*Известия вузов. Математика*
*2009, №9, с. 53–68*

*http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/*
*e-mail: izvuz.matem@ksu.ru*

*М.Р. ТИМИРШИН*

# О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ГРАФИКОВ ЗАМКНУТЫХ ОПЕРАТОРОВ

*Аннотация.* В работе изучаются свойства графиков замкнутых операторов в гильбертовых пространствах. Построены представления алгебр фон Неймана, индуцированные графиком замкнутого оператора. Получены характеризации некоторых классов замкнутых операторов в терминах их характеристических матриц. Исследованы некоторые свойства операций над графиками замкнутых операторов.

*Ключевые слова*: график, замкнутый оператор, ортопроектор, характеристическая матрица, представление алгебр фон Неймана.

*УДК*: 517.983

*Abstract.* In this paper we study some properties of graphs of closed operators in Hilbert spaces. We construct representations of von Neumann algebras induced by graphs of closed operators. We describe some classes of closed operators in terms of their characteristic matrices and study some properties of operations on graphs of closed operators.

*Keywords*: graph, closed operator, orthoprojector, characteristic matrix, representation of von Neumann algebras.

## 1. Введение

Известно, что графики линейных преобразований являются одним из важнейших инструментов при изучении линейных операторов в гильбертовых пространствах, особенно неограниченных. Впервые графики были введены фон Нейманом [1] при изучении фундаментальных свойств неограниченных линейных операторов. Позднее М.Х. Стоуном [2] было введено понятие характеристических матриц, ассоциированных с графиками замкнутых операторов, что позволило свести изучение неограниченных замкнутых операторов к исследованию ограниченных операторов. Метод графиков оказался особенно полезным в теории возмущений линейных операторов и в изучении сходимости неограниченных операторов ([3], § IV.2; [4], § VIII.7). Кроме того, техника графиков нашла неожиданное применение при исследовании проблем продолжения ортоаддитивных отображений, заданных на проекторах. Г. Дай [5] с помощью метода графиков показал, что проекторный ортоизоморфизм между $W^*$-алгебрами определенного типа продолжается до прямой суммы $*$-изоморфизма и $*$-антиизоморфизма. С помощью конструкций, основанных на графиках компактных операторов, была построена [6] неограниченная ортоаддитивная мера на проекторах алгебры

Поступила 31.05.2007

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 05-01-00799).

фон Неймана, которая не продолжается до веса. Другие применения графиков можно найти в работах [7]–[9].

В нашей работе мы получим ряд новых результатов, касающихся свойств графиков замкнутых операторов в гильбертовых пространствах. В разделе 3 будут построены различные представления алгебр фон Неймана, индуцированные графиками замкнутых операторов, а также будет указана их связь с размножением алгебр фон Неймана. В разделе 4 мы займемся изучением свойств замкнутых операторов в терминах их характеристических матриц и получим характеризации таких подклассов замкнутых операторов, как классы ограниченных, обратимых, компактных, фредгольмовых и др. операторов. Последний же раздел мы посвятим изучению свойств операций над графиками замкнутых операторов в зависимости от свойств самих операторов.

## 2. Обозначения

Пусть $X, Y$ — произвольные комплексные гильбертовы пространства, $\mathcal{CL}(X,Y)$ (соответственно $\mathcal{DC}(X,Y), \mathcal{B}(X,Y), \mathcal{I}nv(X,Y), \mathcal{F}(X,Y), \mathcal{C}(X,Y), \mathcal{C}_O(X,Y)$) — класс всех замкнутых (соответственно замкнутых плотно заданных, всюду определенных ограниченных, обратимых, фредгольмовых ([10], с. 38), компактных, конечномерных) операторов из $X$ в $Y$. Если $X = Y$, то $Y$ в приведенных обозначениях будем опускать. В этом случае $\mathcal{P}(X)$ — семейство всех ортопроекторов в $X$.

Далее всюду $K_i$, $i = 1, 2,$ — комплексные гильбертовы пространства, $H \equiv K_1 \oplus K_2$. При этом для наглядности мы будем пользоваться следующим соглашением: все операторы, действующие на $H$, будут обозначаться прописными буквами, а операторы, действующие на $K_i$, $i = 1, 2,$ — строчными. Пусть далее в соответствии с принятым соглашением $I$ — тождественное отображение в $H$, $P_E$ — ортопроектор в $H$ на подпространство $E \subseteq H$, $P_E^\perp \equiv I - P_E$, $P_i \equiv P_{K_i}$, $i = 1, 2$. Аналогично, пусть $1$ — тождественный оператор в $K_i$, $i = 1, 2$, $p_E$ — ортопроектор в $K_i$ на подпространство $E \subseteq K_i$, $i = 1, 2$, $p_E^\perp \equiv 1 - p_E$.

Для $s \in \mathcal{DC}(K_i, K_j)$, $i, j = 1, 2$, $i \neq j$, будем использовать следующие обозначения: $s^*$ — сопряженный к $s$ оператор, $|s| = (s^*s)^{1/2}$ — модуль $s$, $\operatorname{rp} s \equiv p_{\ker(s)^\perp} \in \mathcal{P}(K_i)$, $\operatorname{Rp} s \in \mathcal{P}(H)$ — ортопроектор, заданный по формуле $\operatorname{Rp} s \equiv \begin{cases} \operatorname{rp} s \oplus 0, & \text{если } \operatorname{rp} s \in \mathcal{P}(K_1); \\ 0 \oplus \operatorname{rp} s, & \text{если } \operatorname{rp} s \in \mathcal{P}(K_2). \end{cases}$

Пусть теперь $s \in \mathcal{CL}(K_i, K_j)$, $i, j = 1, 2$, $i \neq j$, тогда $\mathcal{D}(s)$ — область определения $s$, $\overline{\mathcal{D}}(s)$ — замыкание области определения $s$, $\mathcal{R}(s)$ — множество значений $s$, $\ker s$ — ядро $s$, $\Gamma(s) \equiv \{(f, sf) : f \in \mathcal{D}(s)\} \subseteq H$ — график оператора $s$, $\widehat{s} \in \mathcal{DC}(K_i, K_j)$ — каноническое продолжение оператора $s$, заданное условиями $\widehat{s}|_{\mathcal{D}(s)} = s$ и $\widehat{s}|_{\mathcal{D}(s)^\perp} = 0$, $\Delta_s \equiv (1 + |\widehat{s}|^2)^{-1} - p^\perp_{\overline{\mathcal{D}}(s)} \in \mathcal{B}(K_i)$.

Каждому оператору $A \in \mathcal{B}(H)$ будем ставить в соответствие матрицу вида

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \text{где } a_{ij} = P_i A|_{K_j} \in \mathcal{B}(K_j, K_i), \ \ i, j = 1, 2.$$

## 3. Представление алгебр фон Неймана, индуцированное графиком замкнутого оператора

Пусть $X$ — гильбертово пространство, а алгебра $A' \equiv \{a' \in \mathcal{B}(X) : \forall a \in A \ aa' = a'a\}$ означает коммутант инволютивного подмножества $A \subseteq \mathcal{B}(X)$. Инволютивная подалгебра $\mathcal{M}$ алгебры $\mathcal{B}(X)$ называется *алгеброй фон Неймана, действующей в* $X$, если $\mathcal{M} = \mathcal{M}''$.

**Определение 1.** Пусть $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ — алгебры фон Неймана, действующие в гильбертовых пространствах $X$ и $Y$ соответственно. Линейное отображение $\pi : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ называется

— *морфизмом алгебр фон Неймана*, если $\pi$ — инволютивный гомоморфизм такой, что $\sup \pi(x_i) = \pi(\sup x_i)$ для любой ограниченной возрастающей сети $(x_i)$ в $\mathcal{M}^+$;

— *пространственным изоморфизмом алгебр фон Неймана*, если $\pi$ — сюръективно и существует унитарный оператор $u \in \mathcal{B}(X, Y)$ такой, что $\pi(a) = uau^*$ для любого $a \in \mathcal{M}$.

**Определение 2.** *Представлением алгебры фон Неймана* $\mathcal{M}$ называется пара $(\pi, X)$, где $X$ — гильбертово пространство, а $\pi : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{B}(X)$ — морфизм.

Ниже (теорема 1) мы построим представления алгебр фон Неймана, индуцированные графиками замкнутых операторов. Для точной формулировки и доказательства этого результата получим несколько вспомогательных утверждений.

**Лемма 1.** *Пусть $s \in \mathcal{DC}(K_i, K_j)$, $i, j = 1, 2$, $i \neq j$, $s = u|s|$ — полярное представление $s$ и $f : [0, +\infty) \to (0, +\infty)$ — непрерывная функция. Тогда*

(i) $sf(|s|) = u(|s|f(|s|))$ — *полярное представление* $sf(|s|)$,

(ii) $s\Delta_s^{1/2} = u(|s|\Delta_s^{1/2})$ — *полярное представление* $s\Delta_s^{1/2}$,

(iii) $s\Delta_s = u(|s|\Delta_s)$ — *полярное представление* $s\Delta_s$.

*Доказательство.* Утверждение (i) следует из выкладок

$$|sf(|s|)| = \sqrt{(sf(|s|))^* sf(|s|)} = \sqrt{|s|f(|s|)u^*u|s|f(|s|)} = |s|f(|s|),$$
$$\mathcal{R}(u^*u) = \overline{\mathcal{R}(|s|)} = (\ker |s|)^\perp = (\ker(|s|f(|s|))^\perp = \overline{\mathcal{R}(|s|f(|s|))}.$$

Если теперь положить $f(\lambda) \equiv 1/(1+\lambda^2)^{1/2}$ (соответственно $f(\lambda) \equiv 1/(1+\lambda^2)$) $(\lambda \in [0, +\infty))$, то получим (ii) (соответственно (iii)). $\square$

**Лемма 2.** *Пусть $s \in \mathcal{CL}(K_i, K_j)$, $i, j = 1, 2$, $i \neq j$. Тогда*

(i) $\mathcal{D}(s) = \mathcal{R}(\Delta_s^{1/2})$,

(ii) $s\Delta_s^{1/2} \in \mathcal{B}(K_i, K_j)$,

(iii) $\Delta_s + (s\Delta_s^{1/2})^* s\Delta_s^{1/2} = p_{\overline{\mathcal{D}(s)}}$.

*Доказательство.* Утверждение (i) следует из выкладки

$$\mathcal{D}(s) = \mathcal{D}(\widehat{s}) - \mathcal{D}(s)^\perp = \mathcal{D}(\Delta_{\widehat{s}}^{-1/2}) - \mathcal{D}(s)^\perp = \mathcal{R}(\Delta_{\widehat{s}}^{1/2}) - \mathcal{D}(s)^\perp = \mathcal{R}(\Delta_s^{1/2}).$$

Отсюда имеем, что оператор $s\Delta_s^{1/2}$ всюду определен. Но он также и замкнут, так как $\Delta_s^{1/2} \in \mathcal{B}(K_i)$. Поэтому (ii) следует из теоремы о замкнутом графике. Наконец, с учетом (ii), примененного к $|\widehat{s}|$, и в силу (ii) леммы 1 получаем (iii)

$$\Delta_s + (s\Delta_s^{1/2})^* s\Delta_s^{1/2} = \Delta_{\widehat{s}} - p_{\overline{\mathcal{D}(s)}}^\perp + |\widehat{s}\Delta_{\widehat{s}}^{1/2}|^2 = (1+|\widehat{s}|^2)\Delta_{|\widehat{s}|} - p_{\overline{\mathcal{D}(s)}}^\perp = p_{\overline{\mathcal{D}(s)}}. \qquad \square$$

**Лемма 3.** *Пусть $s \in \mathcal{CL}(K_1, K_2)$ и $t \in \mathcal{DC}(K_1, K_2)$. Тогда*

(i) $\Gamma(s) = \{(\Delta_s^{1/2} f, s\Delta_s^{1/2} f) : f \in K_1\}$,

(ii) $\Gamma(t)^\perp = \Gamma(-t^*) = \{(-t^*\Delta_{t^*}^{1/2} g, \Delta_{t^*}^{1/2} g) : g \in K_2\}$.

*Доказательство.* В силу (i) леммы 2 достаточно установить лишь первое равенство в (ii). Это следует из выкладки

$$(h, g) \in \Gamma(t)^\perp \Leftrightarrow \langle f, -h \rangle = \langle tf, g \rangle \quad (f \in \mathcal{D}(t))$$
$$\Leftrightarrow h = -t^* g, \quad g \in \mathcal{D}(t^*) \Leftrightarrow (h, g) \in \Gamma(-t^*). \qquad \square$$

Обозначим $U_s \equiv \begin{pmatrix} \Delta_s^{1/2} & 0 \\ s\Delta_s^{1/2} & 0 \end{pmatrix}$, $U_t^\perp \equiv \begin{pmatrix} 0 & -t^*\Delta_{t^*}^{1/2} \\ 0 & \Delta_{t^*}^{1/2} \end{pmatrix}$ $(s \in \mathcal{CL}(K_1, K_2),\, t \in \mathcal{DC}(K_1, K_2))$.

**Лемма 4.** *Пусть $s \in \mathcal{CL}(K_1, K_2)$ и $t \in \mathcal{DC}(K_1, K_2)$. Тогда*

(i) *$U_s$ — частичная изометрия в $H$, причем $U_s^*U_s = P_{\overline{\mathcal{D}}(s)}$, $U_sU_s^* = P_{\Gamma(s)}$,*

(ii) *$U_t^\perp$ — частичная изометрия в $H$, причем $U_t^{\perp *}U_t^\perp = P_2$, $U_t^\perp U_t^{\perp *} = P_{\Gamma(t)}^\perp$.*

*Доказательство.* Из (i) леммы 2 $U_s|_{H\ominus\overline{\mathcal{D}}(s)} = 0$, а в силу (i) леммы 3 $\mathcal{R}(U_s) = \Gamma(s)$. Для произвольного $f \in \overline{\mathcal{D}}(s)$ в силу (iii) леммы 2 имеем

$$\|U_s(f,\theta)\|^2 = \|(\Delta_s^{1/2}f, s\Delta_s^{1/2}f)\|^2 = \|\Delta_s^{1/2}f\|^2 + \|s\Delta_s^{1/2}f\|^2 = \\ = \langle(\Delta_s + (s\Delta_s^{1/2})^* s\Delta_s^{1/2})f, f\rangle = \|f\|^2 = \|(f,\theta)\|^2.$$

Таким образом, отображение $U_s|_{\overline{\mathcal{D}}(s)}$ изометрично. Отсюда немедленно получаем (i). Утверждение (ii) проверяется аналогично, но с использованием (ii) леммы 3. □

Пусть $I_i : \mathcal{B}(K_i) \to \mathcal{B}(H)$, $i = 1, 2$, — канонические вложения алгебр $\mathcal{B}(K_i)$ в $\mathcal{B}(H)$, т. е. $I_1(a) = a \oplus 0$, $I_2(b) = 0 \oplus b$, $a \in \mathcal{B}(K_1)$, $b \in \mathcal{B}(K_2)$. Введем отображения $\Psi_s : \mathcal{B}(K_1) \to \mathcal{B}(H)$, $\Psi_s^\perp : \mathcal{B}(K_2) \to \mathcal{B}(H)$, а также $\Phi_s : \mathcal{B}(K_1) \oplus \mathcal{B}(K_2) \to \mathcal{B}(H)$, $s \in \mathcal{DC}(K_1, K_2)$, заданные правилами:

$$\Psi_s(a) \equiv U_sI_1(a)U_s^* = \begin{pmatrix} \alpha & (s\alpha^*)^* \\ s\alpha & s(s\alpha^*)^* \end{pmatrix}, \quad \Psi_s^\perp(b) \equiv U_s^\perp I_2(b)U_s^{\perp *} = \begin{pmatrix} s^*(s^*\beta^*)^* & -s^*\beta \\ -(s^*\beta^*)^* & \beta \end{pmatrix},$$
$$\Phi_s(a \oplus b) \equiv \Psi_s(a) + \Psi_s^\perp(b),$$

где $\alpha = \Delta_s^{1/2}a\Delta_s^{1/2}$, $\beta = \Delta_{s^*}^{1/2}b\Delta_{s^*}^{1/2}$, $a \in \mathcal{B}(K_1)$, $b \in \mathcal{B}(K_2)$.

**Теорема 1.** *Пусть $s \in \mathcal{DC}(K_1, K_2)$, $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ — алгебры фон Неймана, действующие в $K_1$ и $K_2$ соответственно. Тогда инъективные представления $(\Psi_s, H)$, $(\Psi_s^\perp, H)$ и $(\Phi_s, H)$ алгебр фон Неймана $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$ и $\mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2$ соответственно определяют пространственные изоморфизмы алгебр фон Неймана $\mathcal{M}_1$ на $\Psi_s(\mathcal{M}_1)$, $\mathcal{M}_2$ на $\Psi_s^\perp(\mathcal{M}_2)$ и $\mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2$ на $\Phi_s(\mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2)$ соответственно.*

*Доказательство.* Рассмотрим операторы

$$u_s \equiv U_s\,|_{K_1} \in \mathcal{B}(K_1, \Gamma(s)), \quad u_s^\perp \equiv U_s^\perp|_{K_2} \in \mathcal{B}(K_2, \Gamma(s)^\perp),$$

а также $V_s \in \mathcal{B}(H)$, действующий по формуле

$$V_s(a \oplus b) \equiv u_s(a) + u_s^\perp(b), \quad a \in \mathcal{B}(K_1), \quad b \in \mathcal{B}(K_2).$$

По лемме 4 все они являются унитарными. Но

$$\Psi_s(a) = u_sau_s^*, \quad \Psi_s^\perp(b) = u_s^\perp b(u_s^\perp)^*, \quad \Phi_s(a \oplus b) = V_s(a \oplus b)V_s^*, \quad a \in \mathcal{B}(K_1), \quad b \in \mathcal{B}(K_2).$$

Отсюда и следует утверждение теоремы согласно определениям 1 и 2. □

**Следствие 1.** Пусть $s \in \mathcal{DC}(K_1, K_2)$. Тогда пространственными изоморфизмами алгебр фон Неймана являются отображения

(i) $\Psi_s : \mathcal{B}(K_1) \to P_{\Gamma(s)}\mathcal{B}(H)P_{\Gamma(s)}$,

(ii) $\Psi_s^\perp : \mathcal{B}(K_2) \to P_{\Gamma(s)}^\perp\mathcal{B}(H)P_{\Gamma(s)}^\perp$,

(iii) $\Phi_s : \mathcal{B}(K_1) \oplus \mathcal{B}(K_2) \to \mathcal{B}(\Gamma(s)) \oplus \mathcal{B}(\Gamma(s)^\perp)$.

Далее в предложении 1 получен матричный вид ортопроектора на график произвольного замкнутого оператора и его ортогонального дополнения. Этот результат лежит в основе всей дальнейшей теории графиков.

**Предложение 1.** *Пусть $s \in \mathcal{CL}(K_1, K_2)$ и $t \in \mathcal{DC}(K_1, K_2)$. Тогда*

(i) $P_{\Gamma(s)} = \begin{pmatrix} \Delta_s & (s\Delta_s)^* \\ s\Delta_s & s(s\Delta_s)^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_s & \widehat{s}^*\Delta_{\widehat{s}^*} \\ \widehat{s}\Delta_{\widehat{s}} & |\widehat{s}^*|^2\Delta_{\widehat{s}^*} \end{pmatrix}$,

(ii) $P_{\Gamma(t)} = \begin{pmatrix} \Delta_t & t^*\Delta_{t^*} \\ t\Delta_t & |t^*|^2\Delta_{t^*} \end{pmatrix}$,

(iii) $P^{\perp}_{\Gamma(t)} = \begin{pmatrix} t^*(t^*\Delta_{t^*})^* & -t^*\Delta_{t^*} \\ -(t^*\Delta_{t^*})^* & \Delta_{t^*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |t|^2\Delta_t & -t^*\Delta_{t^*} \\ -t\Delta_t & \Delta_{t^*} \end{pmatrix}$.

*Доказательство.* Первые равенства в утверждениях (i) и (iii) следуют непосредственно из леммы 4. Отсюда получаются (ii) и второе равенство в (iii), если учесть, что $P_{\Gamma(t)} \oplus P^{\perp}_{\Gamma(t)} = I$. Второе же равенство в (i) следует из (ii) и тождества $P_{\Gamma(\widehat{s})} = P_{\Gamma(s)} \oplus P_{\mathcal{D}(s)^{\perp}}$. □

В работе [11] В. Кауфман показал, что каждый замкнутый оператор $s$, действующий в гильбертовом пространстве $K$, представляется в виде отношения $a/b$, где $a \in \mathcal{B}(K)$, $b \in \mathcal{B}(K)^+$ такие, что $a^*K + bK$ замкнуто в $K$. Напомним, что отношением операторов $a$ и $b$ из $\mathcal{B}(K)$ таких, что $\ker b \subset \ker a$, называется отображение $a/b : K \to K$, заданное формулой $(a/b)(bf) = af$, $f \in K$. Также В. Кауфманом было подмечено, что в этом случае ортопроектор на график оператора $s$ будет иметь вид

$$P_{\Gamma(s)} = \begin{pmatrix} b^2 & ba^* \\ ab & aa^* \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Мы можем найти явный вид таких операторов $a$ и $b$. Действительно, положим $a = s\Delta_s^{1/2}$, $b = \Delta_s^{1/2}$. Тогда из (ii) леммы 2 имеем $a, b \in \mathcal{B}(K)$. При этом, очевидно, $s = a/b$. Кроме того, в силу (iii) леммы 2 и ([12], теорема 2.2) имеем

$$a^*K + bK = (s\Delta_s^{1/2})^*K + \Delta_s^{1/2}K = ((s\Delta_s^{1/2})^* s\Delta_s^{1/2} + \Delta_s)^{1/2}K = p_{\overline{\mathcal{D}}(s)}K.$$

Так что $a^*K + bK$ замкнуто в $K$. Заметим также, что при таком выборе операторов $a$ и $b$ вид матрицы ортопроектора $P_{\Gamma(s)}$, полученный в (i) предложения 1, согласуется с формулой (1).

*Случай* $K \equiv K_1 = K_2$. Пусть $\mathcal{M}$ — алгебра фон Неймана, тогда $\mathcal{M}^u$ будет обозначать группу всех унитарных операторов в $\mathcal{M}$, а $\mathcal{M}^{pr}$ — класс всех ортопроекторов в $\mathcal{M}$. Через $M_2$ будем обозначать алгебру всех матриц 2-го порядка над комплексным полем. Линейный оператор $s \in \mathcal{CL}(X)$ называется *присоединенным к алгебре фон Неймана* $\mathcal{M}$, действующей в гильбертовом пространстве $X$ (обозначается $s\,\eta\,\mathcal{M}$), если $s = u^*su$ для любого оператора $u \in M'^u$.

Рассмотрим отображение $I_{12} : \mathcal{B}(K) \longrightarrow \mathcal{B}(H)$, действующее по правилу

$$I_{12}(a) \equiv I_1(a) + I_2(a) = a \oplus a \quad (a \in \mathcal{B}(K)).$$

Тогда алгебра фон Неймана $I_{12}(\mathcal{M})$, полученная с помощью представления $(I_{12}, H)$ алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$, действующей в $K$, называется *размножением* $\mathcal{M}$.

Далее в теореме 2 получена связь размножения алгебры фон Неймана с ее представлениями, приведенными в теореме 1.

**Теорема 2.** *Пусть $\mathcal{M}$ — алгебра фон Неймана, действующая в $K$, $s \in \mathcal{DC}(K)$. Следующие утверждения равносильны*:

(i) $s\,\eta\,\mathcal{M}'$,

(ii) $\Psi_s(a) = P_{\Gamma(s)} I_{12}(a) P_{\Gamma(s)} \quad (a \in \mathcal{M})$,

(iii) $\Psi_s^{\perp}(a) = P_{\Gamma(s)}^{\perp} I_{12}(a) P_{\Gamma(s)}^{\perp} \quad (a \in \mathcal{M})$.

Для доказательства этого утверждения предварительно установим справедливость двух лемм.

**Лемма 5.** *Пусть $s \in \mathcal{DC}(K)$, $\mathcal{M}$ — алгебра фон Неймана, действующая в $K$. Тогда эквивалентны условия*

(i) $s \, \eta \, \mathcal{M}$,
(ii) $U_s \in \mathcal{M} \otimes M_2$,
(iii) $P_{\Gamma(s)} \in \mathcal{M} \otimes M_2$,
(iv) $U_s^{\perp} \in \mathcal{M} \otimes M_2$,
(v) $V_s \in \mathcal{M} \otimes M_2$.

*Доказательство.* Импликации (i)⇒(ii)⇒(iii) и (i)⇒(iv)⇒(iii) очевидны. Пусть $s = u|s|$ — полярное представление оператора $s$. Тогда из (iii) леммы 1 имеем

$$\text{(iii)} \;\Rightarrow\; \Delta_s, \;\; u(|s|\Delta_s) \in \mathcal{M} \;\Rightarrow\; |s| \, \eta \, \mathcal{M}, \;\; u \in \mathcal{M} \;\Rightarrow\; \text{(i)}.$$

Остается заметить, что (v)⇔(ii), (iv). □

**Лемма 6.** *Пусть $U$ — частичная изометрия в $H$, $R \equiv U^*U$, $\mathcal{W}$ — алгебра фон Неймана, действующая в $H$. Тогда эквивалентны утверждения*

(i) $U \in \mathcal{W}'$,
(ii) $U^*AU = RA = AR \quad (A \in \mathcal{W})$.

*Доказательство.* Импликация (i)⇒(ii) очевидна. Обратно,

$$\text{(ii)} \;\Rightarrow\; \langle U^*PUf, f\rangle = \langle RPRf, f\rangle \;\; (P \in \mathcal{W}^{pr}, \; f \in H) \;\Rightarrow$$
$$\|PUf\|^2 = \|PRf\|^2 = \|RPf\|^2 = \|UPf\|^2 \;\; (P \in \mathcal{W}^{pr}, \; f \in H).$$

Отсюда $PH$ и $(PH)^{\perp}$ инвариантны относительно $U$ для всех $P \in \mathcal{W}^{pr}$, т.е. $PU = UP$ $(P \in \mathcal{W}^{pr})$. Следовательно, $U \in \mathcal{W}^{pr\prime} = \mathcal{W}'$, т.е. получаем (i). □

*Доказательство теоремы* 2. В силу лемм 5 и 6 имеем

$$\text{(ii)} \;\Leftrightarrow\; U_s I_1(a) U_s^* = P_{\Gamma(s)} I_{12}(a) P_{\Gamma(s)} \quad (a \in \mathcal{M}) \;\Leftrightarrow$$
$$U_s^* I_{12}(a) U_s = P_1 I_{12}(a) = I_{12}(a) P_1 \quad (I_{12}(a) \in I_{12}(\mathcal{M})) \;\Leftrightarrow$$
$$U_s \in I_{11}(\mathcal{M})' = \mathcal{M}' \otimes M_2 \;\Leftrightarrow\; \text{(i)}.$$

Аналогично показывается равносильность утверждений (i) и (iii). □

## 4. Графики и их свойства

**Определение 3.** Для произвольного оператора $s \in \mathcal{CL}(K_1, K_2)$ ортопроектор $Q \equiv P_{\Gamma(s)}$ будем, для краткости, также называть *графиком* оператора $s$, а матрицу $(q_{ij})$, $i, j = 1, 2$, ортопроектора $Q$ — *характеристической матрицей* оператора $s$ ([2], с. 156).

Для самосопряженного оператора $a \in \mathcal{B}(X)$ в гильбертовом пространстве $X$ через $\sigma(a)$, $\sigma_T(a)$ и $\sigma_{\text{ess}}(a)$ будем обозначать спектр, точечный спектр и существенный спектр оператора $a$ соответственно ([4], сс. 211, 261).

В предложении 1 нами был получен явный вид характеристической матрицы замкнутого оператора. Следующий результат является отчасти обратным. Он отвечает на вопрос: в каком случае произвольный ортопроектор из $\mathcal{B}(H)$ будет графиком некоторого замкнутого оператора.

**Теорема 3** (критерий графика). *Пусть* $Q \in \mathcal{P}(H)$. *Тогда эквивалентны условия*

(i) $\exists s \in \mathcal{CL}(K_1, K_2) : Q = P_{\Gamma(s)}$,
(ii) $\ker(1 - q_{22}) = \{\theta\}$,
(iii) $\operatorname{rp} q_{12} = \operatorname{rp} q_{22}$,
(iv) $\ker q_{11} = \ker(P_2 - Q)$,
(v) $Q \wedge P_2 = 0$,
(vi) $\ker((\operatorname{Rp} q_{11})^{\perp} - Q) = \{\theta\}$,
(vii) $\ker((Q^{\perp} \wedge P_1) \vee P_2 - Q) = \{\theta\}$.

Данный критерий можно рассматривать как характеризацию регулярных отношений в терминах их характеристических матриц ([13], предложение 7.1).

Для доказательства теоремы 3, а также для дальнейшего изучения графиков нам понадобятся вспомогательные результаты, касающиеся свойств ортопроекторов.

**Лемма 7.** *Пусть* $Q \in \mathcal{B}(H)$. *Для того чтобы* $Q \in \mathcal{P}(H)$, *необходимо и достаточно, чтобы одновременно были выполнены два условия*:

(i) $q_{ij} = q_{ji}^{*}$, $i, j = 1, 2$,
(ii) $\sum\limits_{k=1}^{2} q_{ik} q_{kj} = q_{ij}$, $i, j = 1, 2$.

*При этом* $0 \leqslant q_{ii} \leqslant 1$, $i = 1, 2$.

Справедливость леммы немедленно следует из определения ортопроектора.

**Лемма 8.** *Для* $Q \in \mathcal{P}(H)$ *справедливы равенства*

(i) $\ker q_{ij} = \ker q_{jj} \oplus \ker(1 - q_{jj}) = \ker(\operatorname{rp} q_{jj} - q_{jj})$, $i, j = 1, 2$, $i \neq j$,
(ii) $\operatorname{rp} q_{ij} = \operatorname{rp} q_{jj} \wedge \operatorname{rp}(1 - q_{jj})$, $i, j = 1, 2$, $i \neq j$.

*Доказательство.* Нетрудно видеть, что (ii) является прямым следствием (i). Утверждение же (i) следует из (ii) предыдущей леммы

$$\ker q_{ij} = \ker(q_{ij}^{*} q_{ij}) = \ker(q_{jj}(1 - q_{jj})) = \\ = \ker q_{jj} \oplus \ker(1 - q_{jj}) = \ker(\operatorname{rp} q_{jj} - q_{jj}), \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j. \qquad \square$$

**Лемма 9.** *Если* $Q \in \mathcal{P}(H)$, *то*

(i) $Q \wedge P_i = P_{\ker(1 - q_{ii})}$, $i = 1, 2$,
(ii) $Q \vee P_1 = 1 \oplus \operatorname{rp} q_{22}$, $Q \vee P_2 = \operatorname{rp} q_{11} \oplus 1$.

*Доказательство.* Очевидно, достаточно показать (i). Пусть для определенности $i = 1$. Тогда для произвольного вектора $f = (f_1, f_2) \in H$ имеем

$$f \in (Q \wedge P_1)H \;\Leftrightarrow\; f \in QH, \quad f_2 = \theta \;\Leftrightarrow\; (q_{11} f_1, q_{21} f_1) = (f_1, \theta), \quad f_2 = \theta \;\Leftrightarrow\; f \in \ker(1 - q_{11})$$

в силу (i) леммы 8. $\square$

**Следствие 2.** Пусть $Q \in \mathcal{P}(H)$. Тогда

(i) $\operatorname{Rp} q_{ii} = (Q \vee P_j) \wedge P_i$, $i, j = 1, 2$, $i \neq j$,
(ii) $(\operatorname{Rp}(1 - q_{ii}))^{\perp} = (Q \wedge P_i) \vee P_j$, $i, j = 1, 2$, $i \neq j$.

**Лемма 10.** *Пусть* $Q \in \mathcal{P}(H)$. *Тогда*

(i) $(\operatorname{Rp} q_{11} - Q)^2 = (\operatorname{rp} q_{11} - q_{11}) \oplus q_{22}$, $(\operatorname{Rp} q_{22} - Q)^2 = q_{11} \oplus (\operatorname{rp} q_{22} - q_{22})$,
(ii) $(P_1 - Q)^2 = (1 - q_{11}) \oplus q_{22}$, $(P_2 - Q)^2 = q_{11} \oplus (1 - q_{22})$,
(iii) $((\operatorname{Rp} q_{11})^{\perp} - Q)^2 = (q_{11} + p_{\ker q_{11}}) \oplus (1 - q_{22})$, $((\operatorname{Rp} q_{22})^{\perp} - Q)^2 = (1 - q_{11}) \oplus (q_{22} + p_{\ker q_{22}})$.

Справедливость данного утверждения проверяются с помощью несложных вычислений с учетом леммы 8.

**Следствие 3.** Пусть $Q \in \mathcal{P}(H)$. Тогда

(i) $\|\operatorname{Rp} q_{ii} - Q\|^2 = \max\{\|\operatorname{rp} q_{ii} - q_{ii}\|, \|q_{jj}\|\}$, $i, j = 1, 2$, $i \neq j$,

(ii) $\|(\operatorname{Rp} q_{ii})^\perp - Q\|^2 = \max\{\|q_{ii} + p_{\ker q_{ii}}\|, \|1 - q_{jj}\|\}$, $i, j = 1, 2$, $i \neq j$.

*Доказательство теоремы* 3. Нетрудно видеть, что (i)$\Leftrightarrow$ подпространство $QH$ не содержит элементов вида $(\theta, g)$, где $g \neq \theta$ $\Leftrightarrow$(v). В силу (iii) леммы 10 (ii)$\Leftrightarrow$(vi), а в силу (i) следствия 2 (vi)$\Leftrightarrow$(vii). Равносильность утверждений (ii) и (v) вытекает из (i) леммы 9, (ii)$\Leftrightarrow$(iv) — из (ii) леммы 10, а (ii)$\Leftrightarrow$(iii) — из (i) леммы 8. □

Далее получена характеризация основных понятий, связанных с оператором $s \in \mathcal{CL}(K_1, K_2)$, в терминах элементов характеристической матрицы такого оператора. Это утверждение играет ключевую роль в дальнейших рассуждениях.

**Предложение 2.** *Пусть $Q$ — график оператора $s \in \mathcal{CL}(K_1, K_2)$. Тогда*

(i) $\mathcal{D}(s) = \mathcal{R}(\sqrt{q_{11}})$,

(ii) $\mathcal{D}(\widehat{s}) = \mathcal{R}(\sqrt{q_{11}} + p_{\ker q_{11}})$,

(iii) $\mathcal{D}(\widehat{s}^*) = \mathcal{R}(\sqrt{1 - q_{22}})$,

(iv) $\mathcal{D}(s)^\perp = \ker q_{11}$,

(v) $\ker s = \ker(1 - q_{11})$,

(vi) $\ker \widehat{s} = \ker(\operatorname{rp} q_{11} - q_{11}) = \ker q_{21}$,

(vii) $\ker \widehat{s}^* = \mathcal{R}(s)^\perp = \ker q_{22} = \ker q_{12}$,

(viii) $\mathcal{R}(s) = \mathcal{R}(\sqrt{q_{22}})$,

(ix) $\mathcal{R}(\widehat{s}^*) = \mathcal{R}(\sqrt{\operatorname{rp} q_{11} - q_{11}})$,

(x) $\Delta_{\widehat{s}} = q_{11} + p_{\ker q_{11}}$,

(xi) $\Delta_{\widehat{s}^*} = 1 - q_{22}$,

(xii) $\widehat{s}\Delta_{\widehat{s}} = (\widehat{s}^*\Delta_{\widehat{s}^*})^* = q_{21}$,

(xiii) $\widehat{s}^*\Delta_{\widehat{s}^*} = (\widehat{s}\Delta_{\widehat{s}})^* = q_{12}$,

(xiv) $|\widehat{s}|^2\Delta_{\widehat{s}} = |\widehat{s}\Delta_{\widehat{s}}^{1/2}|^2 = \operatorname{rp} q_{11} - q_{11}$,

(xv) $|\widehat{s}^*|^2\Delta_{\widehat{s}^*} = |(\widehat{s}\Delta_{\widehat{s}}^{1/2})^*|^2 = q_{22}$,

(xvi) $P_{\Gamma(\widehat{s})} = Q \oplus P_{\ker q_{11}}$.

*Доказательство.* Из (i) предложения 1 получаем (xi), (xii), (xiii), (xv), а также (i), (ii), (iv), (x) и (xvi) с учетом (i) леммы 2. Утверждение же (xiv) следует из (iii) леммы 2 и выкладки

$$|\widehat{s}|^2\Delta_{\widehat{s}} = 1 - \Delta_{\widehat{s}} = 1 - p_{\ker q_{11}} - q_{11} = \operatorname{rp} q_{11} - q_{11}.$$

Импликации (xii), (xiv) $\Rightarrow$ (vi) и (xiii), (xv) $\Rightarrow$ (vii) очевидны. Из (xiv) и (xv) получаем (ix) и (viii):

$$\mathcal{R}(\widehat{s}^*) = \mathcal{R}(|\widehat{s}|) = \mathcal{R}(\sqrt{\operatorname{rp} q_{11} - q_{11}}), \quad \mathcal{R}(\widehat{s}) = \mathcal{R}(|\widehat{s}^*|) = \mathcal{R}(\sqrt{q_{22}}).$$

В силу (i) леммы 2 (xi)$\Rightarrow$(ii). Наконец, из (vi) и (iv) получаем (v):

$$\ker s = \ker \widehat{s} \ominus \mathcal{D}(s)^\perp = \ker(\operatorname{rp} q_{11} - q_{11}) \ominus \ker q_{11} = \ker(1 - q_{11}).$$ □

**Следствие 4.** Если $Q$ — график оператора $s \in \mathcal{CL}(K_1, K_2)$, то

$$\|\operatorname{rp} q_{11} - q_{11}\| = \|q_{22}\| = \|\operatorname{Rp} q_{11} - Q\|^2 = \|(Q \vee P_2) \wedge P_1 - Q\|^2.$$

*Доказательство* вытекает из (xiv), (xv) предложения 2, (i) следствия 3 и (i) следствия 2. □

Приступим теперь к изучению основных свойств замкнутых операторов в терминах характеристических матриц таких операторов.

**Теорема 4** (критерий инъективности). *Пусть $Q$ — график оператора $s \in \mathcal{CL}(K_1, K_2)$. Тогда эквивалентны условия*

(i) $\ker s = \{\theta\}$,
(ii) $\ker(1 - q_{11}) = \{\theta\}$,
(iii) $\operatorname{rp} q_{21} = \operatorname{rp} q_{11}$,
(iv) $\ker q_{22} = \ker(P_1 - Q)$,
(v) $Q \wedge P_1 = 0$,
(vi) $\ker((\operatorname{Rp} q_{22})^\perp - Q) = \{\theta\}$,
(vii) $\ker((Q^\perp \wedge P_2) \vee P_1 - Q) = \{\theta\}$.

*Доказательство.* В силу (v) предложения 2 (i)⇔(ii). Равносильность утверждений (v) и (ii) вытекает из (i) леммы 9, (ii)⇔(iii) — из (i) леммы 8, а (ii)⇔(iv) — из (ii) леммы 10. В силу (iii) леммы 10 (ii)⇔(vi), а в силу (i) следствия 2 (vi)⇔(vii). □

**Теорема 5** (критерий плотной определенности)**.** *Пусть $Q$ — график оператора $s \in \mathcal{CL}(K_1, K_2)$. Тогда равносильны утверждения*

(i) $Q \in \mathcal{DC}(K_1, K_2)$,
(ii) $\operatorname{rp} q_{11} = 1$,
(iii) $\ker q_{21} = \ker(1 - q_{11})$,
(iv) $\ker(P_2 - Q) = \{\theta\}$,
(v) $Q \vee P_2 = I$.

*Доказательство.* Эквивалентность (i) и (ii) следует из (iv) предложения 2, (ii)⇔(v) — из (ii) леммы 9, (ii)⇔(iv) — из теоремы 3, а (ii)⇔(iii) — из (i) леммы 8. □

**Следствие 5.** Пусть $Q$ — график оператора $s \in \mathcal{DC}(K_1, K_2)$. Тогда $\ker s = \ker q_{21}$.

*Доказательство.* Утверждение вытекает из (v) предложения 2 и теоремы 5. □

Исчерпывающую характеризацию ограниченных операторов в терминах их характеристических матриц дают две теоремы.

**Теорема 6** (критерий ограниченности)**.** *Пусть $Q$ — график оператора $s \in \mathcal{CL}(K_1, K_2)$. Тогда равносильны утверждения*

| | | | |
|---|---|---|---|
| (i) | $\widehat{s} \in \mathcal{B}(K_1, K_2)$, | (ix) | $\mathcal{D}(s)$ *замкнуто*, |
| (ii) | $\mathcal{R}(q_{11})$ *замкнуто*, | (x) | $\mathcal{R}(1 - q_{22})$ *замкнуто*, |
| (iii) | $\|\operatorname{rp} q_{11} - q_{11}\| < 1$, | (xi) | $\|q_{22}\| < 1$, |
| (iv) | $1 \notin \sigma(\operatorname{rp} q_{11} - q_{11})$, | (xii) | $1 \notin \sigma(q_{22})$, |
| (v) | $1 \notin \sigma_{\mathrm{ess}}(\operatorname{rp} q_{11} - q_{11})$, | (xiii) | $1 \notin \sigma_{\mathrm{ess}}(q_{22})$, |
| (vi) | $\|\operatorname{Rp} q_{11} - Q\| < 1$, | (xiv) | $\mathcal{R}(P_2 - Q)$ *замкнуто*, |
| (vii) | $(\operatorname{Rp} q_{11})^\perp - Q \in \mathcal{I}nv(H)$, | (xv) | $\|(Q \vee P_2) \wedge P_1 - Q\| < 1$, |
| (viii) | $(Q^\perp \wedge P_1) \vee P_2 - Q \in \mathcal{I}nv(H)$, | (xvi) | $(\operatorname{Rp} q_{11})^\perp H + QH = H, \quad (\operatorname{Rp} q_{11})^\perp \wedge Q = 0$. |

*При этом* $\|\operatorname{Rp} q_{11} - Q\| = \frac{\|s\|}{\sqrt{1+\|s\|^2}}$.

*Доказательство.* По теореме о замкнутом графике (i)⇔(x). А в силу (i) и (iii) предложения 2 (x)⇔(ii)⇔(x). Равносильность утверждений (i), (iii), (vi), (xi) и (xv), а также последняя формула в условии теоремы, следуют из (xiv) предложения 2, следствия 4 и функционального исчисления для операторов. Очевидны цепочки импликаций (iii)⇒(iv)⇒(v) и (xi)⇒(xii)⇒(xiii). Поскольку $\ker(1 - (\operatorname{rp} q_{11} - q_{11})) = \ker(p_{\ker q_{11}} + q_{11}) = \{\theta\}$, то (v)⇒(iii).

Аналогично, (xiii)⇒(xi), так как по теореме 3 $\ker(1-q_{22}) = \{\theta\}$. Далее, (ii), (x)⇔(xiv) вытекает из (ii) леммы 10, (vii) ⇔ (viii) — из (i) следствия 2, а (iv), (xii)⇔(vii) — из (iii) леммы 10. Наконец, (vii)⇔(xvi) получаем в силу ([14], с. 60). □

**Замечание 1.** Если для произвольного ортопроектора $Q \in \mathcal{P}(H)$ выполнено одно из условий (vi), (vii), (viii), (xi), (xii), (xv) или (xvi) предыдущей теоремы, то выполнены и остальные в силу теоремы 3.

**Теорема 7** (критерий ограниченности)**.** *Пусть $Q$ — график оператора $s \in \mathcal{CL}(K_1, K_2)$. Тогда равносильны условия*

(i) $s \in \mathcal{B}(K_1, K_2)$,
(ii) $\mathcal{D}(s) = K_1$,
(iii) $\mathcal{R}(q_{11}) = K_1$,
(iv) $\|1 - q_{11}\| < 1$,
(v) $q_{11} \in \mathcal{I}nv(K_1)$,
(vi) $\|P_1 - Q\| < 1$,
(vii) $P_2 - Q \in \mathcal{I}nv(H)$,
(viii) $K_2 + \Gamma(s) = H$, $P_2 \wedge Q = 0$.

*При этом* $\|P_1 - Q\| = \frac{\|s\|}{\sqrt{1+\|s\|^2}}$.

*Доказательство.* По теореме о замкнутом графике (i)⇔(ii), а (ii)⇔(iii) из (i) предложения 2. Так как $0 \leqslant q_{11} \leqslant 1$, то (iii)⇔(v)⇔(iv). В силу теорем 5 и 6 (vi)⇔(ii)⇔(vii)⇔(viii). □

Предыдущий критерий включает в себя результаты, полученные М.Х. Стоуном ([2], теорема 10(a)) и К.В. Чангом ([15], теорема 1).

Следующий результат показывает, что для графиков элемент $q_{22}$ явно выражается через остальные элементы его характеристической матрицы. А поскольку элементы $q_{12}$ и $q_{21}$ сопряжены, то отсюда следует, что график однозначно задается всего двумя элементами $q_{11}$ и $q_{21}$.

**Предложение 3.** *Пусть $Q$ — график оператора $s \in \mathcal{CL}(K_1, K_2)$. Тогда*

$$q_{22} = \overline{q_{21}(q_{11} + p_{\ker q_{11}})^{-1} q_{12}},$$

*где "‾" означает замыкание соответствующего оператора. В частности, если $s \in \mathcal{B}(K_1, K_2)$, то*

$$q_{22} = q_{21} q_{11}^{-1} q_{12}.$$

*Доказательство.* В силу (x), (xii), (xiii) и (xv) предложения 2 имеем

$$\begin{aligned} q_{21}(q_{11} + p_{\ker(q_1 1)})^{-1} q_{12} &= \widehat{s}\Delta_{\widehat{s}}\Delta_{\widehat{s}}^{-1}(\widehat{s}\Delta_{\widehat{s}})^* \supseteq \widehat{s}\Delta_{\widehat{s}}(\Delta_{\widehat{s}}^{-1}\Delta_{\widehat{s}})\widehat{s}^* = \widehat{s}\Delta_{\widehat{s}}\widehat{s}^* = \\ &= (\widehat{s}^*\Delta_{\widehat{s}^*})^*\widehat{s}^* \supseteq \Delta_{\widehat{s}^*}|\widehat{s}^*|^2 = |\widehat{s}^*|^2\Delta_{\widehat{s}^*}\,|_{\mathcal{D}(|\widehat{s}^*|^2)} = q_{22}|_{\mathcal{D}(|\widehat{s}^*|^2)}. \end{aligned}$$

Первое утверждение предложения теперь следует из плотности $\mathcal{D}(|\widehat{s}^*|^2)$ в $K_2$ и единственности продолжения по непрерывности. Для доказательства второй формулы достаточно заметить, что $s \in \mathcal{B}(K_1, K_2) \Rightarrow q_{11} + p_{\ker q_{11}} = q_{11} \in \mathcal{I}nv(K_1)$ в силу (iv) предложения 2 и теоремы 7. □

Далее коснемся нескольких критериев, касающихся понятия образа замкнутого оператора.

**Теорема 8** (критерий плотности образа)**.** *Пусть $Q$ — график оператора $s \in \mathcal{CL}(K_1, K_2)$. Тогда эквивалентны утверждения*

(i) $\overline{\mathcal{R}(S)} = K_2$,
(ii) $\operatorname{rp} q_{22} = 1$,
(iii) $\ker q_{12} = \{\theta\}$,
(iv) $Q \vee P_1 = I$.

*Доказательство.* В силу (viii) предложения 2 (i) и (ii) равносильны. Из (i) леммы 8 и теоремы 3 (ii)⇔(iii), а из (ii) следствия 2 (ii)⇔(iv). □

**Теорема 9** (критерий замкнутости образа). *Пусть $Q$ — график оператора $s \in \mathcal{CL}(K_1, K_2)$. Тогда равносильны утверждения*

(i) $\mathcal{R}(s)$ *замкнуто,*
(ii) $\mathcal{R}(1 - q_{11})$ *замкнуто,*
(iii) $\mathcal{R}(\operatorname{rp} q_{11} - q_{11})$ *замкнуто,*
(iv) $\mathcal{R}(q_{22})$ *замкнуто,*
(v) $\| \operatorname{rp} q_{22} - q_{22}\| < 1$,
(vi) $\mathcal{R}(P_1 - Q)$ *замкнуто,*
(vii) $\mathcal{R}(\operatorname{Rp} q_{11} - Q)$ *замкнуто,*
(viii) $\mathcal{R}((Q \vee P_2) \wedge P_1 - Q)$ *замкнуто,*
(ix) $\mathcal{R}((\operatorname{Rp} q_{22})^{\perp} - Q)$ *замкнуто,*
(x) $\mathcal{R}((Q^{\perp} \wedge P_2) \vee P_1 - Q)$ *замкнуто.*

*Доказательство.* Из (xiv) и (xv) предложения 2 следует (iii)⇔(i)⇔(iv). Равносильность (ii) и (iii) очевидна, а (iv)⇔(v), поскольку $0 \leqslant q_{22} \leqslant 1$. Из (iii) леммы 10 следует (iv)⇔(vii), а также (x)⇔(ii), (iv)⇔(vi). Наконец, из (i) следствия 2 (vii)⇔(viii) и (ix)⇔(x). □

**Теорема 10** (критерий сюръективности). *Пусть $Q$ — график оператора $s \in \mathcal{CL}(K_1, K_2)$. Тогда равносильны условия*

(i) $\mathcal{R}(s) = K_2$,
(ii) $\mathcal{R}(q_{22}) = K_2$,
(iii) $\|1 - q_{22}\| < 1$,
(iv) $q_{22} \in \mathcal{I}nv(K_2)$.

*Доказательство.* Из (viii) предложения 2 (i)⇔(ii). А (ii)⇔(iv)⇔(iii), так как $0 \leqslant q_{22} \leqslant 1$. □

В двух следующих теоремах дана характеризация обратимых операторов в классе всех замкнутых операторов. Можно заметить, что эти теоремы являются в некотором смысле противоположными теоремам 6 и 7.

**Теорема 11** (критерий обратимости). *Пусть $Q$ — график оператора $s \in \mathcal{CL}(K_1, K_2)$. Тогда эквивалентны условия*

(i) $s^{-1}$ *ограничен,*
(ii) $\ker s = \{\theta\}$, $\mathcal{R}(s)$ *замкнуто,*
(iii) $\mathcal{R}(1 - q_{11}) = K_1$,
(iv) $\|q_{11}\| < 1$,
(v) $1 - q_{11} \in \mathcal{I}nv(K_1)$,
(vi) $\| \operatorname{Rp} q_{22} - Q\| < 1$,
(vii) $\|(Q \vee P_1) \wedge P_2 - Q\| < 1$,
(viii) $(\operatorname{Rp} q_{22})^{\perp} - Q \in \mathcal{I}nv(H)$,
(ix) $(Q^{\perp} \wedge P_2) \vee P_1 - Q \in \mathcal{I}nv(H)$.

*Доказательство.* По теореме о замкнутом графике (i)⇔(ii). А (iii)⇔(v)⇔(iv), поскольку $0 \leqslant q_{11} \leqslant 1$. Равносильность (ii) и (iii) следует из теорем 4 и 9. В силу (i) следствия 3,

(iii) леммы 10 и теоремы 9 (iv)⇔(vi) и (v)⇔(viii). Наконец, из (i) следствия 2 (vi)⇔(vii) и (viii)⇔(ix). □

**Теорема 12** (критерий обратимости)**.** *Пусть $Q$ — график оператора $s \in \mathcal{CL}(K_1, K_2)$. Тогда равносильны условия*

(i) $s \in \mathcal{I}nv(K_1, K_2)$,
(ii) $\ker s = \{\theta\}, \quad \mathcal{R}(s) = K_1$,
(iii) $1 \notin \sigma_T(q_{11}), \quad 0 \notin \sigma(q_{22})$,
(iv) $\|P_2 - Q\| < 1$,
(v) $P_1 - Q \in \mathcal{I}nv(H)$.

*Доказательство.* По теореме о замкнутом графике (i)⇔(ii). По теоремам 4 и 10 (ii)⇔(iii). Наконец, из теорем 10 и 11 с учетом (ii) леммы 10 получаем (iv)⇔(ii)⇔(v). □

Далее получим характеризации таких важных подклассов ограниченных и всюду определенных операторов, как классы компактных, конечномерных и фредгольмовых операторов.

**Теорема 13** (критерий компактности)**.** *Пусть $Q$ — график оператора $s \in \mathcal{CL}(K_1, K_2)$. Тогда эквивалентны утверждения*

(i) $\widehat{s} \in \mathcal{C}(K_1, K_2)$,
(ii) $\operatorname{rp} q_{11} - q_{11} \in \mathcal{C}(K_1)$,
(iii) $q_{22} \in \mathcal{C}(K_2)$,
(iv) $\sigma_{\text{ess}}(q_{22}) = \{0\}$,
(v) $\widehat{s} \in \mathcal{B}(K_1, K_2), \quad q_{21} \in \mathcal{C}(K_1, K_2)$,
(vi) $\operatorname{Rp} q_{11} - Q \in \mathcal{C}(H)$,
(vii) $(Q \vee P_2) \wedge P_1 - Q \in \mathcal{C}(H)$.

*Доказательство.* Из (xiv) и (xv) предложения 2 (i)⇒(ii)⇒(iii), равносильность же (iii) и (iv) очевидна. По теореме 6 и лемме 7 (iv)⇒(v). В силу (xii) предложения 2 (v)⇒ $\Delta_{\widehat{s}} \in \mathcal{I}nv(K_1)$, $\widehat{s}\Delta_{\widehat{s}} \in \mathcal{C}(K_1, K_2)$ ⇒(i). Наконец, (ii), (iii)⇔(vi) вытекает из (i) леммы 10, а (vi)⇔(vii) — в силу (i) следствия 2. □

**Замечание 2.** В общем случае для графика $Q$ произвольного оператора $s \in \mathcal{CL}(K_1, K_2)$ требование $q_{21} \in \mathcal{C}(K_1, K_2)$ еще не влечет ограниченности $\widehat{s}$. Действительно, пусть $K \equiv K_1 = K_2$ сепарабельно и $\{f_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ — ортонормированный базис в $K$. Положим $p_i \equiv \langle \cdot, f_i \rangle f_i \in \mathcal{P}(K)$ $(i \in \mathbb{N})$ и определим $s \equiv \sum\limits_{i=1}^{\infty} i p_i \in \mathcal{DC}(K)$, $Q \equiv P_{\Gamma(s)}$. Тогда нетрудно видеть, что $q_{21} = s\Delta_s = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \Delta_i p_i \in \mathcal{C}(K)$, однако $\widehat{s} = s \notin \mathcal{B}(K)$.

**Теорема 14** (критерий конечномерности)**.** *Пусть $Q$ — график оператора $s \in \mathcal{CL}(K_1, K_2)$. Тогда равносильны утверждения*

(i) $\widehat{s} \in \mathcal{C}_O(K_1, K_2)$,
(ii) $\operatorname{rp} q_{11} - q_{11} \in \mathcal{C}_O(K_1)$,
(iii) $q_{22} \in \mathcal{C}_O(K_2)$,
(iv) $q_{21} \in \mathcal{C}_O(K_1, K_2)$,
(v) $\operatorname{Rp} q_{11} - Q \in \mathcal{C}_O(H)$,
(vi) $(Q \vee P_2) \wedge P_1 - Q \in \mathcal{C}_O(H)$.

*Доказательство.* В силу (viii) и (x) предложения 2 имеем

$$\text{(ii)} \Leftrightarrow \dim \mathcal{R}(\widehat{s}^*) < \infty \Leftrightarrow \text{(i)} \Leftrightarrow \dim \mathcal{R}(\widehat{s}) < \infty \Leftrightarrow \text{(iii)}.$$

Из (vi) предложения 2 (i)⇔(iv), из (i) леммы 10 (ii), (iii)⇔(v), а (v)⇔(vi) в силу (i) следствия 2. □

**Теорема 15** (критерий фредгольмовости)**.** *Пусть $Q$ — график оператора $s \in \mathcal{CL}(K_1, K_2)$. Тогда эквивалентны утверждения*

(i) $\widehat{s} \in \mathcal{F}(K_1, K_2)$,

(ii) $q_{21} \in \mathcal{F}(K_1, K_2)$.

*При этом* $\operatorname{ind}\widehat{s} = \operatorname{ind} q_{21}$*, где* ind *означает классический фредгольмов индекс соответствующего оператора.*

*Доказательство.* Утверждение теоремы следует из (vi), (vii) и (xii) предложения 2, с учетом того, что $\mathcal{R}(\widehat{s}\Delta_{\widehat{s}})$ замкнуто ⇔ $\widehat{s}$ замкнуто, $\widehat{s} \in \mathcal{B}(K_1, K_2)$. □

*Случай* $K \equiv K_1 = K_2$. Простой и удобный в использовании критерий присоединенности замкнутого оператора к алгебре фон Неймана дает

**Теорема 16.** *Пусть $Q$ — график оператора $s \in \mathcal{CL}(K)$, а $\mathcal{M}$ — алгебра фон Неймана, действующая в $K$. Тогда эквивалентны утверждения*

(i) $s\,\eta\,\mathcal{M}$,

(ii) $q_{11}, q_{21} \in \mathcal{M}$,

(iii) $Q \in \mathcal{M} \otimes M_2$.

Для доказательства данного утверждения нам понадобится

**Лемма 11.** *Пусть $s \in \mathcal{CL}(K)$ и $\mathcal{M}$ — алгебра фон Неймана, действующая в $K$. Тогда равносильны два утверждения*

(i) $s\,\eta\,\mathcal{M}$,

(ii) $\widehat{s}\,\eta\,\mathcal{M}$, $p_{\overline{\mathcal{D}(s)}} \in \mathcal{M}$.

*Доказательство.* Действительно,

$$\text{(i)} \Leftrightarrow us \subseteq su \quad (u \in \mathcal{M}'^u) \;\Leftrightarrow us \subseteq su,$$
$$K_s \text{ приводит } u \quad (u \in \mathcal{M}'^u) \Leftrightarrow u\widehat{s} \subseteq \widehat{s}u, \quad up_{\overline{\mathcal{D}(s)}} = p_{\overline{\mathcal{D}(s)}}u \quad (u \in \mathcal{M}'^u) \Leftrightarrow \text{(ii)}. \qquad \square$$

*Доказательство теоремы* 16. Очевидно, (i)⇒(ii). В силу же предложения 3 (ii)⇒(iii). Далее, из (xvi) и (iv) предложения 2 (iii) ⇒ $P_{\Gamma(\widehat{s})} \in \mathcal{M} \otimes M_2$, $p_{\overline{\mathcal{D}(s)}} \in \mathcal{M}$. Но тогда по лемме 5 $\widehat{s}\,\eta\,\mathcal{M}$. Для получения (i) теперь остается только применить лемму 11. □

Наконец, приведем характеризацию операторов, принадлежащих некоторому ∗-идеалу.

**Теорема 17.** *Пусть $Q$ — график оператора $s \in \mathcal{CL}(K)$, а $\mathcal{J}$ — ∗-идеал в $\mathcal{B}(K)$ такой, что $\mathcal{J} \subseteq C(K)$. Тогда эквивалентны следующие условия*:

(i) $\widehat{s} \in \mathcal{J}$;

(ii) $\sqrt{\operatorname{rp} q_{11} - q_{11}} \in \mathcal{J}$;

(iii) $\sqrt{q_{22}} \in \mathcal{J}$;

(iv) $\widehat{s} \in \mathcal{B}(K), q_{21} \in \mathcal{J}$;

(v) $\operatorname{Rp} q_{11} - Q \in \mathcal{J} \otimes M_2$;

(vi) $(Q \vee P_2) \wedge P_1 - Q \in \mathcal{J} \otimes M_2$.

*Доказательство.* В силу (xiv) и (xv) предложения 2 имеем

$$\text{(i)} \Rightarrow \widehat{s}\Delta_{\widehat{s}}^{1/2} \in \mathcal{J} \Rightarrow \text{(ii)} \Rightarrow \text{(iii)}.$$

Пусть теперь выполнено (iii). Тогда по теореме 13 $\widehat{s} \in \mathcal{B}(K)$, а значит, $\Delta_{\widehat{s}^*}^{1/2} \in \mathcal{I}nv(K)$. Поэтому

$$(\mathrm{iii}) \Rightarrow |\widehat{s}^*|\Delta_{\widehat{s}^*}^{1/2} \in \mathcal{J} \Rightarrow |\widehat{s}^*| \in \mathcal{J} \Rightarrow (\mathrm{i}).$$

Из (xii) предложения 2 имеем (i)$\Leftrightarrow$(iv), так как ограниченность $s$ равносильна обратимости $\Delta_{\widehat{s}}$. Наконец, (ii), (iii)$\Leftrightarrow$(v) вытекает из (i) леммы 10, а (v)$\Leftrightarrow$(vi) — из (i) следствия 2. $\square$

**Замечание 3.** Если $K$ сепарабельно, то в условиях предыдущей теоремы вложение $\mathcal{J} \subseteq C(K)$ выполняется автоматически ([16], теорема 1.4).

**Следствие 6.** Пусть $Q$ — график оператора $s \in \mathcal{CL}(K)$, а $\mathcal{J}_1$ и $\mathcal{J}_2$ — классы операторов со следом и операторов Гильберта–Шмидта соответственно ([4], сс. 230, 233). Тогда эквивалентны условия

(i) $\widehat{s} \in \mathcal{J}_2$,
(ii) $\mathrm{rp}\, q_{11} - q_{11} \in \mathcal{J}_1$,
(iii) $q_{22} \in \mathcal{J}_1$.

*Доказательство.* Утверждение следует из того, что $a \in \mathcal{J}_1 \Leftrightarrow \sqrt{a} \in \mathcal{J}_2$ для всех положительных операторов $a \in \mathcal{B}(K)$. $\square$

## 5. Операции над графиками

Пусть $s, t \in \mathcal{CL}(K_1, K_2)$. Обозначим через $s \vee t$ наименьший замкнутый оператор (если существует), который является расширением $s$ и $t$. Для $Q \in \mathcal{P}(H)$ положим $Q_\Gamma \equiv Q \ominus (Q \wedge P_2)$.

Ниже приведен простой критерий существования такого наименьшего замкнутого оператора.

**Предложение 4.** *Пусть $Q_i$ — графики операторов $s_i \in \mathcal{CL}(K_1, K_2)$, $i = 1, 2$. Тогда*

$$\exists\, s_1 \vee s_2 \Leftrightarrow (Q_1 \vee Q_2) \wedge P_2 = 0.$$

*При этом $Q_1 \vee Q_2 = P_{\Gamma(s_1 \vee s_2)}$.*

*Доказательство.* Утверждение следует из теоремы 3. $\square$

Основными результатами данной статьи и, в частности, данного раздела, являются следующие две теоремы.

**Теорема 18.** *Пусть $Q_i$ — графики операторов $s_i \in \mathcal{CL}(K_1, K_2)$, $i = 1, 2$, причем $Q_1$ и $Q_2$ коммутируют, и оператор $s \in \mathcal{CL}(K_1, K_2)$ таков, что $(Q_1 \vee Q_2)_\Gamma = P_{\Gamma(s)}$, тогда*

(i) $\widehat{s}_1 \in \mathcal{B}(K_1, K_2)$, $\widehat{s}_2 \in C(K_1, K_2) \Rightarrow \widehat{s} \in \mathcal{B}(K_1, K_2)$,
(ii) $\widehat{s}_i \in \mathcal{C}(K_1, K_2)$, $i = 1, 2 \Rightarrow \widehat{s} \in \mathcal{C}(K_1, K_2)$,
(iii) $\widehat{s}_1 \in \mathcal{F}(K_1, K_2)$, $\widehat{s}_2 \in C(K_1, K_2) \Rightarrow \widehat{s} \in \mathcal{F}(K_1, K_2)$, $\mathrm{ind}\, \widehat{s} = \mathrm{ind}\, \widehat{s}_1$,
(iv) $\widehat{s}_i \in \mathcal{C}_O(K_1, K_2)$, $i = 1, 2 \Rightarrow \widehat{s} \in \mathcal{C}_O(K_1, K_2)$.

**Теорема 19.** *Пусть $Q_i$ — графики операторов $s_i \in \mathcal{CL}(K)$, $i = 1, 2$, причем $Q_1$ и $Q_2$ коммутируют. И пусть оператор $s \in \mathcal{CL}(K)$ таков, что $(Q_1 \vee Q_2)_\Gamma = P_{\Gamma(s)}$, $\mathcal{M}$ — алгебра фон Неймана, действующая в $K$, а $\mathcal{J}$ — $*$-идеал в $\mathcal{B}(K)$ такой, что $\mathcal{J} \subseteq C(K)$. Тогда*

(i) $s_i\, \eta\, \mathcal{M}$, $i = 1, 2 \Rightarrow s\, \eta\, \mathcal{M}$,
(ii) $\widehat{s}_i \in \mathcal{J}$, $i = 1, 2 \Rightarrow \widehat{s} \in \mathcal{J}$.

Здесь устанавливается тесная связь операции взятия верхней грани, заданной на замкнутых операторах с этой же операцией, но заданной на их графиках. Эта связь обладает интересной особенностью, о чем будет упомянуто в замечании 4. Благодаря основательному исследованию свойств графиков, проведенному в предыдущем разделе, доказательство этих результатов не составит большого труда. Но для этого нам понадобится одна вспомогательная

**Лемма 12.** *Пусть* $Q_i \in \mathcal{P}(H)$, $Q_iQ_j = Q_jQ_i$, $i, j = 1, 2$, $i \neq j$, $Q \equiv Q_1 \vee Q_2$. *Тогда*

(i) $Q_1 \vee Q_2 = Q_1 + Q_2 - Q_1Q_2$,

(ii) $(q_2)_{22} \in \mathcal{C}(K_2) \Rightarrow q_{21} - (q_1)_{21} \in \mathcal{C}(K_1, K_2), \quad q_{22} - (q_1)_{22} \in \mathcal{C}(K_2)$.

*Доказательство.* Утверждение (i) — это хорошо известный факт ([17], предложение 2.5.3). А утверждение (ii) следует из (i), поскольку $(q_2)_{22} \in \mathcal{C}(K_2) \Rightarrow (q_2)_{21} \in \mathcal{C}(K_1, K_2)$ по лемме 7. □

*Доказательство теоремы* 18. Утверждение (iv) следует из (i) леммы 18 и теоремы 14. Пусть теперь выполнена левая часть одного из утверждений (i), (ii) или (iii). Обозначим $Q \equiv Q_1 \vee Q_2$, $R \equiv P_{\Gamma(s)}$. По теореме 13 $(q_2)_{22} \in \mathcal{C}(K_2)$. Поэтому в силу (ii) леммы 12 $r_{21} = q_{21} = (q_1)_{21} + a$, где $a \in \mathcal{C}(K_1, K_2)$. Отсюда и из теоремы 15 получаем (iii). С другой стороны, из (ii) леммы 12 $q_{22} = (q_1)_{22} + b$, где $b \in \mathcal{C}(K_2)$. Откуда $p_{\ker(1-q_{22})} \in \mathcal{C}_O(K_2)$, поскольку из теоремы 6 имеем $1 - (q_1)_{22} \in \mathcal{I}nv(K_2)$. Но тогда в силу (i) леммы 9

$$\sigma_{\text{ess}}(r_{22}) = \sigma_{\text{ess}}(q_{22} - p_{\ker(1-q_{22})}) = \sigma_{\text{ess}}((q_1)_{22} + b) = \sigma_{\text{ess}}((q_1)_{22}).$$

Теперь для установления (i) остается снова применить теорему 6, а для установления (ii) — теорему 13. □

**Замечание 4.** Если в первом утверждении предыдущей теоремы ослабить условие, налагаемое на оператор $\widehat{s}_2$, и считать, что и $\widehat{s}_2 \in \mathcal{B}(K_1, K_2)$, то $\widehat{s}$ может оказаться неограниченным, даже если $Q_1$ и $Q_2$ ортогональны. Действительно, пусть $K \equiv K_1 = K_2$ и $p_1, p_2 \in \mathcal{P}(K)$ таковы, что $\mathcal{R}(p_1 + p_2)$ незамкнуто. Пусть $s_1 \equiv 1|_{p_1K}$, $s_2 \equiv -1|_{p_2K}$. Рассмотрим их графики $Q_1 \equiv P_{\Gamma(s_1)} = \begin{pmatrix} p_1/2 & p_1/2 \\ p_1/2 & p_1/2 \end{pmatrix}$ и $Q_2 \equiv P_{\Gamma(s_2)} = \begin{pmatrix} p_2/2 & -p_2/2 \\ -p_2/2 & p_2/2 \end{pmatrix}$. Очевидно, они ортогональны. Пусть $R \equiv (Q_1 \vee Q_2)_\Gamma$. Тогда $\mathcal{R}(r_{11}) = \mathcal{R}(p_1 + p_2)$ незамкнуто по построению. Следовательно, в силу теоремы 6 $R$ не является графиком ограниченного оператора.

*Случай* $K \equiv K_1 = K_2$.

*Доказательство теоремы* 19. В силу (i) леммы 12 утверждение (i) немедленно следует из теоремы 16, а (ii) — из теоремы 17 и (ii) теоремы 18. □

Напоследок приведем не менее интересный результат, касающийся операции вычитания графиков.

**Теорема 20.** *Пусть* $Q_i$ — *графики операторов* $s_i \in \mathcal{B}(K)$, $i = 1, 2$. *Тогда эквивалентны условия*

(i) $s_1 - s_2 \in \mathcal{C}(K)$,

(ii) $(q_1)_{11} - (q_2)_{11}, \quad (q_1)_{21} - (q_2)_{21} \in \mathcal{C}(K)$,

(iii) $Q_1 - Q_2 \in \mathcal{C}(H)$,

(iv) $U_{s_1} - U_{s_2} \in \mathcal{C}(H)$.

*Доказательство.* Пусть $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}(K)/C(K)$ — алгебра Калкина ([10], с. 46) и $\pi : \mathcal{B}(K) \to \mathcal{A}$ — каноническая проекция. Тогда

$$\text{(ii)} \Leftrightarrow \pi(\Delta_{s_1}) = \pi(\Delta_{s_2}), \quad \pi(s_1\Delta_{s_1}) = \pi(s_2\Delta_{s_2}) \Leftrightarrow$$
$$\Delta_{\pi(s_1)} = \Delta_{\pi(s_2)}, \quad \pi(s_1)\Delta_{\pi(s_1)} = \pi(s_2)\Delta_{\pi(s_2)} \Leftrightarrow \pi(s_1) = \pi(s_2) \Leftrightarrow \text{(i)},$$

поскольку $\pi(\Delta_s)$ обратим для всех $s \in \mathcal{B}(K)$. Аналогично показывается, что (iv)⇔(i). Импликации же (iv)⇒(iii)⇒(ii) очевидны. □

## Литература


[1] Von Neumann J. *Zur Algebra der Funktionaloperationen und Theorie der normalen Operatoren* // Math. Ann. – 1929. – Bd. 102. – S. 370–427.
[2] Stone M.H. *On unbounded operators in Hilbert space* // J. Ind. Math. Soc. – 1951. – V. 15. – P. 155–192.
[3] Като Т. *Теория возмущений линейных операторов.* – М.: Мир, 1972. – 739 с.
[4] Рид М., Саймон Б. *Методы современной математической физики.* I. *Функциональный анализ.* – М.: Мир, 1977. – 360 с.
[5] Dye H.A. *On the geometry of projections in certain operator algebras* // Ann. of Math. – 1955. – V. 61. – № 1. – P. 73–89.
[6] Lugovaya G.D., Sherstnev A.N. *On the extension problem for unbounded measures on projections* // Math. Slovaca. – 2000. – V. 50. – № 4. – P. 473–481.
[7] Nassbaum A.E. *Reduction theory for unbounded closed operators in Hilbert space* // Duke Math. J. – 1964. – V. 31. – № 1. – P. 33–44.
[8] Lennon M.J.J. *On sums and products of unbounded operators in Hilbert space* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1974. – V. 198. – P. 273–285.
[9] Мануйлов В.М. *Инвариант пары почти коммутирующих неограниченных операторов* // Функц. анализ и его прилож. – 1998. – Т. 32. – № 4. – С. 88–91.
[10] Мёрфи Дж. *$C^*$-алгебры и теория операторов.* – М.: Изд-во “Факториал”, 1997. – 336 с.
[11] Kaufman W.E. *Representing a closed operator as a quotient of continuous operators* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1978. – V. 72. – № 3. – P. 531–534.
[12] Fillmore P.A., Williams J.P. *On operator ranges* // Advance in Math. – 1971. – V. 7. – P. 254–281.
[13] Hassi S., Sebestyén Z., De Snoo H.S.V., Szafraniec F.H. *A canonical decomposition for linear operators and linear relations* // Acta Math. Hungar. – 2007. – V. 115. – № 4. – P. 281–307.
[14] Buckholtz D. *Inverting the difference of Hilbert space projections* // Amer. Math. Monthly. – 1997. – V. 104. – № 1. – P. 60–61.
[15] Chung K.Y. *Subspaces and graphs* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1993. – V. 119. – № 1. – P. 141–146.
[16] Calkin J.W. *Two-sided ideals and congruences in ring of bounded operators in Hilbert space* // Ann. of Math. – 1941. – V. 42. – № 4. – P. 839–873.
[17] Kadison R.V., Ringrose J.R. *Fundamentals of the theory of operator algebras.* V. I. – London: Academic Press, 1983. – 398 p.



*М.Р. Тимиршин*

*аспирант, кафедра математического анализа,*
*Казанский государственный университет,*
*420008, г. Казань ул. Кремлевская, д. 18,*

`e-mail:` timirshinm@yandex.ru

*M.R. Timirshin*

*Postgraduate, Chair of Mathematical Analysis,*
*Kazan State University,*
*18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,*

`e-mail:` timirshinm@yandex.ru