ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1997 МАТЕМАТИКА № 9 (424)

УДК 514.76

П.Е. МАРКОВ

ОБЩИЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ И БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ДЕФОРМАЦИИ ПОГРУЖЕНИЙ. I

Введение

Работа посвящена бесконечно малым (б. м.) деформациям конечного порядка и аналитическим деформациям погружений гладкого n-мерного многообразия X в плоское m-мерное, $1 \le n \le m$, пространство Π произвольной сигнатуры без каких-либо ограничений на вид возникающих вариаций метрики и других сечений тензорных расслоений. Такие деформации мы называем *общими* деформациями. Теория общих деформаций представляет собою основу всех "специальных" теорий деформаций: аналитических и б. м. изгибаний ([1]–[4]), конформных деформаций [5], [6], деформаций с сохранением грассманова образа [7], ареальных деформаций [8] и т. д. (см. также [9], [10]). Несмотря на большую общность, эта теория оказывается богатой содержанием. Так, для общей аналитической (б. м.) деформации погружения $X \to \Pi$ можно построить систему полей вращений, вывести систему основных уравнений (аналог основных уравнений теории поверхностей) и доказать аналог основной теоремы теории поверхностей. Точные формулировки этих результатов требуют введения некоторых обозначений и определений и будут приведены позже. Основные обозначения, терминология и предварительные результаты приводятся в § 1. В этом же параграфе выводятся уравнения Гаусса, Петерсона-Кодацци и Риччи для C^2-погружений.

§ 2 посвящен системе полей вращений для общей аналитической (б. м.) деформации погружения $X \to \Pi$. Эта система является одним из фундаментальных понятий теории б. м. и аналитических изгибаний поверхностей. Для б. м. изгибаний первого порядка двумерной поверхности в E^3 поле вращений было известно еще Г. Дарбу ([11], гл. 3, с. 48–72). В случае б. м. изгибаний конечного порядка и аналитических изгибаний двумерной поверхности в E^3 система полей вращений рассматривалась в статье Н.В. Ефимова [1]. Для б. м. изгибаний первого порядка n-мерной поверхности в Π поле вращений было введено в работе [12] как поле бивекторов в Π. Для б. м. изгибаний произвольного порядка (аналитических изгибаний) погружения $X \to \Pi$ система полей вращений была введена в работе [13]. Здесь мы докажем существование и единственность системы полей вращений для общей б. м. деформации произвольного порядка погружения $X \to \Pi$ и установим некоторые свойства этой системы. В частности, будут выведены формулы, выражающие дифференциалы полей вращений через вариации форм локального корепера, связности, погружения и кручения, обобщающие известные формулы для производных поля вращений двумерной поверхности в E^3 ([1], [14], гл. 5, § 6, с. 337).

В § 3 мы рассмотрим систему уравнений, решения которой определяют б. м. деформации конечного порядка погружения $X \to \Pi$. Эта система может быть получена формальным варьированием основных уравнений теории поверхностей и потому называется основной системой теории б. м. деформаций погружений. Проблема заключается в доказательстве того, что для всякого решения этой системы найдется б. м. деформация погружения, при которой вариации форм локального корепера, связности, погружения и кручения совпадут с формами этого решения (аналог основной теоремы теории поверхностей). В случае б. м. изгибаний первого порядка двумерной поверхности в E^3 эта теорема была известна еще Г. Дарбу ([11], гл. 2, с. 18–47). Для б. м. изгибаний первого порядка n-мерных поверхностей в m-мерных пространствах постоянной кривизны она доказана в работе [15]. Для б. м. изгибаний высших порядков погружения $X \to \Pi$ — в работе [13]. Для б. м. деформаций первого порядка с заданной вариацией метрики n-мерной поверхности в m-мерном евклидовом пространстве — в работе [16]. Здесь мы докажем эту теорему для общей б. м. деформации произвольного конечного порядка погружения $X \to \Pi$. В этом же параграфе устанавливается вид вариаций форм локального корепера и связности, для которых соответствующая б. м. деформация является б. м. изгибанием.

В § 4 проводится исследование основной системы уравнений в зависимости от типового числа погружения. Типовое число было введено К.Б. Аллендорфером [17] в связи с двумя фундаментальными результатами. Первый из них утверждает жесткость погружений с типовым числом ≥ 3, второй — что для погружений с типовым числом ≥ 4 уравнения Петерсона-Кодацци и Риччи являются следствиями уравнений Гаусса. Данное Аллендорфером определение типового числа довольно громоздко и многими авторами подвергалось обработке (см. [18]–[22]). Мы докажем два аналога второго из результатов Аллендорфера для рассмотренной в § 3 основной системы уравнений. Определение типового числа мы даем по книге [22] (Прим. 17, с. 317). Схему доказательств заимствуем из статьи [21], где дается упрощенное доказательство теоремы Аллендорфера.

1. Предварительные результаты

1.1. Всюду под X будем понимать связное n-мерное, $n \geq 1$, хаусдорфово ориентируемое C^∞-многообразие, удовлетворяющее второй аксиоме счетности. Всякое расслоение с базой X и тотальным пространством $P(X)$ будем обозначать символом его тотального пространства $P(X)$. Слой над точкой $x \in X$ будем обозначать через $P_x(X)$. Через $T(X)$ обозначаем касательное к X расслоение, через $T^*(X)$ — кокасательное к X расслоение. Рассмотрим путь $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to X$, $\varepsilon > 0$, $\gamma(0) = x \in X$, класса C^s, $s \geq 1$. Обозначим через $C^s(x)$ множество всех функций класса C^s в некоторой окрестности точки x. Отображение $v : C^s(x) \to \mathbf{R}$, определенное формулой $v(f) = \left.\dfrac{d^s f(\gamma(t))}{dt^s}\right|_{t=0}$, называется s-касательным вектором к пути γ в точке x. Линейная оболочка $T_x^{(s)}(X)$, натянутая на множество s-касательных векторов к всевозможным C^s-путям, проходящим через точку x, является векторным пространством размерности $\sum\limits_{k=1}^{s} \dfrac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!}$ и называется s-касательным пространством к X в точке x. Векторное расслоение, слоем над каждой точкой $x \in X$ которого является $T_x^{(s)}(X)$, называется s-касательным расслоением многообразия X (этот термин мы заимствовали из [23], гл. 7, с. 153). При $s = 1$ получаем касательное расслоение. Для всякого C^r-расслоения $P(X)$, $1 \leq s \leq r$, через $P^{(s)}(X)$ мы обозначаем C^{r-s}-расслоение, слоем над каждой точкой $x \in X$ которого является s-касательное расслоение $T^{(s)}(P_x(X))$ к слою $P_x(X)$. Расслоение $P^{(s)}(X)$ мы называем s-производным расслоением расслоения $P(X)$.

Через $\mathcal{E}^r(X, P(X))$ будем обозначать множество всех C^r-сечений расслоения $P(X)$. Для двух многообразий X и Y через $C^r(X, Y)$ обозначаем множество всех отображений $X \to Y$ класса C^r. Каждое отображение $f : X \to Y$ мы рассматриваем как сечение $x \mapsto (x, f(x))$ тривиального расслоения $X \times Y$, так что $C^r(X, Y) = \mathcal{E}^r(X, X \times Y)$.

1.2. Пусть $\Im(X)$ — расслоение локальных кореперов на X. Желая подчеркнуть гладкость локального корепера, мы будем рассматривать его как сечение этого расслоения, указывая область определения, в случае необходимости, дополнительно. Пусть G — группа Ли, являющаяся подгруппой полной линейной группы $\mathbf{GL(n)}$. О двух локальных кореперах $\tau, \tau' \in \mathcal{E}^r(X, \Im(X))$ с областями определения U, U' соответственно будем говорить, что они G-согласованы, если либо $U \cap U' = \emptyset$, либо в каждой точке $x \in U \cap U'$ соответствующие базисы $\tau(x) = (\tau^i(x))_{i=1}^n$, $\tau'(x) = (\tau'^k(x))_{k=1}^n$ пространства $T_x^*(X)$ связаны равенством $\tau'^k(x) = p_i^k(x)\tau^i(x)$, где матрица $P = (p_i^k) \in C^r(X, G)$. Множество всех попарно G-согласованных локальных кореперов называется G-орбитой. Так как области определения локальных кореперов покрывают

X, то, хотя отношение G-согласованности и не является отношением эквивалентности, множество всех локальных C^r-кореперов на X разбивается на непересекающиеся G-орбиты, и каждая G-орбита однозначно определяется заданием какого-либо ее корепера ([24], гл. 2, § 6, с. 144). Всякая G-орбита представляет собою локально-тривиальное расслоение со стандартным слоем G и структурной группой G.

1.3. В качестве группы G у нас будет выступать псевдоортогональная группа, определяемая следующим образом. Зафиксируем упорядоченный набор $\Delta = (\Delta^1, \ldots, \Delta^n)$, где $\Delta^i = \pm 1$, $i = 1, \ldots, n$. Будем обозначать также через Δ диагональную $n \times n$-матрицу, на диагонали которой в i-й строке стоит Δ^i. Через $\mathbf{O(n, \Delta)}$ обозначим совокупность всех $n \times n$-матриц P, удовлетворяющих условию $\Delta P^T = P^{-1}\Delta$, где P^T — матрица, получаемая из P транспонированием. Легко видеть, что $\mathbf{O(n, \Delta)}$ — подгруппа группы $\mathbf{GL(n)}$. Группу $\mathbf{O(n, \Delta)}$ будем называть псевдоортогональной группой сигнатуры Δ. Из ее определения следует, что если $P \in \mathbf{O(n, \Delta)}$, то $\det P = \pm 1$. Множество всех матриц $P \in \mathbf{O(n, \Delta)}$ с $\det P = +1$ образует подгруппу группы $\mathbf{O(n, \Delta)}$, называемую специальной псевдоортогональной группой и обозначаемую $\mathbf{SO(n, \Delta)}$. Тот факт, что $\mathbf{SO(n, \Delta)}$ является группой Ли, выводится из следующей леммы, распространяющей рациональную параметризацию ортогональной группы по Кэли ([25], гл. 2, § 10) на группу $\mathbf{SO(n, \Delta)}$, и используемую нами в дальнейшем. В формулировке этой леммы $\wedge(n)$ обозначает пространство кососимметрических $n \times n$-матриц. Предполагается, что топология в $\mathbf{SO(n, \Delta)}$ и $\wedge(n)$ индуцируется евклидовой нормой в пространстве всех $n \times n$-матриц ([26], гл. 14, § 2, с. 409).

Лемма 1. *Ненулевая матрица в пространстве $\wedge(n)$ обладает окрестностью U, которую отображение θ, определенное формулой $\theta(v) = (1 + v\Delta)(1 - v\Delta)^{-1}$, $v \in U$, аналитически диффеоморфно отображает на окрестность $\theta(U)$ единичной матрицы 1 в группе $\mathbf{SO(n, \Delta)}$.*

Доказательство. Обозначая через U окрестность нулевой матрицы в $\wedge(n)$, на которой $\det(1 - v\Delta) \neq 0$, для всякой матрицы $v \in U$ имеем

$$\begin{aligned}(\theta(v))^T &= (1 + \Delta v)^{-1}(1 - \Delta v) = ((1 - \Delta v)^{-1} + (1 - \Delta v)^{-1}\Delta v)^{-1} = \\ &= ((1 + \Delta v)(1 - \Delta v)^{-1} + (1 - \Delta v)(1 - \Delta v)^{-1} - \\ &\quad - (1 - \Delta v)^{-1} - (1 - \Delta v)^{-1}(1 - \Delta v) + (1 - \Delta v)^{-1})^{-1} = \\ &= ((1 + \Delta v)(1 - \Delta v)^{-1})^{-1} = \Delta(\theta(v))^{-1}\Delta.\end{aligned}$$

Следовательно, $\theta(v) \in \mathbf{SO(n, \Delta)}$. Легко видеть, что обратное отображение θ^{-1} существует на $\theta(U)$ и имеет вид $\theta^{-1}(P) = -(1 - P)(1 + P)^{-1}\Delta$, $P \in \theta(U)$. Так как элементы матрицы $\theta(v)$ являются рациональными функциями элементов матрицы v, а элементы матрицы $\theta^{-1}(P)$ — рациональными функциями элементов матрицы P, то θ — аналитический диффеоморфизм. □

Композицией отображения θ^{-1} со сдвигом в $\mathbf{SO(n, \Delta)}$ мы можем ввести рациональную параметризацию в окрестности любой матрицы $P \in \mathbf{SO(n, \Delta)}$ и, тем самым, задать структуру аналитического многообразия на $\mathbf{SO(n, \Delta)}$, согласованную с умножением в этой группе ([27], Лек. 1, с. 17), а значит, превратить $\mathbf{SO(n, \Delta)}$ в группу Ли.

1.4. $\mathbf{SO(n, \Delta)}$-орбиту локального корепера $\tau \in \mathcal{E}^r(X, \Im(X))$ будем обозначать через $\Re_\Delta(X)$. Следующее предложение служит основой для построения тензорного анализа над $\Re_\Delta(X)$.

Лемма 2. *Для всякого корепера $\tau = (\tau^i)_{i=1}^n \in \mathcal{E}^r(X, \Re_\Delta(X))$, $r \geq 1$, с областью определения U существует и притом единственная система 1-форм $\Phi^i_j \in \mathcal{E}^{r-1}(U, T^*(U))$, удовлетворяющая условиям*

$$d\tau^i = \tau^j \wedge \Phi^i_j, \quad \Delta^i \Phi^i_j + \Delta^j \Phi^j_i = 0, \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

Доказательство вытекает из теоремы 2.1.10 книги [28] (гл. 2, § 1, с. 67–68) заменой обозначений. Формы Φ^i_j, определяемые этой леммой, называются формами связности корепера τ. Коэффициенты Γ^i_{jk} в разложении $\Phi^i_j = \Gamma^i_{jk}\tau^k$, $i, j, k = 1, \ldots, n$, называются символами Кристоффеля. С их помощью по обычным формулам классического тензорного анализа строится ковариантное дифференцирование. Например, если $\xi = (\xi_i)_{i=1}^n$ — локальный репер, дуальный кореперу τ, $A = A_j^i \xi_i \otimes \tau^j$ — тензорное поле типа $(1,1)$, то ковариантной производной его называется тензорное поле $\nabla A = A_{j,k}^i \xi_i \otimes \tau^j \otimes \tau^k$ типа $(1,2)$, компоненты которого $A_{j,k}^i$ определяются равенством $A_{j,k}^i = A_{j|k}^i + \Gamma_{lk}^i A_j^l - \Gamma_{jk}^l A_l^i$, где $A_{j|k}^i$ определяются из разложения $dA_j^i = A_{j|k}^i \tau^k$, $i,j,k,l = 1,\dots,n$. $\square$

1.5. Через $\wedge^2 T^*(X)$ будем обозначать расслоение кососимметрических билинейных форм, через $S^2T^*(X)$ — расслоение симметрических билинейных форм. В расслоении $S^2T^*(X)$ определено подрасслоение $S^2_\Delta T^*(X)$ невырожденных билинейных форм с нормальным видом

$$ds^2 = \sum_{i=1}^n \Delta^i \tau^i \otimes \tau^i. \tag{1}$$

Сечения расслоения $S^2_\Delta T^*(X)$ называются метриками сигнатуры Δ. Поскольку метрика ds^2, определенная равенством (1), не зависит от выбора локального корепера τ из содержащей его орбиты, то всякая $\mathbf{SO(n,\Delta)}$-орбита определяет некоторую метрику сигнатуры Δ. Обратно, всякой метрике ds^2 можно сопоставить две $\mathbf{SO(n,\Delta)}$-орбиты, в кореперах из которых эта метрика имеет вид (1). Локальные кореперы одной из этих орбит связаны с локальными кореперами другой матрицами из $\mathbf{O(n,\Delta)}$ с определителями, равными -1. Будем считать, что на X зафиксирована ориентация, и через $\Re_\Delta(X)$ обозначать ту из этих двух орбит, локальные кореперы которой связаны с координатным корепером $(dx^i)_{i=1}^n$ в карте из ориентации матрицами с положительными определителями. О такой орбите $\Re_\Delta(X)$ будем говорить, что она порождена метрикой ds^2.

1.6. Плоским m-мерным пространством, $m > n$, мы называем m-мерное аффинное пространство Π, на векторном пространстве которого задана невырожденная симметрическая билинейная форма, называемая скалярным произведением векторов. Пусть $z : X \to \Pi$ — C^r-погружение, $r \geq 2$, Tz — касательное к z отображение, $F = z(X)$ — соответствующая поверхность в Π, TF — касательное расслоение поверхности F, $T^\perp F$ — нормальное расслоение. Через $I(z)$ будем обозначать метрику на X, индуцированную z. Если $\Re_\Delta(X)$ — $\mathbf{SO(n,\Delta)}$-орбита, порожденная метрикой $I(z)$, то для всякого локального корепера $\tau = (\tau^i)_{i=1}^n \in \mathcal{E}^{r-1}(X, \Re_\Delta(X))$ определен локальный репер $e = (e_i)_{i=1}^n \in \mathcal{E}^{r-1}(X, TF)$ по формулам $e_i = \xi_i(z)$, где $\xi = (\xi_i)_{i=1}^n$ — локальный репер на X, дуальный кореперу τ. Для векторов репера e имеем

$$e_i e_j = \Delta_{ij} = \begin{cases} \Delta^i & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j, \end{cases} \tag{2}$$

$i, j = 1, \dots, n$.

Будем предполагать, что в каждой точке $x \in X$ касательная плоскость T_xF поверхности F содержит n попарно ортогональных неизотропных направлений. В этом случае в окрестности каждой точки $x \in X$ определен локальный C^{r-1}-репер $\nu = (\nu_\sigma)_{\sigma=1}^p$, $p = m - n$, в нормальном расслоении $T^\perp F$, удовлетворяющий условиям

$$\nu_\sigma \nu_\tau = \begin{cases} \Delta^\sigma & \text{при } \tau = \sigma, \\ 0 & \text{при } \tau \neq \sigma, \end{cases} \tag{3}$$

$$e_i \nu_\sigma = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad \sigma = 1, \dots, p$$

([29], гл. 4, § 42, с. 175–179). Мы пишем для краткости Δ^σ вместо $\Delta^{n+\sigma}$. Поскольку всякий вектор из Π может быть представлен в виде линейной комбинации векторов e_i, ν_σ, $i = 1, \dots, n$, $\sigma = 1, \dots, p$, сигнатура скалярного произведения в Π имеет вид $\Delta = (e_1^2, \dots, e_n^2, \nu_1^2, \dots, \nu_p^2)$. Об аффинной системе координат $(O; a_1, \dots, a_m)$ в Π, базисные векторы которой удовлетворяют соотношениям

$$a_i a_j = e_i e_j, \quad a_i a_{n+\sigma} = 0, \quad a_{n+\sigma} a_{n+\tau} = \nu_\sigma \nu_\tau, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad \tau, \sigma = 1, \dots, p,$$

будем говорить, что она задает сигнатуру пространства Π.

Разложение дифференциалов de_i, $d\nu_\sigma$ по базису (e_i, ν_σ) приводит к формулам Гаусса и Вейнгартена

$$\begin{aligned} de_i &= \Phi_i^k e_k + \sum_{\sigma=1}^{p} \Delta^\sigma \omega_i^\sigma \nu_\sigma, \\ d\nu_\sigma &= -\sum_{i=1}^{n} \Delta^i \omega_i^\sigma e_i + \sum_{\tau=1}^{p} \Delta^\tau \varkappa_\sigma^\tau \nu_\tau, \\ i, k &= 1, \dots, n, \quad \tau, \sigma = 1, \dots, p, \quad p = m - n, \end{aligned} \tag{4}$$

где $\Delta^k = e_k^2$, $\Delta^\sigma = \nu_\sigma^2$, Φ_k^i — формы связности локального корепера $\tau \in \mathcal{E}^{r-1}(X, \Re_\Delta(X))$, ω_i^σ — 1-формы, называемые формами погружения, $\varkappa_\tau^\sigma = -\varkappa_\sigma^\tau$ — 1-формы, называемые формами кручения. Формы погружения удовлетворяют соотношению

$$\omega_i^\sigma \wedge \tau^i = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad \sigma = 1, \dots, p. \tag{5}$$

Симметрическую билинейную форму

$$II^\sigma = \omega_i^\sigma \otimes \tau^i = b_{ij}^\sigma \tau^i \otimes \tau^j \in \mathcal{E}^{r-2}(X, S^2 T^*(X))$$

называют второй основной формой погружения z (или поверхности F) относительно нормали ν_σ.

Если погружение $z \in C^3(X, \Pi)$, то внешнее дифференцирование формул Гаусса и Вейнгартена приводит к уравнениям Гаусса, Петерсона-Кодацци и Риччи

$$\begin{aligned} &\sum_{\sigma=1}^{p} \Delta^\sigma \omega_i^\sigma \wedge \omega_j^\sigma = \Delta^i (d\Phi_j^i + \Phi_k^i \wedge \Phi_j^k), \\ &d\omega_i^\sigma = \Phi_i^k \wedge \omega_k^\sigma + \sum_{\tau=1}^{p} \Delta^\tau \omega_i^\tau \wedge \varkappa_\tau^\sigma, \\ &d\varkappa_\sigma^\tau = \sum_{i=1}^{n} \Delta^i \omega_i^\tau \wedge \omega_i^\sigma + \sum_{\rho=1}^{p} \Delta^\rho \varkappa_\sigma^\rho \wedge \varkappa_\rho^\tau, \\ &i, j, k = 1, \dots, n, \quad \tau, \sigma = 1, \dots, p. \end{aligned} \tag{6}$$

1.7. Цель данного и следующего пунктов — получить уравнения Гаусса, Петерсона-Кодацци и Риччи для C^2-погружений, используя обобщенное внешнее дифференцирование по де Раму. В этом пункте мы приведем определение обобщенного внешнего дифференциала и некоторые его свойства.

Пусть U — открытое множество на X с компактным замыканием, содержащимся в некоторой координатной окрестности. Обозначим через $\wedge^l T^*(U)$ расслоение внешних дифференциальных форм степени $l \geq 0$ на U, $l = 0, 1, \dots$, через $\mathcal{E}_0^\infty(U, \wedge^l T^*(U))$ — пространство C^∞-сечений этого расслоения с компактными носителями, содержащимися в U. Потоком степени q на U называется всякий непрерывный линейный функционал $v : \mathcal{E}_0^\infty(U, \wedge^{n-q} T^*(U)) \to \mathbf{R}$ ([30], гл. 3, с. 65–130). Границей bv потока v называется поток степени $q+1$, определяемый формулой

$$bv[\varphi] = v[d\varphi] \ \forall \varphi \in \mathcal{E}_0^\infty(U, \wedge^{n-q-1} T^*(U)).$$

Каждая непрерывная q-форма $\omega \in \mathcal{E}^0(U, \wedge^q T^*(U))$ определяет поток $\bar{\omega}$ степени q на U формулой

$$\bar{\omega}[\varphi] = \int_U \omega \wedge \varphi \ \forall \varphi \in \mathcal{E}_0^\infty(U, \wedge^{n-q} T^*(U)).$$

Непрерывную форму $\Omega \in \mathcal{E}^0(X, \wedge^{q+1}T^*(X))$ будем называть обобщенным внешним дифференциалом непрерывной формы $\omega \in \mathcal{E}^0(X, \wedge^q T^*(X))$ на U, если $\overline{\Omega} = (-1)^{q+1} b\bar{\omega}$, т. е., если

$$\int_U \Omega \wedge \varphi = (-1)^{q+1} \int_U \omega \wedge d\varphi \ \forall \varphi \in \mathcal{E}_0^\infty(U, \wedge^{n-q-1}T^*(U)) \tag{7}$$

(ср. [31]–[33]). Обозначим через $\mathcal{E}_0^1(U, \wedge^l T^*(U))$ множество всех C^1-сечений расслоения $\wedge^l T^*(U)$ с компактными носителями, содержащимися в U. Так как пространство $\mathcal{E}_0^\infty(U, \wedge^l T^*(U))$ всюду плотно в $\mathcal{E}_0^1(U, \wedge^l T^*(U))$, то Ω является обобщенным внешним дифференциалом формы ω тогда и только тогда, когда равенство (7) имеет место для всякой формы $\varphi \in \mathcal{E}_0^1(U, \wedge^{n-q-1}T^*(U))$. Отсюда следует, что если $\omega \in \mathcal{E}^1(U, \wedge^q T^*(U))$, то обобщенный внешний дифференциал $d\omega$ совпадает с обычным внешним дифференциалом. Кроме того, $d\omega$ (если он существует) определяется формой ω однозначно, не зависит от системы координат на U, имеет локальный характер, и $dd\omega = 0$.

Следующие два предложения касаются свойств обобщенного внешнего дифференциала. Доказательства их приведены в [16].

Лемма 3. *Если форма $\omega \in \mathcal{E}^0(X, \wedge^q T^*(X))$ имеет обобщенный внешний дифференциал $d\omega$, то для всякой p-формы $\psi \in \mathcal{E}^1(X, \wedge^p T^*(X))$, $p, q \geq 0$, справедливо равенство $d(\omega \wedge \psi) = d\omega \wedge \psi + (-1)^q \omega \wedge d\psi$.*

Лемма 4. *Если многообразие X односвязно, то для всякой формы $\omega \in \mathcal{E}^0(X, T^*(X))$, для которой $d\omega = 0$, найдется функция $f \in C^1(X, \mathbf{R})$, такая, что $\omega = df$.*

1.8. В дальнейшем нам понадобится

Теорема 1. *Для всякого C^2-погружения $z : X \to \Pi$ формы связности Φ_j^i, погружения ω_i^σ и кручения $\varkappa_\tau^\sigma$, $i, j = 1, \ldots, n$, $\tau, \sigma = 1, \ldots, p$, обладают обобщенным внешним дифференциалом и удовлетворяют уравнениям Гаусса, Петерсона-Кодацци и Риччи (6), в которых d — знак обобщенного внешнего дифференциала.*

Доказательство. Пусть U — окрестность произвольной точки $x \in X$ с компактным замыканием, содержащимся в некоторой координатной окрестности. Если $z \in C^2(X, \Pi)$, то $de_i \in \mathcal{E}^0(U, T^*(U) \otimes \Pi)$, $i = 1, \ldots, n$. В силу леммы 3, учитывая, что $dde_i = 0$, для всякой формы $\varphi \in \mathcal{E}_0^\infty(U, \wedge^{n-2}T^*(U))$ имеем $d(de_i \wedge \varphi) = -de_i \wedge d\varphi$. Отсюда следует, что $\int_U de_i \wedge d\varphi = 0$. В силу формул Гаусса (4), это равенство влечет

$$\int_U \Big(\Phi_i^k e_k + \sum_{\sigma=1}^p \Delta^\sigma \omega_i^\sigma \nu_\sigma \Big) \wedge d\varphi = 0, \quad i, k = 1, \ldots, n.$$

Поскольку $\mathcal{E}_0^\infty(U, \wedge^{n-2}T^*(U))$ всюду плотно в $\mathcal{E}_0^1(U, \wedge^{n-2}T^*(U))$, последнее равенство справедливо и для всякой формы $\varphi \in \mathcal{E}_0^1(U, \wedge^{n-2}T^*(U))$. Внося e_k и ν_σ под знак d, пользуясь леммой 3, получаем

$$\int_U \Big[\Phi_i^k \wedge d(\varphi e_k) + \sum_{\sigma=1}^p \Delta^\sigma \omega_i^\sigma \wedge d(\varphi \nu_\sigma) - \Phi_i^k \wedge de_k \wedge \varphi - \sum_{\sigma=1}^p \Delta^\sigma \omega_i^\sigma \wedge d\nu_\sigma \wedge \varphi \Big] = 0.$$

В силу (4) отсюда находим

$$\int_U \Big[\Phi_i^k \wedge d(\varphi e_k) + \sum_{\tau=1}^p \Delta^\tau \omega_i^\tau \wedge d(\varphi \nu_\tau) - \Big(\Phi_i^k \wedge \Phi_k^j - \sum_{\sigma=1}^p \Delta^\sigma \omega_i^\sigma \wedge \omega_j^\sigma \Big) \wedge (e_j \varphi) -$$
$$- \sum_{\tau=1}^p \Delta^\tau \Big(\Phi_i^k \wedge \omega_k^\tau + \sum_{\sigma=1}^p \Delta^\sigma \omega_i^\sigma \wedge \varkappa_\sigma^\tau \Big) \wedge (\nu_\tau \varphi) \Big] = 0.$$

Пусть $e_i = e_i^\alpha a_\alpha$, $\nu_\sigma = \nu_\sigma^\alpha a_\alpha$, $\alpha = 1, \ldots, m$, $i = 1, \ldots, n$, $\sigma = 1, \ldots, p$, где $(O, a_\alpha)_{\alpha=1}^m$ — аффинная система координат в Π, задающая сигнатуру. Полагая в последнем интегральном равенстве $\varphi =$

$e_i^\alpha\psi$, $\psi\in\mathcal{E}_0^1(U,\wedge^{n-2}T^*(U))$, умножая его скалярно на a_α, после суммирования по $\alpha=1,\dots,m$ получим

$$\int_U \Phi_i^j\wedge d\psi=\int_U\left(\Phi_i^k\wedge\Phi_k^j-\sum_{\sigma=1}^p\Delta^i\Delta^\sigma\omega_i^\sigma\wedge\omega_j^\sigma\right)\wedge\psi. \tag{8}$$

Если же положить $\varphi=\nu_\sigma^\alpha\psi$, то таким же образом получим

$$\int_U \Delta^\tau\omega_i^\tau\wedge d\psi=\int_U\left(\Delta^\tau\Phi_i^k\wedge\omega_k^\tau+\sum_{\sigma=1}^p\Delta^\sigma\omega_i^\sigma\wedge\varkappa_\sigma^\tau\right)\wedge\psi. \tag{9}$$

Поскольку равенства (8) и (9) справедливы для всякой формы $\psi\in\mathcal{E}_0^1(U,\wedge^{n-2}T^*(U))$, в силу определения обобщенного внешнего дифференциала, получаем, что формы Φ_j^i и ω_i^σ, $i,j=1,\dots,n$, $\sigma=1,\dots,p$, обладают обобщенными внешними дифференциалами, совпадающими с правыми частями соответствующих уравнений (6) в каждой точке $x\in X$.

Рассмотрим тождество $d(d\nu_\sigma\wedge\varphi)=-d\nu_\sigma\wedge d\varphi$, $\sigma=1,\dots,p$. Из него следует, что $\int\limits_U d\nu_\sigma\wedge d\varphi=0$. В силу (4), получаем

$$\int_U\left[-\sum_{i=1}^n\Delta^i\omega_i^\sigma e_i+\sum_{\tau=1}^p\Delta^\tau\varkappa_\sigma^\tau\nu_\tau\right]\wedge d\varphi=0,\quad \tau,\sigma=1,\dots,p,\quad i=1,\dots,n.$$

Пользуясь леммой 3, находим

$$\int_U\Bigg[-\sum_{i=1}^n\Delta^i\omega_i^\sigma\wedge d(\varphi e_i)+\sum_{\tau=1}^p\Delta^\tau\varkappa_\sigma^\tau\wedge d(\varphi\nu_\tau)+$$
$$+\left(\sum_{i=1}^n\Delta^i\omega_i^\sigma\wedge de_i-\sum_{\tau=1}^p\Delta^\tau\varkappa_\sigma^\tau\wedge d\nu_\tau\right)\wedge\varphi\Bigg]=0.$$

В силу (4) отсюда имеем

$$\int_U\Bigg[-\sum_{i=1}^n\Delta^i\omega_i^\sigma\wedge d(\varphi e_i)+\sum_{\tau=1}^p\Delta^\tau\varkappa_\sigma^\tau\wedge d(\varphi\nu_\tau)+$$
$$+\sum_{i=1}^n\Delta^i\omega_i^\sigma\wedge\left(\Phi_i^k e_k+\sum_{\rho=1}^p\Delta^\rho\omega_i^\rho\nu_\rho\right)\wedge\varphi-$$
$$-\sum_{\tau=1}^p\Delta^\tau\varkappa_\sigma^\tau\wedge\left(-\sum_{i=1}^n\Delta^i\omega_i^\tau e_i+\sum_{\rho=1}^p\Delta^\rho\varkappa_\tau^\rho\nu_\rho\right)\wedge\varphi\Bigg]=0.$$

Полагая $\varphi=\nu_\rho^\alpha\psi$, умножая на a_α, после суммирования по $\alpha=1,\dots,m$ получаем

$$\int_U\Delta^\rho\varkappa_\sigma^\rho\wedge d\psi=-\int_U\left(\sum_{i=1}^n\Delta^\rho\Delta^i\omega_i^\sigma\wedge\omega_i^\rho-\sum_{\tau=1}^p\Delta^\rho\Delta^\tau\varkappa_\sigma^\tau\wedge\varkappa_\tau^\rho\right)\wedge\psi.$$

Отсюда и из определения обобщенного внешнего дифференциала, в силу произвольности $\psi\in\mathcal{E}_0^1(U,\wedge^{n-2}T^*(U))$ следует, что формы $\varkappa_\sigma^\rho$, $\rho,\sigma=1,\dots,p$, обладают обобщенным внешним дифференциалом в точке $x\in X$, и этот дифференциал совпадает с правой частью соответствующего равенства из (6). $\square$

2. Поля вращений

2.1. Пусть $V(X)$ — векторное расслоение, $f \in \mathcal{E}^r(X, V(X))$, $r \geq 0$. Непрерывной деформацией сечения f будем называть всякое непрерывное отображение $F : X \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to V(X)$, $\varepsilon > 0$, удовлетворяющее условиям

а) $F(x, 0) = f(x)$ *для всякой точки* $x \in X$;

б) *для всякого* $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ *отображение* $f_t : X \to V(X)$, *определенное равенством* $f_t(x) = F(x, t)$, *является сечением из* $\mathcal{E}^r(X, V(X))$.

Будем говорить, что деформация F принадлежит классу C^s, $s \geq 1$, если

в) *для всякой точки* $x \in X$ *отображение* $F_x : (-\varepsilon, \varepsilon) \to V(X)$, *определенное равенством* $F_x(t) = F(x, t)$, *принадлежит классу* C^s;

г) *дифференцирование функции* $F(x, t)$ *по* $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ *до порядка* s *включительно перестановочно с дифференцированием по локальным координатам точки* x *до порядка* r *включительно.*

Говорят, что деформация F принадлежит классу C^∞, если она принадлежит классу C^s для всех $s = 1, 2, \ldots$ Деформация F называется аналитической, если она принадлежит классу C^∞ и в каждой точке $x \in X$ может быть представлена степенным рядом

$$F(x, t) = f(x) + 2\sum_{s=1}^{\infty} \delta^s f(x) t^s, \tag{10}$$

сходящимся на $(-\varepsilon, \varepsilon)$, коэффициенты которого $\delta^s f \in \mathcal{E}^r(X, V^{(s)}(X))$.

Пусть $P(X)$ — C^r-подрасслоение векторного расслоения $V(X)$, $f \in \mathcal{E}^r(X, P(X))$. Деформацией класса C^s, $1 \leq s \leq \infty$, сечения f будем называть всякое непрерывное отображение $F : X \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to P(X)$, $\varepsilon > 0$, удовлетворяющее условиям а) и б) и являющееся деформацией f класса C^s как сечения из $\mathcal{E}^r(X, V(X))$. Деформацию сечения $f \in \mathcal{E}^r(X, P(X))$ будем называть аналитической, если она является деформацией класса C^∞ и в каждой точке может быть представлена сходящимся на $(-\varepsilon, \varepsilon)$ рядом (10), в котором $\delta^s f \in \mathcal{E}^r(X, P^{(s)}(X))$. Каноническое вложение $P_x(X) \subset V_x(X)$ позволяет в каждой точке $x \in X$ значение $\delta^{(s)} f(x)$, $s = 1, 2, \ldots$, рассматривать как вектор из $V_x(X)$.

Использование s-производного расслоения в определении аналитической деформации обусловлено тем, что для фиксированной точки $x \in X$ аналитическая деформация F задает аналитический путь $F_x : (-\varepsilon, \varepsilon) \to P_x(X) \subset V_x(X)$. При этом

$$\delta^s f(x) = \left.\frac{d^s F_x(t)}{2s!dt^s}\right|_{t=0}, s = 1, 2, \ldots \tag{11}$$

Для заданной деформации F класса C^s сечение $\delta^s f \in \mathcal{E}^r(X, P^{(s)}(X))$, определяемое формулой (11), называется s-й вариацией сечения f. Полагаем $\delta^0 f = f$, $\delta^1 f = \delta f$.

Класс деформаций, определяющих одни и те же вариации $\delta^1 f, \ldots, \delta^l f$, называется б. м. деформацией l-го порядка сечения f (ср. [34]). Б. м. деформация l-го порядка однозначно определяется заданием какой-либо деформации класса C^l с заданными вариациями $\delta^1 f, \ldots, \delta^l f$. Всякая такая деформация может быть записана в виде $F(x, t) = f(x) + 2\sum\limits_{s=1}^{l} \delta^s f(x) t^s + o(l)$, где $o(l) \in \mathcal{E}^r(X, V(X))$, $\dfrac{o(l)}{t} \to 0$ при $t \to 0$. Тем самым б. м. деформацию l-го порядка можно рассматривать как l-струю [35] аналитической деформации. Оператор $\delta^s : \mathcal{E}^r(X, P(X)) \to \mathcal{E}^r(X, P^{(s)}(X))$, определяемый формулой (11), называется оператором варьирования s-го порядка.

2.2. Рассмотрим б. м. деформацию $\{z^t\}_{t \in (-\varepsilon, \varepsilon)}$ l-го порядка погружения $z : X \to \Pi$, $l = 1, \ldots, \infty$. При $l = \infty$ деформацию считаем аналитической. Рассматривая z как сечение из

$\mathcal{E}^r(X, X\times\Pi)$, $r\geq 1$, мы можем пользоваться терминологией предыдущего пункта. Деформация $\{z^t\}_{t\in(-\varepsilon,\varepsilon)}$ порождает деформацию $\{I(z^t)\}_{t\in(-\varepsilon,\varepsilon)}$ метрики $I(z)$, а значит, и деформацию $\tau_t = (\tau_t^i)_{i=1}^n$, $t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$, локального корепера $\tau\in\mathcal{E}^{r-1}(X, \Re_\Delta(X))$, где $\tau_t\in\mathcal{E}^{r-1}(X,\Re^t_\Delta(X))$, $\Re^t_\Delta(X)$ — $\mathbf{SO(n,\Delta)}$-орбита метрики $I(z^t)$. При этом деформация $\{\tau_t\}_{t\in(-\varepsilon,\varepsilon)}$ определяется с точностью до наложения деформации корепера τ по орбите $\Re_\Delta(X)$, т. е. деформации вида $\tau^i_t = q^i_j(t)\tau^j$, где матрица $(q^i_j(t))^n_{i,j=1}\in C^{r-1}(X,\mathbf{SO(n,\Delta)})$. Отсюда следует, что деформация локального репера $e=(e_j)^n_{j=1}$ из касательного расслоения TF определяется деформацией погружения z с точностью до наложения деформации вида $e^t_j = p^i_j(t)e_i$, где $(p^i_j(t))^n_{i,j=1}\in C^{r-1}(X,\mathbf{SO(n,\Delta)})$. Из (3) следует, что деформация локального репера $\nu=(\nu_\sigma)^p_{\sigma=1}$ нормального расслоения $T^\perp F$ определяется с точностью до наложения деформации вида $\nu^t_\sigma = q^\tau_\sigma(t)\nu_\tau$, где $(q^\tau_\sigma(t))^p_{\tau,\sigma=1}\in C^{r-1}(X,\mathbf{SO(p,\Delta)})$.

Будем считать, что при заданной деформации $\{z^t\}_{t\in(-\varepsilon,\varepsilon)}$ деформации реперов e и ν зафиксированы, и называть их порожденными деформацией $\{z^t\}_{t\in(-\varepsilon,\varepsilon)}$.

Теорема 2. *Для заданной б. м. деформации l-го порядка $z^t: X\to\Pi$, $t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$, $\varepsilon>0$, $l=1,\dots,\infty$, погружения $z\in C^r(X,\Pi)$, $r\geq 1$, и порожденных ею деформаций локальных реперов $e=(e_i)^n_{i=1}$, $\nu=(\nu_\sigma)^p_{\sigma=1}$ существует и притом единственная система бивекторов $(V^s)^l_{s=1}$, $V^s\in C^{r-1}(X,\wedge^2\Pi)$, такая, что*

$$\delta^s e_i = \sum_{\alpha=1}^{s} V^\alpha\delta^{s-\alpha}e_i,\quad \delta^s\nu_\sigma = \sum_{\alpha=1}^{s} V^\alpha\delta^{s-\alpha}\nu_\sigma,\quad s=1,\dots,l,\ i=1,\dots,n,\sigma=1,\dots,p, \tag{12}$$

где под знаками суммы — внутреннее произведение бивектора на вектор ([36], ч. 1, § 2, с. 15).

В доказательстве этой теоремы мы используем следующее элементарное предложение линейной алгебры, доказательство которого опускаем.

Лемма 5. *Если для систем векторов $b_\alpha = b^\lambda_\alpha a_\lambda$ и $c_\beta = c^\mu_\beta a_\mu$, $\alpha,\beta,\lambda,\mu = 1,\dots,m$ в Π выполнены условия $c_\alpha c_\beta = b_\alpha b_\beta$, $\det(b^\lambda_\alpha)\det(c^\mu_\beta)>0$, то существует и притом единственная матрица $P=(p^\alpha_\beta)^m_{\alpha,\beta=1}\in\mathbf{SO(m,\Delta)}$, такая, что $c_\beta = p^\alpha_\beta b_\alpha$.*

Докажем теорему 2. Для векторов реперов $e^t=(e^t_i)^n_{i=1}$ и $\nu^t=(\nu^t_\sigma)^p_{\sigma=1}$, порожденных деформацией $z^t: X\to\Pi$, в каждой точке $x\in X$ и при каждом $t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$ имеем

$$e^t_ie^t_j=\Delta_{ij},\ e^t_i\nu^t_\sigma=0,\ \nu^t_\sigma\nu^t_\tau=\Delta_{\sigma\tau},\ i,j=1,\dots,n,\ \sigma,\tau=1,\dots,p.$$

Отсюда и из (2) и (3), в силу леммы 5, следует существование матрицы $P(t)=(p^\alpha_\beta(t))^m_{\alpha,\beta=1}\in\mathbf{SO(m,\Delta)}$, для которой

$$e^t_i = P(t)e_i,\ \nu^t_\sigma = P(t)\nu_\sigma,\ i=1,\dots,n,\sigma=1,\dots,p,\ t\in(-\varepsilon,\varepsilon), \tag{13}$$

где в правых частях — произведения матриц, и отображение $P:(-\varepsilon,\varepsilon)\to\mathbf{SO(m,\Delta)}$ является аналитическим путем в $\mathbf{SO(m,\Delta)}$ с $P(0)=1$ в каждой точке $x\in X$. По лемме 1 можем положить $P(t)=\theta(v(t))$, где $v:(-\varepsilon,\varepsilon)\to\wedge(m)$ — аналитический путь в пространстве $\wedge(m)$ кососимметрических $m\times m$-матриц с $v(0)=0$. Отсюда для вариации δ^sP в силу (11) находим

$$\begin{gathered}\delta^sP = \frac{v^{(s)}(0)}{s!}\Delta + \sum_{\alpha=1}^{s-1}\frac{v^{(\alpha)}(0)}{\alpha!}\delta^{s-\alpha}P,\\ \delta P = v^{(1)}(0)\Delta,\quad s=2,\dots,l.\end{gathered} \tag{14}$$

Пусть $v^{(s)}(0)=(v^{\lambda\mu}_s)^m_{\lambda,\mu=1}$, $e_i=e^\lambda_i a_\lambda$, $\nu_\sigma=\nu^\lambda_\sigma a_\lambda$, $\lambda=1,\dots,m$, $i=1,\dots,n$, $\sigma=1,\dots,p$. Из (13) и (14) находим

$$\delta^s e_i^\mu = \frac{v_s^{\lambda\mu}}{s!}\Delta_{\lambda\rho}e_i^\rho + \sum_{\alpha=1}^{s-1}\frac{v_\alpha^{\lambda\mu}}{\alpha!}\Delta_{\lambda\rho}\delta^{s-\alpha}e_i^\rho,$$
$$\delta^s \nu_\sigma^\mu = \frac{v_s^{\lambda\mu}}{s!}\Delta_{\lambda\rho}\nu_\sigma^\rho + \sum_{\alpha=1}^{s-1}\frac{v_\alpha^{\lambda\mu}}{\alpha!}\Delta_{\lambda\rho}\delta^{s-\alpha}\nu_\sigma^\rho, \quad s=2,\dots,l, \tag{15}$$
$$\delta e_i^\mu = v_1^{\lambda\mu}\Delta_{\lambda\rho}e_i^\rho, \quad \delta\nu_\sigma^\mu = v_1^{\lambda\mu}\Delta_{\lambda\mu}\nu_\sigma^\rho,$$

$$i=1,\dots,n,\ \sigma=1,\dots,p,\ \lambda,\mu,\rho,=1,\dots,m.$$

Рассмотрим в $\wedge^2\Pi$ систему бивекторов

$$V^s = \frac{1}{2s!}v_s^{\lambda\mu}[a_\lambda, a_\mu],\ s=1,\dots,l,\ \lambda,\mu=1,\dots,m,$$

где $[*,*]$ — внешнее умножение векторов в Π. С использованием бивекторов V^s равенства (15) запишутся в виде (12). Тем самым доказано существование системы $(V^s)_{s=1}^l$.

Докажем единственность. Допустим, что существует еще одна система полей $(\widetilde{V}^s)_{s=1}^l$, удовлетворяющая условиям (12). Для разности $\widetilde{V}^1 - V^1$ имеем

$$(\widetilde{V}^1 - V^1)e_i = 0, \quad (\tilde{V}^1 - V^1)\nu_\sigma = 0, \quad i=1,\dots,n, \quad \sigma=1,\dots,p.$$

Так как (e_i,ν_σ) — базис в Π, то получаем $\widetilde{V}^1 = V^1$. Если теперь по индукции допустить, что $\widetilde{V}^1 = V^1,\dots,\widetilde{V}^{s-1} = V^{s-1}$, то для разности $\widetilde{V}^s - V^s$ из (12) снова получим $(\widetilde{V}^s - V^s)e_i = 0$, $(\widetilde{V}^s - V^s)\nu_\sigma = 0$, и, значит, $\widetilde{V}^s = V^s$ для всех $s=1,\dots,l$.

Равенства (12) в каждой точке $x\in X$ и при каждом $s=1,\dots,l$ являются линейными относительно компонентов поля V^s. Следовательно, эти компоненты являются рациональными функциями от компонентов векторов e_i,ν_σ и бивекторов $V^1,\dots,V^{s-1}$, причем компоненты V^1 зависят только от компонентов e_i и ν_σ. Так как поля $e_i,\nu_\sigma\in C^{r-1}(X,\Pi)$, то отсюда следует, что $V^s\in C^{r-1}(X,\wedge^2\Pi)$, $s=1,\dots,l$. $\Box$

Систему полей $(V^s)_{s=1}^l$, определяемую теоремой 2, будем называть системой полей вращений, а ее элемент V^s — полем вращений порядка s при б. м. деформации l-го порядка (аналитической деформации, если $l=\infty$) погружения $z: X\to\Pi$.

2.3. Тот факт, что введенная система полей вращений для общей б.м. деформации l-го порядка обобщает известную систему полей вращений для б.м. изгибания l-го порядка, иллюстрируется следующей теоремой.

Теорема 3. *Для системы полей вращений $(V^s)_{s=1}^l$ б. м. деформации $z^t: X\to\Pi$, $t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$, $\varepsilon>0$, C^r-погружения $z: X\to\Pi$, $r\ge 2$, справедливы равенства*

$$d\delta^s z = \sum_{\alpha=1}^{s}V^\alpha d\delta^{s-\alpha}z + \sum_{\alpha=1}^{s-1}V^\alpha\delta^{s-\alpha}\tau^i e_i + \delta^s\tau^i e_i, \quad i=1,\dots,n,\ s=1,\dots,l,\ l=1,\dots,\infty \tag{16}$$

(при $s=1$ вторая сумма исчезает).

Доказательство. Имеем

$$d\delta^s z = \delta^s(\tau^i e_i) = \sum_{\alpha=1}^{s}(\delta^\alpha\tau^i\delta^{s-\alpha}e_i + \delta^{s-\alpha}\tau^i\delta^\alpha e_i) =$$
$$= \delta^s\tau^i e_i + \tau^i\delta^s e_i + 2\sum_{\alpha=1}^{s-1}\delta^\alpha\tau^i\delta^{s-\alpha}e_i.$$

Последнюю сумму обозначим через M. По теореме 2 она преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned}M &= 2\sum_{\alpha=1}^{s-1}\delta^\alpha\tau^i\sum_{\beta=1}^{s-\alpha}V^\beta\delta^{s-\alpha-\beta}e_i = 2\sum_{\alpha=1}^{s-1}V^\alpha\sum_{\beta=1}^{s-\alpha}\delta^\beta\tau^i\delta^{s-\alpha-\beta}e_i = \\ &= \sum_{\alpha=1}^{s-1}V^\alpha\left[\sum_{\beta=1}^{s-\alpha}(\delta^\beta\tau^i\delta^{s-\alpha-\beta}e_i + \delta^{s-\alpha-\beta}\tau^i\delta^\beta e_i) + \delta^{s-\alpha}\tau^i e_i - \tau^i\delta^{s-\alpha}e_i\right] = \\ &= \sum_{\alpha=1}^{s-1}V^\alpha d\delta^{s-\alpha}z - \tau^i\sum_{\alpha=1}^{s-1}V^\alpha\delta^{s-\alpha}e_i + \sum_{\alpha=1}^{s-1}V^\alpha\delta^{s-\alpha}\tau^i e_i = \\ &= \sum_{\alpha=1}^{s}V^\alpha d\delta^{s-\alpha}z + \tau^i\delta^s e_i + \sum_{\alpha=1}^{s-1}V^\alpha\delta^{s-\alpha}\tau^i e_i.\end{aligned}$$

Отсюда вытекает требуемое равенство. □

В случае б. м. изгибания l-го порядка можем считать, что $\delta^s\tau^i = 0$, $i = 1,\dots,n$, $s = 1,\dots,l$, и равенство (16) превращается в известное равенство, определяющее поля вращений б. м. изгибания [13].

2.4. В этом пункте мы покажем, что дифференциал поля вращений s-го порядка выражается через s-е вариации форм связности, погружения и кручения, а также через поля вращений и вариации указанных форм порядков, меньших s.

Лемма 6. *Для дифференциалов полей вращений при б. м. деформации l-го порядка, $l = 1,\dots,\infty$, погружения $z \in C^2(X,\Pi)$ имеют место разложения*

$$dV = -\frac{1}{2}\Delta^j\delta\Phi^i_j[e_i,e_j] + \Delta^i\Delta^\sigma\delta\omega^\sigma_i[e_i,\nu_\sigma] - \frac{1}{2}\Delta^\tau\Delta^\sigma\delta\varkappa^\tau_\sigma[\nu_\tau,\nu_\sigma], \tag{17}$$

$$dV^s = \frac{1}{2}A^{ij}_s[e_i,e_j] + B^{i\sigma}_s[e_i,\nu_\sigma] + \frac{1}{2}C^{\tau\sigma}_s[\nu_\tau,\nu_\sigma], s \geq 2, \tag{18}$$

где $V \equiv V^1$, по индексам $i,j = 1,\dots,n$, $\tau,\sigma = 1,\dots,p$ проводится суммирование, и

$$\begin{aligned}A^{ij}_s &= -A^{ji}_s = \\ &= \frac{1}{2}\Delta^i\Delta^j\sum_{\alpha=1}^{s-1}\{V^\alpha([\delta^{s-\alpha}\Phi^k_i e_k + \Delta^\sigma\delta^{s-\alpha}\omega^\sigma_i\nu_\sigma, e_j] + \\ &+ [e_i, \delta^{s-\alpha}\Phi^k_j e_k + \Delta^\sigma\delta^{s-\alpha}\omega^\sigma_j\nu_\sigma]) - \\ &- dV^\alpha([\delta^{s-\alpha}e_i,e_j] + [e_i,\delta^{s-\alpha}e_j])\} + \Delta^i\delta^s\Phi^j_i, \\ B^{i\sigma}_s &= \Delta^i\Delta^\sigma\sum_{\alpha=1}^{s-1}\{V^\alpha[\delta^{s-\alpha}\Phi^k_i e_k + \Delta^\tau\delta^{s-\alpha}\omega^\tau_i\nu_\tau,\nu_\sigma] - \\ &- dV^\alpha[\delta^{s-\alpha}e_i,\nu_\sigma]\} + \Delta^i\Delta^\sigma\delta^s\omega^\sigma_i, \\ C^{\tau\sigma}_s &= -C^{\sigma\tau}_s = \\ &= \frac{1}{2}\Delta^\sigma\Delta^\tau\sum_{\alpha=1}^{s-1}\{V^\alpha([-\Delta^i\delta^{s-\alpha}\omega^\tau_i e_i + \Delta^\rho\delta^{s-\alpha}\varkappa^\rho_\tau\nu_\rho,\nu_\sigma] + \\ &+ [\nu_\tau, -\Delta^i\delta^{s-\alpha}\omega^\sigma_i e_i + \Delta^\rho\delta^{s-\alpha}\varkappa^\rho_\sigma\nu_\rho]) - \\ &- dV^\alpha([\delta^{s-\alpha}\nu_\tau,\nu_\sigma] + [\nu_\tau,\delta^{s-\alpha}\nu_\sigma])\} + \Delta^\sigma\Delta^\tau\delta^s\varkappa^\sigma_\tau, \\ &k = 1,\dots,n,\ \rho = 1,\dots,p,\ s = 1,\dots,l.\end{aligned} \tag{19}$$

Доказательство. Поскольку в каждой точке $x \in X$ бивекторы $[e_i, e_j]$, $[e_i, \nu_\sigma]$, $[\nu_\tau, \nu_\sigma]$, при $i < j$, $\tau < \sigma$, $i, j = 1, \dots, n$, $\tau, \sigma = 1, \dots, p$, образуют базис пространства $\wedge^2 \Pi$, разложение (18) имеет место, и можем считать, что $\overset{s}{A}{}^{ij} = -\overset{s}{A}{}^{ji}$, $\overset{s}{C}{}^{\tau\sigma} = -\overset{s}{C}{}^{\sigma\tau}$. Остается показать, что коэффициенты этого разложения имеют вид (19). Из (18) находим

$$\begin{gathered} \overset{s}{A}{}^{ij} = \Delta^i \Delta^j dV^s [e_i, e_j], \quad \overset{s}{B}{}^{i\sigma} = \Delta^i \Delta^\sigma dV^s [e_i, \nu_\sigma], \\ \overset{s}{C}{}^{\tau\sigma} = \Delta^\tau \Delta^\sigma dV^s [\nu_\tau, \nu_\sigma], \\ i, j = 1, \dots, n, \ \tau, \sigma = 1, \dots, p, \ s = 1, \dots, l. \end{gathered} \tag{20}$$

Дифференцируя первое из равенств (12), будем иметь

$$d\delta^s e_i = \sum_{\alpha=1}^{s} dV^\alpha \delta^{s-\alpha} e_i + \sum_{\alpha=1}^{s} V^\alpha d\delta^{s-\alpha} e_i. \tag{21}$$

Преобразуем вторую сумму справа, обозначив ее через L. Используя s раз варьированные формулы Гаусса (4), имеем

$$\begin{aligned} L = &\sum_{\alpha=1}^{s} V^\alpha \sum_{\beta=1}^{s-\alpha} [\delta^\beta \Phi_i^k \delta^{s-\alpha-\beta} e_k + \delta^{s-\alpha-\beta} \Phi_i^k \delta^\beta e_k + \\ &+ \Delta^\sigma (\delta^\beta \omega_i^\sigma \delta^{s-\alpha-\beta} \nu_\sigma + \delta^{s-\alpha-\beta} \omega_i^\sigma \delta^\beta \nu_\sigma)] = \\ &= \sum_{\alpha=1}^{s-1} \delta^\alpha \Phi_i^k \sum_{\beta=1}^{s-\alpha} V^\beta \delta^{s-\alpha-\beta} e_k + \\ &+ \sum_{\alpha=2}^{s} \delta^{s-\alpha} \Phi_i^k \sum_{\beta=1}^{\alpha} V^\beta \delta^{\alpha-\beta} e_k - \sum_{\alpha=2}^{s} \delta^{s-\alpha} \Phi_i^k V^\alpha e_k + \\ &+ \Delta^\sigma \left(\sum_{\alpha=1}^{s-1} \delta^\alpha \omega_i^\sigma \sum_{\beta=1}^{s-\alpha} V^\beta \delta^{s-\alpha-\beta} \nu_\sigma + \sum_{\alpha=2}^{s} \delta^{s-\alpha} \omega_i^\sigma \sum_{\beta=1}^{\alpha} V^\beta \delta^{\alpha-\beta} \nu_\sigma - \sum_{\alpha=2}^{s} \delta^{s-\alpha} \omega_i^\sigma V^\alpha \nu_\sigma \right). \end{aligned}$$

По теореме 2 получаем

$$\begin{aligned} L = &\sum_{\alpha=1}^{s} (\delta^\alpha \Phi_i^k \delta^{s-\alpha} e_k + \delta^{s-\alpha} \Phi_i^k \delta^\alpha e_k) - \delta^s \Phi_i^k e_k - \delta^{s-1} \Phi_i^k \delta^1 e_k - \\ &- \sum_{\alpha=2}^{s} \delta^{s-\alpha} \Phi_i^k V^\alpha e_k + \Delta^\sigma \Bigg[\sum_{\alpha=1}^{s} (\delta^\alpha \omega_i^\sigma \delta^{s-\alpha} \nu_\sigma + \delta^{s-\alpha} \omega_i^\sigma \delta^\alpha \nu_\sigma) - \\ &- \delta^s \omega_i^\sigma \nu_\sigma - \delta^{s-1} \omega_i^\sigma \delta^1 \nu_\sigma - \sum_{\alpha=1}^{s} \delta^{s-\alpha} \omega_i^\sigma V^\alpha \nu_\sigma \Bigg]. \end{aligned}$$

Вновь применяя s раз варьированные формулы Гаусса, находим

$$L = \delta^s de_i - \sum_{\alpha=1}^{s-1} (\delta^\alpha \Phi_i^k V^{s-\alpha} e_k + \Delta^\sigma \delta^\alpha \omega_i^\sigma V^{s-\alpha} \nu_\sigma) - (\delta^s \Phi_i^k e_k + \Delta^\sigma \delta^s \omega_i^\sigma \nu_\sigma).$$

Подставляя в (21), приходим к тождеству

$$\sum_{\alpha=1}^{s} dV^\alpha \delta^{s-\alpha} e_i = \sum_{\alpha=1}^{s-1} (\delta^\alpha \Phi_i^k V^{s-\alpha} e_k + \Delta^\sigma \delta^\alpha \omega_i^\sigma V^{s-\alpha} \nu_\sigma) + \delta^s \Phi_i^k e_k + \Delta^\sigma \delta^s \omega_i^\sigma \nu_\sigma, \tag{22}$$

где $i,k=1,\dots,n$, $\sigma=1,\dots,p$, $s=1,\dots,l$. При $s=1$ первая сумма справа исчезает. Отсюда имеем

$$\begin{gathered}dV^s e_i=\sum_{\alpha=1}^{s-1}[V^\alpha(\delta^{s-\alpha}\Phi_i^k e_k+\Delta^\tau\delta^{s-\alpha}\omega_i^\tau\nu_\tau)-dV^\alpha\delta^{s-\alpha}e_i]+\\ +\delta^s\Phi_i^k e_k+\Delta^\tau\delta^s\omega_i^\tau\nu_\tau,\ i,k=1,\dots,n,\ \tau=1,\dots,p.\end{gathered}\tag{23}$$

Дифференцируя второе из равенств (12), будем иметь

$$d\delta^s\nu_\sigma=\sum_{\alpha=1}^{s}dV^\alpha\delta^{s-\alpha}\nu_\sigma+\sum_{\alpha=1}^{s}V^\alpha d\delta^{s-\alpha}\nu_\sigma.$$

По аналогии с преобразованиями суммы L, используя варьированные формулы Вейнгартена, для второй суммы справа находим

$$\sum_{\alpha=1}^{s}V^\alpha d\delta^{s-\alpha}\nu_\sigma=d\delta^s\nu_\sigma+\sum_{\alpha=1}^{s}\Delta^i\delta^{s-\alpha}\omega_i^\sigma V^\alpha e_i-\sum_{\alpha=1}^{s}\Delta^\tau\delta^{s-\alpha}\varkappa_\sigma^\tau V^\alpha\nu_\tau,$$

где $i=1,\dots,n$, $\tau,\sigma=1,\dots,p$, $s=1,\dots,l$. Отсюда и из (23) получаем

$$\begin{gathered}dV^s\nu_\tau=\sum_{\alpha=1}^{s-1}[V^\alpha(-\Delta^i\delta^{s-\alpha}\omega_i^\tau e_i+\Delta^\rho\delta^{s-\alpha}\varkappa_\tau^\rho\nu_\rho)-dV^\alpha\delta^{s-\alpha}\nu_\tau]-\\ -\Delta^i\delta^s\omega_i^\tau e_i+\Delta^\rho\delta^s\varkappa_\tau^\rho\nu_\rho,\ i,k=1,\dots,n,\ \tau,\rho=1,\dots,p.\end{gathered}\tag{24}$$

Умножая (23) скалярно на e_i, ν_σ, учитывая (20), получим выражения (19) для коэффициентов $\underset{s}{A}^{ij}$ и $\underset{s}{B}^{i\sigma}$. Умножая (24) скалярно на ν_σ, получим требуемое выражение для коэффициентов $\underset{s}{C}^{\tau\sigma}$. Равенство (17) получится, если в этих рассуждениях положить $s=1$. □

Литература

1. Ефимов Н.В. *Качественные вопросы теории деформаций поверхностей* // УМН. – 1948. – Т. 3. – № 2. – С. 47–158.
2. Сабитов И.Х. *Локальная теория изгибаний поверхностей* // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Современ. пробл. матем. – 1989. – Т. 48. – С. 196–270.
3. Иванова-Каратопраклиева И., Сабитов И.Х. *Изгибание поверхностей.* I // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Пробл. геометрии. – 1991. – Т. 23. – С. 131–184.
4. Иванова-Каратопраклиева И., Сабитов И.Х. *Изгибание поверхностей.* II // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Современ. матем. и ее прилож. – 1995. – Т. 8. – С. 108–167.
5. Cartan E. *Sur les déformations des hypersurfaces dans l'espace conforme de dimension* ≥ 5 // Bull. Soc. math. France. – 1917. V. 45. – P. 57–121.
6. Do Carmo M, Dajczer M. *Conformal Rigidity* // Amer. J. Math. – 1987. – V. 109. – P. 963–985.
7. Фоменко В.Т., Бикчантаев И.А. *Применение обобщенных аналитических функций на римановых поверхностях к исследованию G-деформаций двумерных поверхностей в E^4* // Матем. сб. – 1988. – Т. 136. – № 4. – С. 561–573.
8. Бескоровайная Л.Л. *О бесконечно малых ареальных деформациях овальных поверхностей* // Изв. вузов. Математика. – 1983. – № 5. – С. 69–71.
9. Yano K. *Sur la théorie des déformations infinitésimales* // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Ser. I – 1949. – № 6. – P. 1–75.
10. Chen B.Y., Yano K. *On the theory of normal variations* // J. Different. Geom. – 1978. – V. 13. – № 1. – P. 1–10.
11. Darboux G. *Leçons sur la théorie des surfaces et les applications géometriques du calcul infinitésimal.* 4 partie. – Paris.: Gauthier-Villars, Imprimeur-éditeur, 1946. – 554 p.
12. Марков П.Е. *Бесконечно малые изгибания одного класса многомерных поверхностей с краем* // Матем. сб. – 1983. – Т. 121. – № 1. – С. 48–59.

13. Марков П.Е. *Бесконечно малые изгибания высших порядков многомерных поверхностей в пространствах постоянной кривизны* // Матем. сб. 1987. – Т. 133. – № 1. – С. 64–85.
14. Векуа И.Н. *Обобщенные аналитические функции.* – М.: 1988. – 510 с.
15. Марков П.Е. *Бесконечно малые изгибания некоторых многомерных поверхностей* // Матем. заметки. – 1980. – Т. 27. – № 3. – С. 469–479.
16. Марков П.Е. *О погружении метрик, близких к погружаемым* // Укр. геом. сб. – 1992. – № 35. – С. 49–67.
17. Allendoerfer C.B. Rigidity for spaces of class greater than one // Amer. J. Math. – 1939. – № 61. – P. 633–644.
18. Яненко Н.Н. *Некоторые необходимые признаки изгибаемых поверхностей V_m в $(m+q)$-мерном евклидовом пространстве* // Тр. семин. по векторн. и тензорн. анализу. – 1952. – № 9. – С. 326–287.
19. Kowalski O. *Some algebraic theorems on vector-valued forms and their geometric applications* // Colloq. Math. – 1972. – T. 26. – S. 59–92.
20. Gardner R.B. *New viewpoints in the geometry of submanifolds of R^N* // Bull. Amer. Math. Soc. – 1977. – V. 83. – № 1. – P. 1–35.
21. Chern S.-S., Osserman R. *Remarks on the Rietannian metric of a minimal submanifold* // Lect. Notes Math. – 1981. – № 894. – P. 49–90.
22. Кобаяси Ш., Номидзу К. *Основы дифференциальной геометрии.* Т 2. – М.: Наука, 1981. – 414 с.
23. Вишневский В.В., Широков А.П., Шурыгин В.В. *Пространства над алгебрами.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1985. – 262 с.
24. Зуланке Р., Винтген П. *Дифференциальная геометрия и расслоения.* – М.: Мир, 1975. – 352 с.
25. Вейль Г. *Классические группы. Их инварианты и представления.* – М.: ГИИЛ, 1947. – 408 с.
26. Гантмахер Ф.Р. *Теория матриц.* – 3-е изд. – М.: Наука, 1967. – 575 с.
27. Постников М.М. *Группы и алгебры Ли.* Учеб. пособие. – М.: Наука, 1982. – 447 с.
28. Вольф Дж. *Пространства постоянной кривизны.* – М.: Наука, 1982. – 480 с.
29. Эйзенхарт Л.П. *Риманова геометрия.* – М.: ГИИЛ, 1948. – 316 с.
30. Де Рам Ж. *Дифференцируемые многообразия.* – М.: ГИИЛ, 1956. – 250 с.
31. Боровский Ю.Е. *Вполне интегрируемые системы Пфаффа* // Изв. вузов. Математика. – 1959. – № 3. – С. 28–40.
32. Боровский Ю.Е. *О вполне интегрируемых системах Пфаффа* // Изв. вузов. Математика. – 1960. – № 1. – С. 35–38.
33. Боровский Ю.Е. *Системы Пфаффа с коэффициентами из L_n и их геометрические приложения* // Сиб. матем. журн. – 1988. – Т.29. – № 2. – С. 10–16.
34. Марков П.Е. *Бесконечно малые изгибания высших порядков многомерных поверхностей* // Укр. геом. сб. – 1982. – № 25. – С. 87–94.
35. Климентов С.Б. *О продолжении бесконечно малых изгибаний высших порядков односвязной поверхности положительной кривизны* // Матем. заметки. – 1984. – Т. 36. – № 3. – С. 393–403.
36. Картан Э. *Геометрия римановых пространств.* – М.: ОНТИ НКТП, 1936. – 244 с.
37. Перепелкин Д.И. *Кривизна и нормальные пространства многообразия V_m в R_n* // Матем. сб. – 1935. – Т. 42. – № 1–3. – С. 100–120.

Ростовский государственный университет

Поступила
27.03.1995