^{N} P_k\left(\frac{z}{h}\right)\mathbf{w}^{(k)}.$$

Тогда согласно обобщенному закону Гука

$$\mathbf{P}^{(k)i} = \lambda(\mathbf{r}^m, D_{m,x}\mathbf{w}^{(k)})\mathbf{r}^i + \mu(\mathbf{r}^i, D_{m,x}\mathbf{w}^{(k)})\mathbf{r}^m + \mu a^{im}(D_{m,x}\mathbf{w}^{(k)}, \mathbf{r}^j)\mathbf{r}_j, \tag{2}$$

где

$$D_{m,x}\mathbf{w}^{(k)} = \begin{cases} \partial_{\alpha,x}\mathbf{w}^{(k)}, & m=\alpha, \\ \frac{2k+1}{2h}(\mathbf{w}^{(k+1)}+\mathbf{w}^{(k+3)}+\cdots), & m=3, \end{cases}$$

$\mathbf{r}_j$, $\mathbf{r}^i$ — векторы основного и взаимного базисов срединной поверхности оболочки, λ, μ — параметры Ламе, a^{im} — контравариантные компоненты метрического тензора.

Для построения интегральной формы решения системы (1) воспользуемся уравнением, которому удовлетворяют моменты тензора перемещений Кельвина ([2], с. 43) $U^p_{(i)}(\mathbf{R},\mathbf{\Lambda})$ ($\mathbf{R} = \mathbf{r}_x + z\mathbf{m}(\mathbf{r}_x)$)

$$\partial_{\alpha,x}(\sqrt{\alpha}\mathbf{T}^{(k)\alpha}_{(i)}(\mathbf{r}_x,\mathbf{\Lambda})) - \frac{1}{h}\sqrt{\alpha}\underline{\mathbf{T}^{(k)3}_{(i)}}(\mathbf{r}_x,\mathbf{\Lambda}) + \tag{3}$$

$$+\frac{2k+1}{2h}\sqrt{\alpha}[\mathbf{e}_i P_k\left(\frac{\xi}{h}\right)\delta(\mathbf{r}_x-\mathbf{r}_\eta) + (\mathbf{T}^{(+)3}_{(i)} - (-1)^k\mathbf{T}^{(-)3}_{(i)})] = 0,$$

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{r}_\eta + \xi\mathbf{m}(\mathbf{r}_\eta), \quad \mathbf{r}_\eta \in S, \quad |\xi| < h,$$

где $\delta(\mathbf{r}_x - \mathbf{r}_\eta)$ — дельта-функция Дирака, $\mathbf{e}_i$ — единичный вектор декартовой системы координат, определяющий направление действия сосредоточенной силы в бесконечной упругой среде и приложенный в точке с радиус-вектором $\mathbf{\Lambda}$, $\mathbf{T}^{(\pm)3}_{(i)} = \mathbf{T}^3_{(i)}(\mathbf{r}_x \pm h\mathbf{m}(\mathbf{r}_x),\mathbf{\Lambda})$,

$$\mathbf{T}^{(k)j}_{(i)} = \lambda(\mathbf{r}^m, D_{m,x}\mathbf{U}^{(k)}_{(i)})\mathbf{r}^j + \mu(\mathbf{r}^j, D_{n,x}\mathbf{U}^{(k)}_{(i)})\mathbf{r}^n + \mu a^{jm}(D_{m,x}\mathbf{U}^{(k)}_{(i)}, \mathbf{r}^p)\mathbf{r}_p, \quad \mathbf{U}^{(k)}_{(i)} = U^{(k)p}_{(i)}\mathbf{e}_p. \tag{4}$$

Система уравнений (3) получена с учетом предположения, что для тонких или пологих оболочек с погрешностью zb^β_α по сравнению с $\delta^\beta_\alpha = (\mathbf{r}^\beta, \mathbf{r}_\alpha)$ (b^β_α — смешанные компоненты второго метрического тензора срединной поверхности оболочки) векторы базиса и определитель метрического тензора элементов оболочки можно заменить на соответствующие величины срединной поверхности. Заключением индекса i в круглые скобки подчеркивается, что вектор Кельвина $\mathbf{U}_{(i)}$ соответствует единичной силе $\mathbf{e}_i$ в декартовой системе координат, а уравнение для этого вектора записывается в криволинейной системе координат.

Предположим, что вектор $\mathbf{u}_N$ является решением системы (1). Тогда интеграл

$$I = \int_{-h}^{h} dz \iint_S \left(\sum_{k=0}^{N} \partial_{\alpha,x}(\sqrt{\alpha}\mathbf{P}^{(k)\alpha})P_k\left(\frac{z}{h}\right), \mathbf{U}_{(i)}\right) dx^1 dx^2 =$$

$$= \iint_S \sum_{k=0}^{N} \frac{2h}{2k+1}(\partial_{\alpha,x}(\mathbf{P}^{(k),\alpha}), \mathbf{U}^{(k)}_{(i)}) dx^1 dx^2,$$

который в соответствии с (1) равен

$$I = \iint_S \sum_{k=0}^{N} \frac{2h}{2k+1}\left(\frac{1}{h}\underline{\mathbf{P}^{(k)3}} - \mathbf{\Phi}^{(k)}, \mathbf{U}^{(k)}_{(i)}\right)\sqrt{a}\, dx^1 dx^2, \tag{5}$$

преобразуем к виду

$$I = \int_\Gamma \sum_{k=0}^{N} \frac{2h}{2k+1}(\mathbf{P}^{(k)\alpha}, \mathbf{U}^{(k)}_{(i)}) n^\Sigma_\alpha ds_t - \iint_S \sqrt{a}\sum_{k=0}^{N}\frac{2h}{2k+1}(\mathbf{P}^{(k)\alpha}, \partial_{\alpha,x}\mathbf{U}^{(k)}_{(i)}) dx^1 dx^2, \tag{6}$$

где ds_t — элемент дуги контура Γ срединной поверхности, n^Σ_α — компоненты единичной нормали к боковой поверхности оболочки Σ.

Сумму скалярных произведений во втором интеграле правой части (6) с учетом (2) и (4) представим следующим образом:

$$\sum_{k=0}^{N}\frac{2h}{2k+1}(\mathbf{P}^{(k)\alpha},\partial_{\alpha,x}\mathbf{U}_{(i)}^{(k)})=\sum_{k=0}^{N}\frac{2h}{2k+1}(\mathbf{T}_{(i)}^{(k)\alpha},\partial_{\alpha,x}\mathbf{w}^{(k)})+$$
$$+\sum_{k=0}^{N}\frac{2h}{2k+1}[(\mathbf{T}_{(i)}^{(k)3},D_{3,x}\mathbf{w}^{(k)})-(\mathbf{P}^{(k)3},D_{3,x}\mathbf{U}_{(i)}^{(k)})].\quad(7)$$

Используя (7), соотношение

$$\sum_{k-0}^{N}\frac{2h}{2k+1}\sqrt{a}(\mathbf{T}_{(i)}^{(k)\alpha},\partial_{\alpha,x}\mathbf{w}^{(k)})=\sum_{k=0}^{N}\frac{2h}{2k+1}\partial_{\alpha,x}(\sqrt{a}(\mathbf{T}_{(i)}^{(k)\alpha},\mathbf{w}^{(k)}))-$$
$$-\sum_{k=0}^{N}\frac{2h}{2k+1}(\partial_{\alpha,x}(\sqrt{a}(\mathbf{T}_{(i)}^{(k)\alpha}),\mathbf{w}^{(k)}),$$

а также (3), правую часть в (6) преобразуем к виду

$$I=\sum_{k=0}^{N}\frac{2h}{2k+1}\Big\{\int_{\Gamma}[(\mathbf{P}^{(k)\alpha},\mathbf{U}_{(i)}^{(k)})-(\mathbf{T}_{(i)}^{(k)\alpha},\mathbf{w}^{(k)})]n_{\alpha}^{\Sigma}ds_t-$$
$$-\iint_S\sqrt{a}[(\mathbf{T}_{(i)}^{(k)3},D_{3,x}\mathbf{w}^{(k)})-(\mathbf{P}^{(k)3},D_{3,x}\mathbf{U}_{(i)}^{(k)})+\frac{2k+1}{2h}P_k(\xi/h)(\mathbf{e}_i\delta(\mathbf{r}_x-\mathbf{r}_\eta),\mathbf{w}^{(k)})-$$
$$-\frac{1}{h}(\mathbf{T}_{(i)}^{(k)3},\mathbf{w}^{(k)})+\frac{2k+1}{2h}(\mathbf{T}_{(i)}^{(+)3}-(-1)^k\mathbf{T}_{(i)}^{(-)3},\mathbf{w}^{(k)})]dx^1dx^2\Big\}.\quad(8)$$

После некоторых преобразований правой части (8) с учетом (5) получим интегральное представление вектора перемещений $\mathbf{u}_N$

$$\beta_{ip}(\mathbf{r}_\eta)(\mathbf{e}_p,\mathbf{u}_N(\mathbf{r}_\eta))=\sum_{k=0}^{N}\Big\{\iint_S\Big[\frac{2h}{2k+1}(\mathbf{\Phi}^{(k)},\mathbf{U}_{(i)}^{(k)})-(\mathbf{T}_{(i)}^{(+)3}-(-1)^k\mathbf{T}_{(i)}^{(-)3},\mathbf{w}^{(k)})+(\mathbf{P}^{(k)3},\mathbf{U}_{(i)}^{(+)}-$$
$$-(-1)^k\mathbf{U}_{(i)}^{(-)}-\sum_{j=0}^{N}\mathbf{U}_{(i)}^{(j)}[1-(-1)^{k+j}])\Big]dS_R+\int_\Gamma\frac{2h}{2k+1}[(\mathbf{P}_n^{(k)\Sigma},\mathbf{U}_{(i)}^{(k)})-(\mathbf{P}_{(i)}^{(k)},\mathbf{w}^{(k)})]ds_t\Big\},\quad(9)$$

$$\beta_{ip}(r_\eta)=\begin{cases}\delta_{ip}, & \mathbf{r}_\eta\in S;\\ 0, & \mathbf{r}_\eta\notin S,\ |\xi|<h;\\ 1/2\delta_{ip}, & \mathbf{r}_\eta\in\Gamma,\end{cases}$$

где $\mathbf{P}_n^{(k)\Sigma}=\mathbf{P}^{(k)\alpha}n_\alpha^\Sigma$, $\mathbf{P}_{(i)}^{(k)}=\mathbf{T}_{(i)}^{(k)\alpha}n_\alpha^\Sigma=P_{(i)}^{(k)p}\mathbf{e}_p$ ($P_{(i)}^p$ — тензор напряжений Кельвина [2], с. 43), $\mathbf{U}_{(i)}^{(\pm)}=\mathbf{U}_{(i)}(\mathbf{r}_x\pm h\mathbf{m}(\mathbf{r}_x),\mathbf{\Lambda})$, δ_{ip} — символ Кронекера. При выводе (9) были использованы соотношения

$$\sum_{k=0}^{N}\frac{2h}{2k+1}[(\mathbf{P}^{(k)3},D_{3,x}\mathbf{U}_{(i)}^{(k)})-\frac{1}{h}(\mathbf{P}^{(k)3},\mathbf{U}_{(i)}^{(k)})]=$$
$$=\sum_{k=0}^{N}(\mathbf{P}^{(k)3},\mathbf{U}_{(i)}^{(+)})-(-1)^k\mathbf{U}_{(i)}^{(-)})-\sum_{k=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}(\mathbf{P}^{(k)3},\mathbf{U}_{(i)}^{(j)})[1-(-1)^{k+j}],$$

$$\sum_{k=0}^{N}\frac{2h}{2k+1}(\mathbf{T}^{(k)3}_{(i)},D_{3,x}\mathbf{w}^{(k)})=\int_{-h}^{h}\Big(\mathbf{T}^{3}_{(i)},\sum_{k=0}^{N}P_kD_{3,x}\mathbf{w}^{(k)}\Big)dz=$$
$$=\int_{-h}^{h}\Big(\mathbf{T}^{3}_{(i)},\frac{\partial}{\partial z}\Big(\sum_{k=0}^{N}P_k\mathbf{w}^{(k)}\Big)\Big)dz=\sum_{k=0}^{N}\frac{2}{2k+1}(\mathbf{T}^{(k)3}_{(i)},\mathbf{w}^{(k)}).$$

Покажем, что вектор перемещений $\mathbf{u}_N$, удовлетворяющий системе соотношений (9), является решением системы (1). Для этого подействуем на обе части этих соотношений оператором

$$L_\eta^{(N)}\mathbf{u}_N=\sum_{k=0}^{N}P_k\left(\frac{\xi}{h}\right)L_\eta^{(k)}\mathbf{u}_N, \tag{10}$$

$$L_\eta^{(k)}\mathbf{u}_N=\frac{1}{\sqrt{a}}\partial_{\alpha,\eta}\{\sqrt{a}[\lambda(\mathbf{r}^m,D_{m,\eta}\mathbf{w}^{(k)}(\mathbf{r}_\eta))\mathbf{r}^\alpha+\mu(\mathbf{r}^\alpha,D_{n,\eta}\mathbf{w}^{(k)}(\mathbf{r}_\eta))\mathbf{r}^n+\mu a^{\alpha m}(D_{m,\eta}\mathbf{w}^{(k)}(\mathbf{r}_\eta),\mathbf{r}^j)\mathbf{r}_j]\}-$$
$$-\frac{1}{h}\underline{\mathbf{P}_N^{(k)3}}(\mathbf{r}_\eta)+\frac{2k+1}{2h}[\mathbf{P}_N^{(+)3}(\mathbf{r}_\eta)-(-1)^k\mathbf{P}_N^{(-)3}(\mathbf{r}_\eta)],$$
$$\mathbf{P}_N^j=\sum_{k=0}^{N}P_k\left(\frac{\xi}{h}\right)\mathbf{P}_N^{(k)j}\quad(\mathbf{r}_\eta\in S).$$

Принимая во внимание, что имеют место равенства

$$\begin{aligned}
&\underline{\mathbf{P}_N^{(k)j}}(\mathbf{u}_N)=\underline{\mathbf{P}^{(k)j}}(\mathbf{u}_N),\\
&\mathbf{P}_N^{(+)3}-(-1)^k\mathbf{P}_N^{(-)3}=\sum_{j=0}^{N}[1-(-1)^{k+j}]\mathbf{P}^{(j)3},\\
&L_\eta^{(k)}\mathbf{U}^{(m)}_{(i)}(\mathbf{r}_x,\mathbf{\Lambda})=-\frac{2m+1}{2h}\delta_{km}\mathbf{e}_i\delta(\mathbf{r}_x-\mathbf{r}_\eta),\quad m=\overline{0,N},\\
&L_\eta^{(k)}\mathbf{U}^{(m)}_{(i)}(\mathbf{r}_{x,\Gamma},\mathbf{\Lambda})=L_\eta^{(k)}\mathbf{P}^{(m)}_{(i)}(\mathbf{r}_{x,\Gamma},\mathbf{\Lambda})=0,\\
&L_\eta^{(k)}[\mathbf{T}^{(+)3}_{(i)}-(-1)^k\mathbf{T}^{(-)3}_{(i)}]=L_\eta^{(k)}[\mathbf{U}^{(+)}_{(i)}-(-1)^k\mathbf{U}^{(-)}_{(i)}]=0,
\end{aligned} \tag{11}$$

$$\sum_{k=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}[1-(-1)^{k+j}](\mathbf{P}^{(j)3},\mathbf{U}^{(k)}_{(i)})=\sum_{k=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}[1-(-1)^{k+j}](\mathbf{P}^{(k)3},\mathbf{U}^{(j)}_{(i)}),$$

после действия оператора $L_\eta^{(N)}$ на интегральное представление вектора $\mathbf{u}_N$, из (10) и (11) имеем

$$\sum_{k=0}^{N}\left[\frac{1}{\sqrt{a}}\partial_{\alpha,\eta}(\sqrt{a}\mathbf{P}^{(k)\alpha}(\mathbf{r}_\eta))-\frac{1}{h}\underline{\mathbf{P}^{(k)3}}(\mathbf{r}_\eta)+\mathbf{\Phi}^{(k)}(\mathbf{r}_\eta)\right]P_k\left(\frac{\xi}{h}\right)=0.$$

Из последнего равенства в силу независимости полиномов Лежандра следует (1).

Таким образом, доказана

Теорема. *Для того чтобы вектор* $\mathbf{u}_N$ *являлся решением системы* (1), *необходимо и достаточно, чтобы этот вектор удовлетворял системе соотношений* (9).

Следует отметить, что система соотношений (9) может быть использована при построении граничных интегральных уравнений для вычисления параметров напряженно-деформированного состояния элементов оболочки. В качестве способа получения этих уравнений можно предложить разложение (9) по полиномам Лежандра от поперечной координаты оболочки ξ. При этом получается система $N+1$ векторных интегральных уравнений относительно $N+1$ неизвестных моментов вектора перемещений на срединной поверхности или вектора напряжений на контуре оболочки.

Литература

1. Векуа И.Н. *Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек.* – М.: Наука, 1982. – 286 с.
2. Угодчиков А.Г., Хуторянский Н.М. *Метод граничных элементов в механике деформируемого тела.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1986. – 295 с.

Казанский государственный
технический университет

Поступила
30.01.1996