ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1997 МАТЕМАТИКА № 6 (421)

УДК 519.213

А.Г. ЧЕНЦОВ

К ВОПРОСУ О РАСШИРЕНИИ СТОХАСТИЧЕСКИХ ОГРАНИЧЕНИЙ В КЛАССЕ КОНЕЧНО-АДДИТИВНЫХ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Исследуются неустойчивые задачи прогнозирования в классе математических ожиданий (МО) при моментных ограничениях на выбор плотности вероятности и их абстрактные аналоги. Построено корректное расширение в классе конечно-аддитивных (к.-а.) вероятностей со свойством слабой абсолютной непрерывности относительно фиксированной меры, универсальное в широком классе возмущений системы условий. Установлена “односторонняя” устойчивость обобщенной задачи прогнозирования при немонотонных возмущениях (НВ) включений, определяющих стохастические ограничения (СО).Построена регуляризация множеств притяжения (в классе приближенных решений-направленностей), реализуемых в условиях НВ и одновременного ослабления СО. Рассматриваются варианты СО, возникающие в задачах обработки статистической информации, для которых НВ могут иметь смысл уклонений эмпирических средних относительно истинных МО.

1. Обсуждение задачи

В статье рассматривается абстрактный аналог задачи о достижимости “в среднем” при условиях СО; исследуются вопросы чувствительности к возмущениям параметров упомянутых СО. Последние могут определяться данными статистической обработки результатов измерений в виде эмпирических распределений или, в более простом случае, в виде эмпирических средних. Истинное распределение вероятностей при этом неизвестно; однако информация, извлекаемая из “обучающих” выборок позволяет ввести для его определения своеобразную обратную задачу. Для последней характерна многозначность отображения, определяющего решение, и существенная неустойчивость. Это мотивирует применение регуляризирующих процедур с использованием имеющейся априорной информации (см. в этой связи, в частности, исследования [1]–[4]). Однако, такая информация имеется не всегда и может касаться лишь отдельных фрагментов из набора исходных данных. Так, например, при определении эмпирического распределения по выборке дискретной случайной величины мы оперируем с относительными частотами, но не с вероятностями событий; погрешность определения упомянутых вероятностей даже по представительным выборкам принципиально неустранима. К этому следует добавить погрешности вычислений и разного рода интерпретаций. Дать обоснованные оценки упомянутых погрешностей зачастую не удается. В этих условиях требуется использовать иные (по отношению к регуляризациям в теории некорректных задач) методы; см. в этой связи исследования по робастной статистике [5], [6]. Характерной их особенностью является, в частности, применение инфинитезимального анализа с использованием асимптотических аналогов естественных характеристик случайных

Работа выполнена при финансовой поддержке Международного научно-технического центра (проект 008-94).

величин (см. [6], с. 115). Предпринимаемое ниже исследование также ориентировано на обеспечение "правильных", в некотором смысле, асимптотических эффектов; однако, основой здесь является не "прямой" предельный переход, а некоторая компактификация пространства решений. Используемый ниже аппарат естественным образом связан с расширениями некоторых функционально-дифференциальных уравнений и их абстрактных аналогов ([7], гл. V–VII); мы ориентируемся в настоящей работе на исследование случаев, когда известно , что истинное распределение обладает плотностью относительно заданного пространства с мерой (последняя, однако, полагается всего лишь к.-а.), как и в ([7], § 9.4; [9]; [10]). В целом ряде общих положений это оказывается несущественным. Тем не менее круг проблем, когда существование плотности вероятности естественно с точки зрения конкретной постановки задачи, достаточно широк. Кроме того, в этом варианте задачи удается использовать свойства топологической плотности ([7], гл. IV) и существенно продвинуться в плане получения конкретных представлений асимптотических объектов в виде своеобразных множеств притяжения в классе приближенных решений. Мы разделяем в последующем изложении все возмущения условий на две большие группы: 1) ослабления системы ограничений, приводящие к естественной релаксации условий; 2) НВ, связанные с погрешностями представления параметров как в результате неточных наблюдений, так и при выполнении приближенных вычислений. Что касается 1), то возмущения этой группы обслуживаются ниже конструкцией расширения в классе к.-а. вероятностей, которая приводит к задаче с лучшими, по сравнению с исходной постановкой, функциональными свойствами (в том числе и по отношению к НВ группы 2); см. раздел 3). Компенсация разрушающих эффектов, вызванных НВ, достигается использованием регуляризации с преднамеренным загрублением параметров точности в конструкциях релаксаций, соответствующих 1); в разделе 5 приведен пример, мотивирующий целесообразность дополнительной (по отношению к "обычному" расширению пространства решений) регуляризации множеств притяжения.

2. Расширение стохастических ограничений

Фиксируем множество E, $E \neq \emptyset$, оснащенное полуалгеброй $\mathcal{L}$ подмножеств E ([7], с.58; [8], с. 46). Пусть, кроме того, фиксирована вещественнозначная к.-а. мера η на $\mathcal{L}$, полагаемая ненулевой и неотрицательной (тогда $\eta(E) > 0$), так что $(E, \mathcal{L}, \eta)$ — аналог пространства с мерой: E исполняет роль пространства элементарных событий (ПЭС), $\mathcal{L}$ может, в частности, быть σ-алгеброй подмножеств E (тогда $(E, \mathcal{L})$ — "стандартное" измеримое пространство), а η — счетно-аддитивной мерой; мы не требуем, однако, выполнения этих традиционных условий, следуя [9], [10]. Используем систему обозначений [9], [10], ограничиваясь лишь предельно краткой сводкой: $B_0(E, \mathcal{L})$ — линейное многообразие всевозможных ступенчатых, в смысле $(E, \mathcal{L})$, функционалов на E с положительным конусом $B_0^+(E, \mathcal{L})$ (линейные операции, умножение и упорядоченность в пространствах функционалов понимаются как поточечные); $B(E, \mathcal{L})$ — замыкание $B_0(E, \mathcal{L})$ в банаховом пространстве $\mathbb{B}(E)$ всех ограниченных функционалов на E с sup-нормой $\|\cdot\|$ ($B^+(E, \mathcal{L})$ — положительный конус $B(E, \mathcal{L})$). Фиксируем множество Γ, $\Gamma \neq \emptyset$, оператор

$$\gamma \mapsto S_\gamma : \Gamma \to B(E, \mathcal{L}) \tag{2.1}$$

и множество Y в пространстве $\mathbb{R}^\Gamma$ всевозможных функционалов на $\Gamma : Y \subset \mathbb{R}^\Gamma$. Полагаем Y замкнутым в топологии поточечной сходимости $\mathbb{R}^\Gamma$, обозначаемой ниже через $\otimes^\Gamma(\tau_\mathbb{R})$; итак, Y замкнуто в топологическом пространстве (ТП)

$$(\mathbb{R}^\Gamma, \otimes^\Gamma(\tau_\mathbb{R})). \tag{2.2}$$

Мы следуем простейшей конструкции интегрирования ([7], гл. 3) функционалов из $B(E,\mathcal{L})$ относительно к.-а. мер ограниченной вариации. Через $\mathbb{F}_0$ (через $\mathbb{F}$) обозначаем множество всех $f \in B_0^+(E,\mathcal{L})$ (всех $f \in B^+(E,\mathcal{L})$) таких, что η-интеграл f на множестве E есть 1. По смыслу элементы $f \in \mathbb{F}$ суть плотности к.-а. вероятностей на $\mathcal{L}$ относительно $(E,\mathcal{L},\eta)$; $\mathbb{F}_0 \subset \mathbb{F}$, причем $\mathbb{F}_0 \neq \emptyset$. Объектом нашего рассмотрения является условие

$$\left(\int_E S_\gamma f d\eta\right)_{\gamma\in\Gamma} \in Y \tag{2.3}$$

на выбор $f \in \mathbb{F}$. Ограничение (2.3) мы называем стохастическим, поскольку оно по своему смыслу соответствует условию на систему МО (в простейшем случае, когда Γ — конечное множество и Y состоит из единственного элемента, в виде (2.3) мы имеем проблему моментов; в задачах обработки статистической информации в качестве порождающего Y элемента $\mathbb{R}^\Gamma$ может выступать вектор эмпирических средних). Через $\mathbb{F}_\partial$ обозначаем множество всех $f \in \mathbb{F}$ со свойством (2.3), получая соответствующее множество допустимых элементов по отношению к (2.3). Известно ([7], гл. I), что множества такого рода зависят от Y весьма нерегулярно, что мотивирует исследование их релаксаций и расширений. В этой связи напомним некоторые обозначения [7], [9], [10]: $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ — линейное пространство всех к.-а. мер ограниченной вариации, определенных на $\mathcal{L}$, с положительным конусом $(\mathrm{add})_+[\mathcal{L}]$ ([7], с. 60); $*$-слабая топология $\mathbb{A}(\mathcal{L})$, обозначаемая через $\tau_*(\mathcal{L})$, соответствует двойственности $(B(E,\mathcal{L}),\mathbb{A}(\mathcal{L}))$ ([7], сс. 70, 71). Используем "нестандартную" топологию $\tau_0(\mathcal{L})$ ([7], с. 80) (см. также [9], [10]) и топологию $\tau_\otimes(\mathcal{L})$ поточечной сходимости в $\mathbb{A}(\mathcal{L})$, соответствующие представлению $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ в виде подпространства тихоновского произведения экземпляров $\mathbb{R}$ в дискретной топологии и $|\cdot|d$-топологии соответственно ($\mathcal{L}$ — индексное множество). Кроме того, используем ограниченную $*$-слабую топологию $\tau_{\mathbb{B}}^*(\mathcal{L})$ множества $\mathbb{A}(\mathcal{L})$: подмножество $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ открыто в $\tau_{\mathbb{B}}^*(\mathcal{L})$ в том и только том случае, когда его пересечение с каждым шаром $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ (в сильной норме и с центром в "нуле") есть открытое множество в соответствующем подпространстве

$$(\mathbb{A}(\mathcal{L}),\tau_*(\mathcal{L})). \tag{2.4}$$

Тогда $\mathfrak{M}(\mathcal{L}) \triangleq \{\tau_*(\mathcal{L});\tau_{\mathbb{B}}^*(\mathcal{L});\tau_\otimes(\mathcal{L});\tau_0(\mathcal{L})\}$ определяет мультитопологическую структуру $(\mathbb{A}(\mathcal{L}),\mathfrak{M}(\mathcal{L}))$. Для $\mu \in \mathbb{A}(\mathcal{L})$ и $f \in B(E,\mathcal{L})$ через $f * \mu$ обозначаем неопределенный μ-интеграл f, рассматриваемый в простейшей версии ([7], с. 70). Отметим, что

$$\mathbb{P}(\mathcal{L}) \triangleq \{\mu \in (\mathrm{add})_+[\mathcal{L}] \mid \mu(E) = 1\} \tag{2.5}$$

есть непустой выпуклый компакт в ТП (2.4), а

$$\mathbb{P}_\eta(\mathcal{L}) \triangleq \{\mu \in \mathbb{P}(\mathcal{L}) \mid \forall L \in \mathcal{L} : (\eta(L) = 0) \Longrightarrow (\mu(L) = 0)\} \tag{2.6}$$

является непустым выпуклым компактом, относительно которого $\mathbb{F}_0$ может рассматриваться как всюду плотное (в смысле топологий из $\mathfrak{M}(\mathcal{L})$) множество. В этой связи см. [9], [10]. Ограничимся только существенной частью аппроксимативной конструкции, используя ее в известной мере расширительно по отношению к задаче о достижимости в условиях СО. В полном соответствии с [11] введем конус $(\mathrm{add})^+[\mathcal{L};\eta]$ всех $\mu \in (\mathrm{add})_+[\mathcal{L}]$, обращающихся в нуль в точках зануления η (см. также [7], (4.2.2)), а также $\mathbb{A}_\eta[\mathcal{L}]$ ([7], (4.2.3)) — (линейное) подпространство $\mathbb{A}(\mathcal{L})$, порожденное упомянутым конусом. Тогда $\mathbb{P}_\eta(\mathcal{L}) = \mathbb{P}(\mathcal{L}) \cap (\mathrm{add})^+[\mathcal{L};\eta]$. Через $\mathbb{D}$ условимся обозначать множество всех неупорядоченных конечных разбиений E элементами $\mathcal{L}$ (см. [7], сс. 58, 83), оснащаемое направлением [12]–[14] $\prec$, определяемым в ([7], (4.3.1)) (см. также [11],

§ 2). Тогда $(\mathbb{D}, \prec)$ есть непустое направленное множество, которое мы дополняем до направленности в $B_0(E, \mathcal{L})$ посредством оператора, аналогичного используемому в ([7], § 4.3). Для $\mu \in \mathbb{A}_\eta[\mathcal{L}]$ вводим функционал $\theta[\mu]$ на $\mathcal{L}$, для которого $\theta[\mu](L) \triangleq \mu(L)/\eta(L)$ при $\eta(L) \neq 0$ и $\theta[\mu](L) \triangleq 0$ в противном случае; если же, кроме того, $\mathcal{K} \in \mathbb{D}$, то $\Theta[\mu; \mathcal{K}] \in B_0(E, \mathcal{L})$ полагаем таким, что $\forall L \in \mathcal{K}$, $\forall x \in L : \Theta[\mu; \mathcal{K}](x) \triangleq \theta[\mu](L)$, и получаем, в частности, $\Theta[\mu; \mathcal{K}] * \eta \in \mathbb{A}_\eta[\mathcal{L}]$. В итоге для $\mu \in \mathbb{A}_\eta[\mathcal{L}]$ в виде

$$(\mathbb{D}, \prec, \Theta[\mu; \cdot] * \eta) \tag{2.7}$$

имеем направленность в $\mathbb{A}_\eta[\mathcal{L}]$ (действительно, значения $\Theta[\mu; \mathcal{K}] * \eta$ оператора $\Theta[\mu; \cdot] * \eta$ в "точках" $\mathcal{K} \in \mathbb{D}$ суть элементы шара с центром в "нуле" и радиусом в виде полной вариации μ на множестве E; сильная норма в $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ определяется, как обычно, посредством полной вариации), которая сходится к μ в $(\mathbb{A}(\mathcal{L}), \mathfrak{M}(\mathcal{L}))$: для всех топологий из $\mathfrak{M}(\mathcal{L})$ имеет место сходимость (по Мору–Смиту [12]) направленности (2.7) к "точке" μ. Для наших целей достаточен более частный случай (2.7): $\mu \in \mathbb{P}_\eta(\mathcal{L})$. Тогда $(\mathbb{D}, \prec, \Theta[\mu; \cdot])$ есть направленность в $\mathbb{F}_0$. В силу утверждения о сходимости (2.7) имеем конструкцию аппроксимативной реализации элементов выпуклого компакта (2.6) в классе ступенчатых функций плотности. В этой связи $\mathbb{F}_0$ играет далее роль множества реализуемых "управлений". Нам потребуются более общие их аналоги, ориентированные на возможность возмущения η. Пусть

$$M_+(\mathcal{L}) \triangleq \left\{ (\mu, f) \in (\mathrm{add})_+[\mathcal{L}] \times B^+(E, \mathcal{L}) \,\middle|\, \int_E f \, d\mu = 1 \right\}, \tag{2.8}$$

так что $\mathbb{F}$ есть η-сечение (2.8); последнее — непустое множество. Через $\mathfrak{I}$ обозначаем оператор

$$(\mu, f) \mapsto f * \mu : M_+(\mathcal{L}) \to \mathbb{P}(\mathcal{L}). \tag{2.9}$$

Тогда η-сечение (2.9), т.е. $\mathfrak{I}(\eta, \cdot)$, действует из $\mathbb{F}$ в $\mathbb{P}_\eta(\mathcal{L})$ по правилу $\mathfrak{I}(\eta, \cdot)(f) \triangleq \mathfrak{I}(\eta, f)$. Нам потребуются некоторые общие понятия и обозначения ([11], § 2; [15], § 5): B^A используем для обозначения множества всех операторов из множества A в множество B, полагая при $h \in B^A$, что $h^1(\cdot)$ — операция взятия образа в силу h; $\mathrm{cl}(\cdot, \tau)$ — оператор замыкания в ТП с топологией τ; $\mathcal{B}(H)$ — множество всех непустых семейств $\mathcal{H}$ подмножеств множества H со свойством $\forall A \in \mathcal{H}$, $\forall B \in \mathcal{H}\ \exists C \in \mathcal{H} : C \subset A \cap B$ (если $\tilde{\mathcal{H}} \in \mathcal{B}(H)$ и при этом $\emptyset \notin \tilde{\mathcal{H}}$, то $\tilde{\mathcal{H}}$ — базис фильтра H). Для множества X, $X \neq \emptyset$, оснащенного семейством $\mathcal{X} \in \mathcal{B}(X)$, ТП $(\mathbb{T}, \tau)$ и оператора $s \in \mathbb{T}^X$ через $(\tau - \mathrm{LIM})[\mathcal{X} \mid s]$ обозначаем ([15], § 5) пересечение всех множеств $\mathrm{cl}(s^1(U), \tau)$, $U \in \mathcal{X}$, получая множество притяжения ([7], (2.5.1)). Если $(T, \preceq, h)$ — направленность в множестве H (используется символика [11], § 2; [16], § 2), то через $(H - \mathrm{ass})[T, \preceq, h]$ обозначаем семейство всех множеств U, $U \subset H$, со свойством $\exists \alpha \in T\ \forall \beta \in T : (\alpha \preceq \beta) \Longrightarrow (h(\beta) \in U)$; тем самым введен фильтр H, ассоциированный с $(T, \preceq, h)$. Через $\mathbb{S}$ обозначаем оператор

$$\mu \mapsto \left(\int_E S_\gamma d\mu \right)_{\gamma \in \Gamma} \ : \ \mathbb{P}_\eta(\mathcal{L}) \to \mathbb{R}^\Gamma, \tag{2.10}$$

после чего полагаем $\tilde{\Omega} \triangleq \mathbb{S}^{-1}(Y)$, получая естественное расширение допустимого множества для СО (2.3). В силу непрерывности (2.10), как оператора из компакта (2.6) с топологией подпространства (2.4) в хаусдорфово ТП (2.2), мы имеем в виде $\tilde{\Omega}$ замкнутое подмножество компакта и, как следствие, компакт в ТП (2.4), причем $\tilde{\mathbb{F}}_\partial \triangleq \mathfrak{I}(\eta, \cdot)^1(\mathbb{F}_\partial)$ есть подмножество $\tilde{\Omega}$. Уже в простейших примерах "нарост" $\tilde{\Omega} \setminus \mathrm{cl}(\tilde{\mathbb{F}}_\partial, \tau_*(\mathcal{L}))$ нередко оказывается непустым множеством (механизм такого рода раскрывается по сути дела в примере ([10], § 1)).

Далее через $\mathrm{Fin}(T)$ обозначаем семейство всех непустых конечных подмножеств множества T; $\forall P \in \mathrm{Fin}(T) : (\mathrm{Fin})[T \mid P] \triangleq \{Q \in \mathrm{Fin}(T) \mid P \subset Q\}$. Кроме того, $\forall K \in \mathrm{Fin}(\Gamma)$ $\forall \delta \in [0, \infty[$:

$$O_K(\delta) \triangleq \{(S'_\gamma)_{\gamma \in K} \in B(E, \mathcal{L})^K \mid \ \forall k \in K : \|S'_k - S_k\| \leq \delta\}. \tag{2.11}$$

При $\delta > 0$ мы в виде (2.11) имеем окрестность $(S'_\gamma, \gamma \in K)$. С использованием (2.11) вводим вариант релаксаций, предусматривающий глубокое ослабление СО (2.3). Если $\mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{L})$, $K \in \in \mathrm{Fin}(\Gamma)$ и $\varepsilon \in]0, \infty[$, то через $\Omega(\mathcal{K}, K, \varepsilon)$ условимся обозначать множество всех $(\mu, f) \in M_+(\mathcal{L})$ со свойством

$$((\mu \mid \mathcal{K}) = (\eta \mid \mathcal{K}))\&(\exists (S'_\gamma)_{\gamma \in K} \in O_K(\varepsilon) \exists y \in Y \ \forall \gamma \in K : \left| \int_E S'_\gamma f \, d\mu - y(\gamma) \right| \leq \varepsilon); \tag{2.12}$$

здесь используется $(\cdot \mid \mathcal{K})$ для обозначения операции сужения ([17], с. 13) функционала на подмножество его области определения (в данном случае это подмножество есть $\mathcal{K}$, $\mathcal{K} \subset \mathcal{L}$). Через $\Im$ обозначается семейство всех множеств $\Omega(\mathcal{K}, K, \varepsilon)$, $(\mathcal{K}, K, \varepsilon) \in \mathrm{Fin}(\mathcal{L}) \times \mathrm{Fin}(\Gamma) \times]0, \infty[$; $\Im \in \mathcal{B}(M_+(\mathcal{L}))$. Рассматриваем $\Im$ как "асимптотику" ослабленных условий. Для введения другой, более "мягкой" асимптотики, подобно [7], [9]–[11] фиксируем множество Γ_0, $\Gamma_0 \subset \Gamma$, со свойством $\forall \gamma \in \Gamma_0 : S_\gamma \in B_0(E, \mathcal{L})$. Существенность последнего условия подтверждается примерами ([7], гл. I; [10], § 1). Отметим, что в случае СО данное условие обладает естественной интерпретацией в терминах дискретных случайных величин (в случае "стандартного" ПЭС $(E, \mathcal{L})$ таковыми оказываются функционалы S_γ при $\gamma \in \Gamma_0$). Если $K \in \mathrm{Fin}(\Gamma)$ и $\varepsilon \in]0, \infty[$, то через $\Omega_0(K, \varepsilon)$ обозначаем семейство всех $f \in \mathbb{F}_0$ со свойством

$$\exists y \in Y : \left(\forall \gamma \in K \cap \Gamma_0 : \int_E S_\gamma f \, d\eta = y(\gamma)\right) \& \left(\forall \gamma \in K \backslash \Gamma_0 : \left| \int_E S_\gamma f \, d\eta - y(\gamma) \right| \leq \varepsilon\right). \tag{2.13}$$

Заметим, что $\{\eta\} \times \Omega_0(K, \varepsilon) \subset \Omega(\mathcal{K}, K, \varepsilon)$ в условиях, определяющих (2.12) так, что новое возмущение (см. (2.13)) является "частичным". Пусть $\Im_0$ — семейство всех множеств $\Omega_0(K, \varepsilon)$, $(K, \varepsilon) \in \mathrm{Fin}(\Gamma) \times]0, \infty[$; $\Im_0 \in \mathcal{B}(\mathbb{F}_0)$. Легко видеть, что

$$\forall \mu \in \tilde{\Omega} : \Im_0 \subset (\mathbb{F}_0 - \mathrm{ass})[\mathbb{D}, \prec, \Theta[\mu; \cdot]]. \tag{2.14}$$

Это утверждение является простым следствием (2.13) и универсальной (в пределах $\mathfrak{M}(\mathcal{L})$) сходимости направленности (2.7). Подобно теоремам 3.1 и 3.2 работы [11] устанавливается

Теорема 2.1. $\forall \tau \in \mathfrak{M}(\mathcal{L}) : \tilde{\Omega} = (\tau - \mathrm{LIM})[\Im \mid \mathfrak{I}] = (\tau - \mathrm{LIM})[\Im_0 \mid \mathfrak{I}(\eta, \cdot)]$.

Следствие. Эквивалентны следующие три условия: $\tilde{\Omega} \neq \emptyset$; $\emptyset \notin \Im_0$; $\emptyset \notin \Im$.

Доказательство следствия подобно рассуждению ([7], с. 110). Отметим, что в силу ([7], (2.5.1)) и (2.14) имеем в виде (2.7) аппроксимативную конструкцию для реализации всего "аттрактора" $\tilde{\Omega}$ (см. теорему 2.1) посредством приближенных решений-направленностей, определяемых конструктивно. Этот вывод еще более важен в вопросах, связанных с представлением асимптотически достижимых элементов ТП.

3. Асимптотика достижимых множеств

В прикладных задачах, связанных с обработкой статистической информации, прогнозирование требуется зачастую осуществлять не в отношении самого распределения, но в отношении зависимостей, статистически связанных с данными наблюдений. Грубо говоря, возможна ситуация, когда по выборке значений одного случайного вектора требуется дать обоснованный (хотя бы на уровне средних значений) прогноз в отношении значений другого случайного вектора. В этой задаче, осложненной неустойчивостью, требуется, по сути дела, воспроизвести объект, сходный с областью достижимости [18]–[20] в теории процессов управления. В ([7], гл. VI; [11]; [15]) рассматривалась проблема, имеющая смысл регуляризации задачи о построении областей достижимости в задачах управления с интегральными ограничениями. Представляется, что и в исследуемой сейчас задаче со СО имеет смысл ввести подобный объект. В содержательных постановках задач обработки статистической информации естественной представляется интерпретация этого объекта в виде области достижимости "в среднем" (т.е. в классе МО). Однако возможно, в принципе, использование нелинейных оценочных операций над МО. Поэтому мы рассматриваем несколько более общую постановку, ориентируясь на конструкции [11], [15], [16]. Через $\tau_{\mathbb{P}}^*(\mathcal{L})$ условимся обозначать топологию $\mathbb{P}(\mathcal{L})$ (2.5), рассматриваемого в виде подпространства ТП (2.4) так, что $(\mathbb{P}(\mathcal{L}), \tau_{\mathbb{P}}^*(\mathcal{L}))$ есть непустой компакт, элементами которого являются к.-а. вероятности на $\mathcal{L}$ и только они. Фиксируем ТП $(\mathbb{X}, \Upsilon)$, $\mathbb{X} \neq \emptyset$, и оператор

$$\varpi : \mathbb{P}(\mathcal{L}) \to \mathbb{X}; \tag{3.1}$$

полагаем, что ϖ (3.1) есть непрерывное в смысле $(\tau_{\mathbb{P}}^*(\mathcal{L}), \Upsilon)$ отображение. Отметим одно важное свойство, связанное с расширением СО на основе теоремы 2.1. Это свойство обобщенной конструкции имеет смысл "односторонней" устойчивости (аналог данного свойства для исходных СО (2.3) в терминах естественной модификации ϖ в форме, подобной ([15], (1.2)), вообще говоря, отсутствует). Через $\mathcal{Y}$ обозначаем семейство всех окрестностей ([21], с. 19) Y в ТП (2.2); мы не ограничиваемся здесь открытыми окрестностями. Кроме того, пусть $\tilde{\mathbb{F}}$ есть def семейство всех множеств F, $F \subset \mathbb{R}^{\Gamma}$, замкнутых в ТП (2.2). Тогда $\tilde{\mathcal{F}} \triangleq \tilde{\mathbb{F}} \cap \mathcal{Y}$ (непустое семейство всех замкнутых в ТП (2.2) окрестностей Y) таково, что Y есть пересечение всех множеств из $\tilde{\mathcal{F}}$. В итоге $\tilde{\Omega}$ есть пересечение всех множеств $\mathbb{S}^{-1}(H)$, $H \in \tilde{\mathcal{F}}$. Рассмотрим $\mathcal{W} \triangleq \{\varpi^1(\mathbb{S}^{-1}(H)) : H \in \tilde{\mathcal{F}}\} \in \mathcal{B}(\mathbb{X})$.

Лемма 3.1. *Пусть* $(\mathbb{X}, \Upsilon)$ *есть достижимое ТП* (*иными словами,* $(\mathbb{X}, \Upsilon)$ *есть* T_1*-пространство* ([14], с. 191)). *Тогда пересечение всех множеств из* $\mathcal{W}$ *совпадает с* $\varpi^1(\tilde{\Omega})$.

Доказательство. Множество $\varpi^1(\tilde{\Omega})$ содержится в пересечении Q всех множеств из $\mathcal{W}$ в силу монотонности операций замыкания и взятия образа. В силу непрерывности ϖ и достижимости ТП $(\mathbb{X}, \Upsilon)$ имеем для $x \in \mathbb{X}$ в виде $\varpi^{-1}(\{x\})$ замкнутое (в $\tau_{\mathbb{P}}^*(\mathcal{L})$) подмножество $\mathbb{P}(\mathcal{L})$. Пусть $z \in Q$. Тогда, в частности, $z \in \mathbb{X}$. Кроме того, из определения $\mathcal{W}$ вытекает, что $\forall H \in \tilde{\mathcal{F}}$: $\varpi^{-1}(\{z\}) \cap \mathbb{S}^{-1}(H) \neq \emptyset$. Поэтому непустое семейство $\mathcal{Q}$ всех множеств $\varpi^{-1}(\{z\}) \cap \mathbb{S}^{-1}(H)$, $H \in \tilde{\mathcal{F}}$, содержит только непустые множества, причем $\mathcal{Q} \in \mathcal{B}(\mathbb{P}(\mathcal{L}))$, коль скоро $\tilde{\mathcal{F}} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\Gamma})$. Поэтому $\mathcal{Q}$ есть базис фильтра $\mathbb{P}(\mathcal{L})$ и, как следствие, центрированная система замкнутых (в $\tau_{\mathbb{P}}^*(\mathcal{L})$) подмножеств компакта. Пересечение всех множеств из $\mathcal{Q}$ непусто [12]–[14]; выберем элемент μ^0 упомянутого пересечения. Тогда $\mu^0 \in \mathbb{P}(\mathcal{L})$ есть, в частности, элемент пересечения всех множеств $\mathbb{S}^{-1}(H)$, $H \in \tilde{\mathcal{F}}$. Поэтому (см. замечания перед леммой) $\mu^0 \in \tilde{\Omega}$. Поскольку $\mu^0 \in \varpi^{-1}(\{z\})$, имеет место $z \in \varpi^1(\tilde{\Omega})$, чем завершается обоснование вложения $Q \subset \varpi^1(\tilde{\Omega})$, а, стало быть, и леммы в целом. $\square$

Отметим, что $\mathcal{W}$ есть семейство компактных в $(\mathbb{X}, \Upsilon)$ множеств (простое следствие непрерывности (2.10) в топологии подпространства (2.4)). Для последующих утверждений существенна также замкнутость множеств из $\mathcal{W}$. Мы ограничимся сейчас следующим естественным случаем.

Предложение 3.1. *Пусть* $(\mathbb{X}, \Upsilon)$ — *хаусдорфово ТП,* $G \in \Upsilon$ *и* $\varpi^1(\tilde{\Omega}) \subset G$. *Тогда* $\exists H \in \tilde{\mathcal{F}}$: $\varpi^1(S^{-1}(H)) \subset G$.

Доказательство получается непосредственной комбинацией леммы 3.1 и следствия 3.1.5 [13].

Следствие. Пусть триплет $(\mathbb{X}, \Upsilon, G)$ удовлетворяет всем условиям предложения 3.1. Тогда

$$\exists H \in \tilde{\mathcal{F}}\ \forall \tilde{Y} \in \tilde{\mathbb{F}} : (\tilde{Y} \subset H) \Longrightarrow (\varpi^1(\mathbb{S}^{-1}(\tilde{Y})) \subset G).$$

Из следствия предложения 3.1 вытекает важный факт односторонней устойчивости обобщенной "области достижимости": для "близких" к Y множеств $\tilde{Y} \in \mathbb{F}$ имеет место "близость" $\varpi^1(\mathbb{S}^{-1}(\tilde{Y}))$ к $\varpi^1(\tilde{\Omega}) = \varpi^1(\mathbb{S}^{-1}(Y))$. В некоторых задачах со СО этот тип "близости" достаточен для "исправления" патологий исходной постановки (касающейся условия (2.3)). Однако во многих постановках, связанных с некорректными задачами статистики (и в которых приходится "работать" с аналогами $\tilde{Y}$), требуется дальнейшая регуляризация. В этой связи рассматриваем в общей форме асимптотическую версию задачи о достижимости в $(\mathbb{X}, \Upsilon)$ при СО (2.3), возмущаемых в двух вариантах (см. раздел 2), уделяя сначала основное внимание асимптотикам ослабленных ограничений; эффект НВ, требующий использования дополнительных регуляризирующих процедур, обсудим позднее.

Пусть $W \triangleq \varpi \circ \mathfrak{I}$ (оператор из $M_+(\mathcal{L})$ в $\mathbb{X}$, сопоставляющий "точке" (μ, f) элемент $\varpi(f * \mu)$); рассматриваем W как "реализуемый" оператор, особо выделяя его η-сечение $W(\eta, \cdot) = \varpi \circ \mathfrak{I}(\eta, \cdot)$. Тогда

$$\varpi^1(\tilde{\Omega}) \subset (\Upsilon - \mathrm{LIM})[\Im_0 \mid W(\eta, \cdot)] \subset (\Upsilon - \mathrm{LIM})[\Im \mid W]. \tag{3.2}$$

Доказательство аналогично рассуждению по обоснованию теоремы 1.1 [15]. Очевидным следствием теоремы 2.5.2 [7] является

Теорема 3.1. *Если* $(\mathbb{X}, \Upsilon)$ *есть хаусдорфово ТП, то все три множества в* (3.2) *совпадают между собой.*

В связи с реализацией $\varpi^1(\tilde{\Omega})$ в общем случае ТП $(\mathbb{X}, \Upsilon)$ отметим следующее важное обстоятельство, связанное с множеством $\tilde{\Theta} \triangleq \{\Theta[\mu; \cdot] : \mu \in \tilde{\Omega}\}$. Именно, $\tilde{\Theta}$ может, по существу, рассматриваться как достаточное для реализации всего $\varpi^1(\tilde{\Omega})$ множество приближенных решений-направленностей, поскольку для $\mu \in \tilde{\Omega}$, наряду с (2.14), имеет место сходимость направленности $(\mathbb{D}, \prec, W(\eta, \cdot) \circ \Theta[\mu; \cdot])$ к $\varpi(\mu)$ в ТП $(\mathbb{X}, \Upsilon)$. Это обстоятельство есть простое следствие "универсальной" сходимости (2.7) и непрерывности ϖ (в силу упомянутой сходимости (2.7) в рассматриваемом случае имеем сходимость (2.7) и в смысле $\tau^*_{\mathbb{P}}(\mathcal{L})$, коль скоро $\Theta[\mu; \cdot] * \eta$ есть оператор со значениями в компакте (2.6)). Разумеется, операторы из $\tilde{\Theta}$ следует дополнять до направленностей в $\mathbb{F}_0$ посредством $(\mathbb{D}, \prec)$. Множество $\varpi^1(\tilde{\Omega})$, имеющее смысл "аттрактора", есть "совокупность" всех обобщенных пределов направленностей $(\mathbb{D}, \prec, W(\eta, \cdot) \circ h)$, $h \in \tilde{\Theta}$. В условиях отделимости ТП $(\mathbb{X}, \Upsilon)$ получаем здесь конструктивный вариант асимптотической реализации множеств притяжения в упомянутом ТП (см. теорему 3.1). Отметим, что в наиболее интересном для практики случае, характеризуемом теоремой 3.1, "асимптотики" $\Im$ и $\Im_0$ эквивалентны не только "в пределе", но и в смысле более простых "окрестностных" представлений. Легко видеть, что в условиях теоремы 3.1 всегда имеет место компактность в $(\mathbb{X}, \Upsilon)$ множества $\mathrm{cl}(W^1(H), \Upsilon)$ при произвольном выборе множества H, $H \subset M_+(\mathcal{L})$. Как следствие (см. также следствие 3.1.5 ([13], с.197)) справедлива важная с практической точки зрения

Теорема 3.2. *Пусть* $(\mathbb{X}, \Upsilon)$ *есть хаусдорфово ТП,* $G \in \Upsilon$ *и* $\varpi^1(\tilde{\Omega}) \subset G$. *Тогда*

$$\exists \hat{\mathcal{K}} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{L})\ \exists \hat{K} \in \mathrm{Fin}(\Gamma)\ \exists \hat{\varepsilon} \in]0, \infty[\ \forall \mathcal{K} \in (\mathrm{Fin})[\mathcal{L} \mid \hat{\mathcal{K}}]$$
$$\forall K \in (\mathrm{Fin})[\Gamma \mid \hat{K}]\ \forall \varepsilon \in]0, \hat{\varepsilon}] :\ \varpi^1(\tilde{\Omega}) \subset \mathrm{cl}(W^1(\Omega(\mathcal{K}, K, \varepsilon)), \Upsilon) \subset G.$$

Отметим очевидное обстоятельство, касающееся "асимптотики" $\Im_0$: если $(\mathbb{X}, \Upsilon, G)$ удовлетворяет условиям теоремы 3.2, то $\exists \tilde{K} \in \mathrm{Fin}(\Gamma)\ \exists \hat{\varepsilon} \in]0, \infty[\ \forall K \in (\mathrm{Fin})[\Gamma \mid \tilde{K}]\ \forall \varepsilon \in]0, \hat{\varepsilon}] : \varpi^1(\tilde{\Omega}) \subset \mathrm{cl}(W^1(\{\eta\} \times \Omega_0(K, \varepsilon)), \Upsilon) \subset G$. Однако наиболее полезным представляется следующий

Частный случай метризуемого ТП $(\mathbb{X}, \Upsilon)$; пусть в этих условиях Υ порождается метрикой ρ множества $\mathbb{X}$. Следуя [7], [9], [10], [15], введем для всяких множества H, $H \subset \mathbb{X}$, и числа $\varepsilon \in]0, \infty[$ множество $U^0_\rho(H, \varepsilon)$ всех $x \in \mathbb{X}$ таких, что $\exists h \in H : \rho(x, h) < \varepsilon$. Тем самым введена ε-окрестность H в метрическом пространстве $(\mathbb{X}, \rho)$. Из теоремы 3.2 имеем подобно ([15], § 2), что $\forall \chi \in]0, \infty[\ \exists \tilde{\mathcal{K}} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{L})\ \exists \tilde{K} \in \mathrm{Fin}(\Gamma)\ \exists \hat{\varepsilon} \in]0, \infty[\ \forall \mathcal{K} \in (\mathrm{Fin})[\mathcal{L} \mid \tilde{\mathcal{K}}]\ \forall K \in (\mathrm{Fin})[\Gamma \mid \tilde{K}]\ \forall \varepsilon \in]0, \hat{\varepsilon}]$:

$$W^1(\{\eta\} \times \Omega_0(K, \varepsilon)) \subset W^1(\Omega(\mathcal{K}, K, \varepsilon)) \subset U^0_\rho(W^1(\{\eta\} \times \Omega_0(K, \varepsilon)), \chi). \tag{3.3}$$

В связи с (3.3) полезно рассмотреть более конкретный вариант задачи, связанный с исследованием достижимости "в среднем". Итак, допустим до конца настоящего раздела, что $\Gamma = \overline{1, m}$, так что анализируется m-мерный случайный вектор; на МО накладывается условие (2.3), в простейшей версии которого Y есть одноэлементное подмножество множества $\mathbb{R}^m : Y = \{a\}$. В качестве вектора a было бы желательно использовать МО $(S_1, \ldots, S_m)$, отвечающее истинному распределению вероятностей. Но такая информация зачастую отсутствует и мы применяем в качестве a вектор эмпирических средних для $(S_1, \ldots, S_m)$, определяемый на основе достаточно представительных выборок. Пусть $(h_1, \ldots, h_n)$ — другой случайный вектор, и мы интересуемся его МО при истинном распределении вероятностей. Полагаем, что это распределение имеет плотность по отношению к $(E, \mathcal{L}, \eta)$, так что аналогом $W(\eta, \cdot)$ является здесь вектор-функция

$$f \to \left(\int_E h_1 f d\eta, \ldots, \int_E h_n f\, d\eta\right) : \mathbb{F} \to \mathbb{R}^n; \tag{3.4}$$

при этом $\mathbb{X}$ конкретизируется в виде $\mathbb{R}^n$. Однако даже при использовании (для оценивания распределения) множества $\mathbb{F}_\partial$ приходим к проблеме моментов с "многозначным" решением (реакция системы на a и здесь многозначна). Если же учесть погрешности, "рассогласовывающие" a с истинным МО, то прогнозируемое множество значений (3.4) может скачком измениться по отношению к образу $\mathbb{F}_\partial$ в силу отображения (3.4); упомянутый образ $\mathbb{F}_\partial$ имеет смысл области достижимости "в среднем". Явление неустойчивости ставит под сомнение качество прогноза значений h на основе этой области. Теорема 3.1 доставляет иной вариант прогнозирования. Для этого отображение (3.4) следует продолжить; с принципиальной точки зрения такое продолжение, как видно из (3.2) и теоремы 3.1, достаточно осуществить "до отображения" на компакте (2.6). Однако по соображениям более полного учета "реальных" возмущений, затрагивающих возможно η, имеет смысл выполнить продолжение (3.4) на компакт (2.5), определяя подходящую версию (3.1). Последняя реализуется в виде

$$\mu \to \left(\int_E h_1 d\mu, \ldots, \int_E h_n d\mu\right) :\ \mathbb{P}(\mathcal{L}) \to \mathbb{R}^n. \tag{3.5}$$

Образ $\tilde{\Omega}$ в силу (3.5) доставляет некоторое стабильное состояние для области достижимости "в среднем". Возле этого "состояния" у задачи реализуется свойство грубости (3.3). Это свойство, в частности, касается тех компонент h, которые являются дискретными случайными величинами (имеется в виду "стандартная" версия $(E, \mathcal{L})$). Разумеется, указанное свойство грубости имеет смысл при ретроспективном анализе явления, когда исследователь "в рамках" однажды полученных данных проигрывает версии возможного поведения "природы". Однако при использовании некоторой дополнительной регуляризации возможно придать этому свойству и более конструктивный характер.

4. Регуляризация множеств притяжения

Мы акцентируем в этом разделе внимание на способах "компенсации" НВ. По существу, речь идет о приближенном построении $\varpi^1(\tilde{\Omega})$ при "отягчающих обстоятельствах". К последним относим неточности при определении или моделировании S_γ (2.1), а также неточности описания Y (в заключении предыдущего раздела указана содержательная задача, где оба упомянутых обстоятельства имеют место). Мы рассматриваем сейчас случай, когда имеется априорная информация о величине отмеченных погрешностей в виде оценок сверху (последнее представляется весьма реалистичным в отношении погрешностей воспроизведения значений (2.1); например, здесь можно полагать, что в интересах вычисления интегралов в (2.3) мы намеренно подменяем S_γ ступенчатыми отображениями, для которых интегралы подменяются конечными суммами и допускают принципиально вычисление на ЭВМ). В отношении Y мы ориентируемся на максимальное использование конечномерных фрагментов, действуя по аналогии с [22]. Для $K \in \mathrm{Fin}(\Gamma)$ через $\mathcal{P}_0(K)$ обозначаем семейство всех подмножеств $\mathbb{R}^K$ и при $\delta \in [0, \infty[$ полагаем

$$\mathcal{P}^0[K;\delta] \triangleq \{H \in \mathcal{P}_0(K) \mid (\forall y \in Y\ \exists h \in H\ \forall \gamma \in K : \mid y(\gamma) - h(\gamma) \mid \leq \delta) \& \\ (\forall \tilde{h} \in H\ \exists \tilde{y} \in Y\ \forall \gamma \in K : \mid \tilde{y}(\gamma) - \tilde{h}(\gamma) \mid \leq \delta)\}. \quad (4.1)$$

Если K и δ, $\delta \geq 0$, фиксированы, то в качестве входной информации о (2.1) и множестве Y будем использовать элементы (2.11) и (4.1) соответственно; вместе с тем будет активно использоваться, по аналогии с (2.12) и (2.13), параметр ε, $\varepsilon > 0$, отвечающий процедуре "демпфирования" эффектов, связанных с ослаблением СО. Разумеется, наиболее естественной является ситуация, когда $\delta > 0$ и $\varepsilon > 0$, но мы не исключаем и случай точной реализации значений (2.1) и конечномерных фрагментов Y. Если $\mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{L})$, $K \in \mathrm{Fin}(\Gamma)$, $(S'_\gamma)_{\gamma \in K} \in B(E, \mathcal{L})^K$, $Z \in \mathcal{P}_0(K)$ и $\varepsilon \in]0, \infty[$, то через $\Omega_*(\mathcal{K}, K, (S'_\gamma)_{\gamma \in K}, Z, \varepsilon)$ обозначаем множество всех $(\mu, f) \in M_+(\mathcal{L})$ со свойствами

$$((\mu \mid \mathcal{K}) = (\eta \mid \mathcal{K}))\ \&\ \left(\exists z \in Z\ \forall \gamma \in K : \left| \int_E S'_\gamma f\, d\mu - z(\gamma) \right| \leq \varepsilon \right). \quad (4.2)$$

В виде (4.2) имеем модифицированную на случай НВ процедуру типа (2.12). Если $K \in \mathrm{Fin}(\Gamma)$, $(S'_\gamma)_{\gamma \in K} \in B(E, \mathcal{L})^K$, $Z \in \mathcal{P}_0(K)$, $t \in [0, \infty[$ и $\varepsilon \in]0, \infty[$, то через $\Omega^0_*(K, (S'_\gamma)_{\gamma \in K}, Z, t, \varepsilon)$ обозначаем множество всех таких $f \in \mathbb{F}_0$, что $\exists z \in Z$:

$$\left(\forall \gamma \in K \cap \Gamma_0 : \left| \int_E S'_\gamma f\, d\eta - z(\gamma) \right| \leq t \right)\ \&\ \left(\forall \gamma \in K \backslash \Gamma_0 : \left| \int_E S'_\gamma f\, d\eta - z(\gamma) \right| \leq t + \varepsilon \right),$$

получая модификацию условий вида (2.13). Для "рабочей" ситуации $K \in \mathrm{Fin}(\Gamma)$, $\delta \in [0, \infty[$, $(S'_\gamma)_{\gamma \in K} \in O_K(\delta)$, $Z \in \mathcal{P}^0[K;\delta]$ и $\varepsilon \in]0, \infty[$ имеет место $\Omega_0(K, \varepsilon) \subset \Omega^0_*(K, (S'_\gamma)_{\gamma \in K}, Z, 2\delta, \varepsilon)$. В общих условиях $\mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{L})$, $K \in \mathrm{Fin}(\Gamma)$, $(S'_\gamma)_{\gamma \in K} \in B(E, \mathcal{L})^K$, $Z \in \mathcal{P}_0(K)$, $t \in [0, \infty[$ и $\varepsilon \in]0, \infty[$ имеем очевидное вложение

$$\{\eta\} \times \Omega^0_*(K, (S'_\gamma)_{\gamma \in K}, Z, t, \varepsilon) \subset \Omega_*(\mathcal{K}, K, (S'_\gamma)_{\gamma \in K}, Z, t + \varepsilon). \quad (4.3)$$

По аналогии с предложением 6.1 работы [22] устанавливается

Теорема 4.1. *Пусть триплет* $(\mathbb{X}, \Upsilon, G)$ *удовлетворяет условиям теоремы* 3.2. *Тогда* $\exists \tilde{\mathcal{K}} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{L})$ $\exists \tilde{K} \in \mathrm{Fin}(\Gamma)$ $\exists \tilde{\varepsilon} \in]0, \infty[$ $\forall \mathcal{K} \in (\mathrm{Fin})[\mathcal{L} \mid \tilde{\mathcal{K}}]$ $\forall K \in (\mathrm{Fin})[\Gamma \mid \tilde{K}]$ $\forall \delta \in [0, \tilde{\varepsilon}]$ $\forall (S'_\gamma)_{\gamma \in K} \in O_K(\delta)$ $\forall Z \in \mathcal{P}^0[K;\delta]$ $\forall \varepsilon \in]0, \tilde{\varepsilon}]$:

$$\varpi^1(\tilde{\Omega}) \subset \mathrm{cl}(W^1(\Omega_*(\mathcal{K}, K, (S'_\gamma)_{\gamma \in K}, Z, \varepsilon + 2\delta)), \Upsilon) \subset G. \quad (4.4)$$

В свою очередь для второй версии регуляризирующей процедуры имеем в условиях теорем 3.2 и 4.1 на $(\mathbb{X}, \Upsilon, G)$, что $\exists \tilde{K} \in \mathrm{Fin}(\Gamma)\ \exists \tilde{\varepsilon} \in]0, \infty[\ \forall K \in (\mathrm{Fin})[\Gamma \mid \tilde{K}]\ \forall \delta \in [0, \tilde{\varepsilon}]\ \forall (S'_\gamma)_{\gamma \in K} \in O_K(\delta)$ $\forall Z \in \mathcal{P}^0[K; \delta]\ \forall \varepsilon \in]0, \tilde{\varepsilon}]$:

$$\varpi^1(\tilde{\Omega}) \subset \mathrm{cl}(W^1(\{\eta\} \times \Omega^0_*(K, (S'_\gamma)_{\gamma \in K}, Z, 2\delta, \varepsilon)), \Upsilon) \subset G.$$

Пусть до конца настоящего раздела $(\mathbb{X}, \Upsilon, \rho)$ соответствует условиям частного случая метризуемого ТП, рассматриваемого в разделе 3 (ρ — метрика $\mathbb{X}$, порождающая Υ). Естественной модификацией (3.3) является

Теорема 4.2. *Пусть* $\chi \in]0, \infty[$. *Тогда* $\exists \tilde{\mathcal{K}} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{L})\ \exists \tilde{K} \in \mathrm{Fin}(\Gamma)\ \exists \tilde{\varepsilon} \in]0, \infty[\ \forall \mathcal{K} \in (\mathrm{Fin})[\mathcal{L} \mid \tilde{\mathcal{K}}]$ $\forall K \in (\mathrm{Fin})[\Gamma \mid \tilde{K}]\ \forall \delta \in [0, \tilde{\varepsilon}]\ \forall (S'_\gamma)_{\gamma \in K} \in O_K(\delta)\ \forall Z \in \mathcal{P}^0[K; \delta]\ \forall \varepsilon \in]0, \tilde{\varepsilon}]$:

$$W^1(\{\eta\} \times \Omega^0_*(K, (S'_\gamma)_{\gamma \in K}, Z, 2\delta, \varepsilon)) \subset W^1(\Omega_*(\mathcal{K}, K, (S'_\gamma)_{\gamma \in K}, Z, \varepsilon + 2\delta)) \subset \\ \subset U^0_\rho(W^1(\{\eta\} \times \Omega^0_*(K, (S'_\gamma)_{\gamma \in K}, Z, 2\delta, \varepsilon)), \chi). \quad (4.5)$$

Доказательство. Полагаем в теореме 4.1 $G \triangleq U^0_\rho(\varpi^1(\tilde{\Omega}), \chi/2)$, после чего подбираем триплет $(\tilde{\mathcal{K}}, \tilde{K}, \tilde{\varepsilon})$ в соответствии с утверждением этой теоремы. Пусть $\mathcal{K}$, K, δ $(S'_\gamma, \gamma \in K)$, Z и ε выбраны в соответствии с условиями, обеспечивающими (4.4) при упомянутых $\tilde{\mathcal{K}}$, $\tilde{K}$ и $\tilde{\varepsilon}$. Из (4.3) сразу получаем первое вложение в (4.5), так что остается установить только второе вложение, исходя из конкретизации (4.4). Вместе с тем

$$\varpi^1(\tilde{\Omega}) \subset \mathrm{cl}(W^1(\{\eta\} \times \Omega_0(K, \varepsilon)), \Upsilon) \subset \mathrm{cl}(W^1(\{\eta\} \times \Omega^0_*(K, (S'_\gamma)_{\gamma \in K}, Z, 2\delta, \varepsilon)), \Upsilon) \quad (4.6)$$

согласно (3.2) и соотношениям, обсуждавшимся перед теоремой 4.1. Обозначим для краткости через $\mathbb{H}$ последнее в (4.6) множество так, что $\varpi^1(\tilde{\Omega}) \subset \mathbb{H}$. По этой причине $G \subset U^0_\rho(\mathbb{H}, \chi/2)$. Тогда согласно теореме 4.1 получаем (см. (4.4)), в частности, вложение

$$W^1(\Omega_*(\mathcal{K}, K, (S'_\gamma)_{\gamma \in K}, Z, \varepsilon + 2\delta)) \subset U^0_\rho(\mathbb{H}, \frac{\chi}{2}). \quad (4.7)$$

Пусть x_* — элемент множества в левой части (4.7); тогда $x_* \in \mathbb{X}$ и для некоторого $x^* \in \mathbb{H}$: $\rho(x_*, x^*) < \frac{\chi}{2}$. Поскольку Υ есть топология, порожденная ρ, то (по определению $\mathbb{H}$) имеем $x^0 \in W^1(\{\eta\} \times \Omega^0_*(K, (S'_\gamma)_{\gamma \in K}, Z, 2\delta, \varepsilon))$ со свойством $\rho(x^*, x^0) < \frac{\chi}{2}$. Из неравенства треугольника получаем сразу, что $\rho(x_*, x^0) < \chi$ и $x_* \in U^0_\rho(W^1(\{\eta\} \times \Omega^0_*(K, (S'_\gamma)_{\gamma \in K}, Z, 2\delta, \varepsilon)), \chi)$. Поскольку выбор x_* был произвольным, второе вложение в (4.5) установлено. $\square$

Таким образом, и в условиях НВ имеет место грубость задачи при возмущении существенной части параметров (теорема 4.2 является развитием (3.3)).

5. Пример

Рассмотрим простой пример, показывающий существенность применения регуляризации в условиях НВ. Ограничимся анализом влияния возмущений оператора (2.1); такое добавление существенно и в связи с односторонним характером устойчивости $w^1(\tilde{\Omega})$ в предложении 3.1. Рассмотрим в качестве $(E, \mathcal{L})$ "стрелку" $[0, 1[$ с полуалгеброй всевозможных промежутков $[a, b[,\ 0 \leq a \leq b \leq 1$; η определяем в виде функции длины упомянутых промежутков. Рассмотрим функцию s из $[0, 1[$ в $\mathbb{R}$, сопоставляющую числу $t,\ 0 \leq t < 1$, наибольшее из чисел t и $1 - t$. Рассмотрим (для упомянутой версии $(E, \mathcal{L}, \eta)$) условие

$$\int_0^1 s(\omega) f(\omega) d\omega = 1 \quad (5.1)$$

на выбор $f \in \mathbb{F}_0$ (ограничимся для простоты случаем ступенчатых "управлений" f, что, впрочем, непринципиально). Кроме того, рассмотрим на $\mathbb{F}_0$ функционал g, сопоставляющий функции $f \in \mathbb{F}_0$ ее интеграл на $[2/3, 1[$ (т.е., по сути дела, — вероятность события: $2/3 \leq \omega$). Условие (5.1) несовместно (см. примеры [7], гл. I; [10], § 1). Ограничимся обсуждением вопроса о целесообразности регуляризации множеств притяжения. Рассматриваемая задача погружается в общую постановку разделов 2,3 при следующих соглашениях: $\Gamma \triangleq \{1\}$ (одноэлементное множество), $S_1 \triangleq s$, Y определяется посредством одноэлементного множества $\{1\}$ так, что $\tilde{\Omega}$ есть множество всех $\mu \in \mathbb{P}(\mathcal{L})$ со свойством

$$\int_{[0,1[} s(\omega)\mu(d\omega) = 1 \tag{5.2}$$

(в рассматриваемом случае $\mathbb{P}(\mathcal{L}) = \mathbb{P}_\eta(\mathcal{L})$); условие (5.2) совместно. Соответственно может быть определен образ множества $\tilde{\Omega}$ в силу подходящего аналога w; определяем это отображение в виде правила, которое сопоставляет к.-а. вероятности $\mu \in \mathbb{P}(\mathcal{L})$ число $\mu([2/3,\ 1[)$. Будем допускать возмущение s в терминах (2.11). Множество $w^1(\tilde{\Omega})$ в рассматриваемом случае реализуется в условиях теоремы 3.1 так, что здесь (3.2) преобразуется в систему равенств и мы воспользуемся его представлением на основе множества притяжения для "асимптотики" $\Im_0$, полагая при этом $\Gamma_0 = \emptyset$. Заметим, что точка 1 является элементом упомянутого множества притяжения (см.(5.2)). Действительно, условию (5.2) удовлетворяют, например, мера Дирака на $\mathcal{L}$, сосредоточенная в точке $\omega = 0$, а также чисто к.-а. (в смысле разложения Хьютта-Иосиды) вероятность μ_1 на $\mathcal{L}$, для которой $\mu_1([a, b[) = g_1(b) - g_1(a)$ при $0 \leq a < b \leq 1$, где функция g_1 отображает $[0, 1]$ в $\{0; 1\}$ и отлична от нуля в единственной точке $1:\ g_1(1) \triangleq 1$. Подробнее о построении и свойствах μ_1 см. в ([23], сс. 114, 115). Тогда $w(\mu_1) = 1$, т.е. $1 \in w^1(\tilde{\Omega})$. Кроме того, $0 \in w^1(\tilde{\Omega})$. Легко видеть, что на самом деле $w^1(\tilde{\Omega}) = [0, 1]$. Заметим, что в рассматриваемом случае множество K в (2.13) всегда совпадает с $\Gamma = \{1\}$, а само множество $\Omega_0(K, \varepsilon)$, где $\varepsilon \in]0, \infty[$, есть множество всех таких $f \in \mathbb{F}_0$, что (5.1) выполняется с точностью до ε (уклонение левой и правой частей (5.1) не превосходит ε). Согласно теореме 3.1 имеет место $1 \in \mathrm{cl}(W^1(\{\eta\} \times \Omega_0(\{1\}, \varepsilon)), \tau_{\mathbb{R}})$ при $\varepsilon > 0$. Это означает асимптотическую достижимость числа 1. Рассмотрим теперь случай, когда s возмущается до функции $s_k^* : E \longrightarrow \mathbb{R}$, сопоставляющей точке $t \in [0, 1[$ наибольшее из чисел $kt, 1 - t;\ k \in [1/2,\ 1[$. Разумеется, при $k \approx 1$ уклонение s и s_k^* близко к 0 равномерно на E. Рассмотрим асимптотический вариант (5.1) в условиях замены s на s_k^*. Тогда нам потребуется рассмотреть множества $F_k^*(\varepsilon)$ всех $f \in \mathbb{F}_0$ со свойством

$$\left| \int_0^1 s_k^*(\omega) f(\omega)\, d\omega - 1 \right| \leq \varepsilon, \tag{5.3}$$

где $\varepsilon > 0$. В виде $F_k^*(\varepsilon)$ мы имеем версию $\Omega_0(\{1\}, \varepsilon)$ при "простой" замене $s \to s_k^*$. Мы рассматриваем $\mathrm{cl}(g^1(F_k^*(\varepsilon)), \tau_{\mathbb{R}})$ при $\varepsilon > 0$, а также предел соответствующей многозначной зависимости. Разумеется, (5.3) — совместное условие (при $\varepsilon > 0$), коль скоро в качестве $f \in \mathbb{F}_0$ можно выбрать достаточно узкий прямоугольный "импульс" единичной площади, примыкающий справа к точке $\omega = 0$. Это означает, что $0 \in \mathrm{cl}(g^1(F_k^*(\varepsilon)), \tau_{\mathbb{R}})$ при достаточно малых ε, $\varepsilon > 0$. Пусть $k \in [1/2, 1[$, $t^* = (1 + k)^{-1}$, $\alpha^* = kt^*$. Легко видеть, что $t^* \in]0, 2/3]$, $\alpha^* > 0$ есть значение функции s_k^* в точке t^*, причем на $[t^*, 1[$ значения s_k^* оцениваются снизу константой α^*, а сверху — константой k. Пусть $f \in \mathbb{F}_0$ допустимо в смысле (5.3), где $\varepsilon > 0$ фиксировано. Тогда имеет место неравенство, вытекающее из (5.3),

$$1 - \varepsilon \leq \int_0^1 s_k^*(\omega) f(\omega)\, d\omega \leq \int_0^{2/3} f(\omega)\, d\omega + k \int_{2/3}^1 f(\omega)\, d\omega = 1 + (k - 1) \int_{2/3}^1 f(\omega)\, d\omega.$$

В результате $g(f) \le \varepsilon(1-k)^{-1}$. Поскольку выбор ε, $\varepsilon > 0$, был произвольным, то пересечение всех множеств $\mathrm{cl}(g^1(F_k^*(\varepsilon)), \tau_{\mathbb{R}})$, $\varepsilon > 0$, есть одноэлементное множество $\{0\}$. Мы видим, что при замене s на s_k^*, где $k \approx 1$ и $k < 1$, из множества притяжения для s-задачи (случай невозмущенного оператора (2.1)) "исчезает" точка 1, а само множество притяжения меняется до $\{0\}$. Это изменение вполне соответствует положению об односторонней устойчивости $w^1(\tilde{\Omega})$ и тем не менее существенно с точки зрения многих приложений, связанных с обработкой статистической информации. Компенсация таких скачкообразных изменений достигается применением регуляризирующих конструкций предыдущего раздела.

Литература

1. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. *Методы решения некорректных задач.* – М.: Наука, 1989. – 287 с.
2. Тихонов А.Н., Уфимцев М.В. *Статистическая обработка результатов экспериментов.* – М.: Изд-во Московского университета, 1988. – 174 с.
3. Иванов В.К., Васин В.В, Танана В.П. *Теория линейных некорректных задач и ее приложения.* – М.: Наука, 1978. – 206 с.
4. Васин В.В, Агеев А.Л. *Некорректные задачи с априорной информацией.* – Екатеринбург: Наука, 1993. – 262 с.
5. Хьюбер П. *Робастность в статистике.* – М.: Мир,1984. – 304 с.
6. Хампель Ф., Рончетти Э., Рауссеу П., Штаэль В. *Робастность в статистике. Подход на основе функций влияния.* – М.: Мир, 1989. – 512 с.
7. Ченцов А.Г. *Конечно-аддитивные меры и релаксации экстремальных задач.* – Екатеринбург: Наука, 1993. – 232 с.
8. Невё Ж. *Математические основы теории вероятностей.* – М.: Мир, 1969. – 309 с.
9. Ченцов А.Г. *К вопросу о корректном расширении одной задачи о выборе плотности вероятности при ограничениях на систему математических ожиданий* // УМН. – Т. 50. – № 5. – С. 223–241.
10. Ченцов А.Г. *О корректном расширении некоторых задач со стохастическими ограничениями* // Автоматика и телемеханика. – 1995. – № 7. – С. 68–79.
11. Ченцов А.Г. *Асимптотическая достижимость при возмущении интегральных ограничений в абстрактной задаче управления.* I // Изв. вузов. Математика. – 1995. – № 2. – С. 60–71.
12. Келли Дж.Л. *Общая топология.* – М.: Наука, 1981. – 431 с.
13. Энгелькинг Р. *Общая топология.* – М.: Мир, 1986. – 751 с.
14. Александрян Р.А., Мирзаханян Э.А. *Общая топология.* – М.: Высш. школа, 1979. – 336 с.
15. Ченцов А.Г. *Асимптотическая достижимость при возмущении интегральных ограничений в абстрактной задаче управления.* II // Изв. вузов. Математика. – 1995. – № 3. – С. 62–73.
16. Ченцов А.Г. *Асимптотически достижимые элементы: нечувствительность к возмущению части условий и физическая реализуемость* // Изв. вузов. Математика. – 1993. – № 5. – С. 112–123.
17. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. *Линейные операторы. Общая теория.* – М.: Ин. лит., 1962. – 895 с.
18. Красовский Н.Н. *Теория управления движением.* – М.: Наука, 1968. – 475 с.
19. Красовский Н.Н. *Игровые задачи о встрече движений.* – М.: Наука, 1970. – 420 с.
20. Панасюк А.И., Панасюк В.И. *Асимптотическая магистральная оптимизация управляемых систем.* – Минск: Наука и техника, 1986. – 296 с.
21. Бурбаки Н. *Общая топология. Основные структуры.* – М.: Наука, 1968. – 272 с.

22. Ченцов А.Г. *Задача о построении множеств асимптотической достижимости и ее регуляризация* // Изв. вузов. Математика. – 1995. - № 10. – С. 61–75.
23. Ченцов А.Г. *Приложения теории меры к задачам управления.* – Свердловск: Средне-Уральское книжное изд-во, 1985. – 127 с.

Институт математики и механики
Уральского Отделения
Российской Академии наук

Поступила
21.02.1996