ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2001 МАТЕМАТИКА № 12 (475)

УДК 517.977

А.С. БУЛДАЕВ

НЕЛОКАЛЬНОЕ УЛУЧШЕНИЕ УПРАВЛЕНИЙ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ, КВАДРАТИЧНЫХ ПО СОСТОЯНИЮ

1. Введение

Рассматривается задача оптимального управления

$$\Phi(u) = \varphi(x(t_1)) + \int_T F(x(t), u(t), t)dt \to \min_{u\in V}, \tag{1}$$

$$\dot{x} = f(x, u, t), \quad x(t_0) = x^0, \quad u(t) \in U, \quad t \in T = [t_0, t_1], \tag{2}$$

в которой $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ — вектор состояния, $u(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t))$ — вектор управления. Допустимые управления принадлежат множеству V кусочно-непрерывных функций со значениями в компактном множестве $U \subset R^m$. Функции $f(x, u, t)$, $F(x, u, t)$ являются квадратичными по x с коэффициентами, непрерывно зависящими от u, t, на множестве $R^n \times U \times T$. Функция $\varphi(x)$ квадратична на R^n.

В работе предлагаются методы построения нелокальных улучшений управления, основанные на точных (без остаточных членов) формулах приращения функционала в рассматриваемом классе задач. Улучшение управлений по точным формулам приращения функционала позволяет обойтись без процедуры традиционного параметрического поиска улучшающего приближения в локальной окрестности текущего управления.

Описываемый подход построения нелокальных улучшений управления обобщает методы нелокального улучшения в системах, линейных по состоянию [1].

2. Формулы приращения функционала

Пусть $u, v \in V$ — пара управлений с соответствующими фазовыми траекториями $x(t, u)$, $x(t, v)$ системы (2), $\Delta x(t) = x(t, v) - x(t, u)$ — фазовое приращение, $\Delta_v \Phi(u) = \Phi(v) - \Phi(u)$ — приращение функционала.

Образуем функцию Понтрягина $H(\psi, x, u, t) = \langle \psi, f(x, u, t)\rangle - F(x, u, t)$ и обозначим $\Delta_v H(\psi, x, u, t) = H(\psi, x, v, t) - H(\psi, x, u, t)$, а через H_x, φ_x, H_{xx}, φ_{xx} — соответственно первые и вторые производные функций H, φ по x.

Рассмотрим векторную стандартную сопряженную систему

$$\dot{\psi} = -H_x(\psi, x, u, t) \tag{3}$$

и введем векторную модифицированную сопряженную систему

$$\dot{p} = -H_x(p, x, u, t) - \frac{1}{2} H_{xx}(p, x, u, t) y. \tag{4}$$

Пусть $\psi(t, u)$, $t \in T$, — решение системы (3) при $u = u(t)$, $x = x(t, u)$, $\psi(t_1, u) = -\varphi_x(x(t_1, u))$; $p(t, u, v)$, $t \in T$, — решение системы (4) при $u = u(t)$, $x = x(t, u)$, $y = \Delta x(t)$, $p(t_1, u, v) = -\varphi_x(x(t_1, u)) - \frac{1}{2}\varphi_{xx}(x(t_1, u))\Delta x(t_1)$; $p(t, v, u)$, $t \in T$, — решение системы (4) при $u = v(t)$, $x = x(t, u)$, $y = \Delta x(t)$, $p(t_1, v, u) = -\varphi_x(x(t_1, u)) - \frac{1}{2}\varphi_{xx}(x(t_1, u))\Delta x(t_1)$. Очевидно, $p(t, u, u) = \psi(t, u)$, $t \in T$.

Введем отображение $u^*(\psi,x,t)$ с помощью экстремального соотношения

$$u^*(\psi,x,t) = \arg\max_{u\in U} H(\psi,x,u,t), \quad \psi\in R^n, \quad x\in R^n, \quad t\in T. \tag{5}$$

Предположим, что формула (5) определяет функцию $u^*(\psi,x,t)$, которая является кусочно-непрерывной по совокупности своих аргументов на $R^n\times R^n\times T$, т. е. имеет конечное число поверхностей разрыва. Каждая поверхность разрыва задается уравнением вида $g(\psi,x,t)=0$, где $g(\psi,x,t)$ дифференцируема по совокупности аргументов ψ, x и непрерывна по t на $R^n\times R^n\times T$. На поверхностях разрыва и только на них вектор-функция $u^*(\psi,x,t)$ определяется соотношением (5) неоднозначно. Предположим, что в рассматриваемом классе задач операция на максимум (5) допускает аналитическое решение, т. е. экстремальное управление $u^*(\psi,x,t)$ представляется в явном виде по соответствующей формуле.

С помощью отображения (5) принцип максимума для управления $u\in V$ записывается в форме

$$u(t) = u^*(\psi(t,u),x(t,u),t), \quad t\in T. \tag{6}$$

Здесь и далее равенства на множестве T понимаются выполняющимися почти всюду.

Имеют место первая и вторая точные формулы приращения функционала

$$\Delta_v\Phi(u) = -\int_T \Delta_{v(t)}H(p(t,u,v),x(t,v),u(t),t)dt, \tag{7}$$

$$\Delta_v\Phi(u) = -\int_T \Delta_{v(t)}H(p(t,v,u),x(t,u),u(t),t)dt. \tag{8}$$

При выводе формул приращения будем использовать следующие обозначения приращений произвольной функции q конечного числа аргументов: $\Delta_z q(x,u,\dots) = q(z,u,\dots) - q(x,u,\dots)$, $\Delta_v q(x,u,\dots) = q(x,v,\dots) - q(x,u,\dots)$, $\Delta_{z,v}q(x,u,\dots) = q(z,v,\dots) - q(x,u,\dots)$. Здесь многоточие обозначает остальные аргументы функции q.

Для квадратичной по x функции $H(p,x,u,t)$ имеют место "двойственные" представления приращения

$$\begin{aligned}\Delta_{x+\Delta x,\, u+\Delta u}H(p,x,u,t) &= \Delta_{u+\Delta u}H(p,x+\Delta x,u,t) + \langle H_x(p,x,u,t),\Delta x\rangle + \\ &\quad + \frac{1}{2}\langle H_{xx}(p,x,u,t)\Delta x,\Delta x\rangle,\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}\Delta_{x+\Delta x,\, u+\Delta u}H(p,x,u,t) &= \Delta_{u+\Delta u}H(p,x,u,t) + \langle H_x(p,x,u+\Delta u,t),\Delta x\rangle + \\ &\quad + \frac{1}{2}\langle H_{xx}(p,x,u+\Delta u,t)\Delta x,\Delta x\rangle.\end{aligned} \tag{10}$$

Приращение функционала на управлениях u, v имеет вид

$$\Delta_v\Phi(u) = \varphi(x(t_1,v)) - \varphi(x(t_1,u)) + \int_T \Delta_{x(t,v),\, v(t)}F(x(t,u),u(t),t)dt.$$

Приращение $\Delta\varphi = \varphi(x(t_1,v)) - \varphi(x(t_1,u))$ можно записать как

$$\Delta\varphi = \langle\varphi_x(x(t_1,u)),\Delta x(t_1)\rangle + \frac{1}{2}\langle\varphi_{xx}(x(t_1,u))\Delta x(t_1),\Delta x(t_1)\rangle.$$

Пусть $p(t)$ — произвольная дифференцируемая векторная функция с условием $p(t_1) = -\varphi_x(x(t_1,u)) - \frac{1}{2}\varphi_{xx}(x(t_1,u))\Delta x(t_1)$. Тогда приращение функционала можно представить как

$$\begin{aligned}\Delta_v\Phi(u) &= -\int_T\langle\dot p(t),\Delta x(t)\rangle dt - \int_T\langle p(t),\Delta\dot x(t)\rangle dt + \int_T \Delta_{x(t,v),\, v(t)}F(x(t,u),u(t),t)dt = \\ &= -\int_T\langle\dot p(t),\Delta x(t)\rangle dt - \int_T \Delta_{x(t,v),\, v(t)}H(p(t),x(t,u),u(t),t)dt.\end{aligned}$$

Используя представления (9), (10), соответственно получаем

$$\Delta_v \Phi(u) = -\int_T \langle \dot{p}(t), \Delta x(t) \rangle dt - \int_T \Big(\Delta_{v(t)} H(p(t), x(t,v), u(t), t) +$$

$$+\langle H_x(p(t), x(t,u), u(t), t), \Delta x(t) \rangle + \frac{1}{2} \langle H_{xx}(p(t), x(t,u), u(t), t) \Delta x(t), \Delta x(t) \rangle \Big) dt, \quad (11)$$

$$\Delta_v \Phi(u) = -\int_T \langle \dot{p}(t), \Delta x(t) \rangle dt - \int_T \Big(\Delta_{v(t)} H(p(t), x(t,u), u(t), t) +$$

$$+\langle H_x(p(t), x(t,u), v(t), t), \Delta x(t) \rangle + \frac{1}{2} \langle H_{xx}(p(t), x(t,u), v(t), t) \Delta x(t), \Delta x(t) \rangle \Big) dt. \quad (12)$$

Для $p(t) = p(t,u,v)$ и $p(t) = p(t,v,u)$, $t \in T$, из (11) и (12) соответственно следуют формулы приращения функционала (7), (8).

Точные формулы (7), (8) позволяют сформулировать достаточные условия оптимальности управления $u \in V$ в задаче (1), (2) аналогично [1].

Рассмотрим первую формулу (7). Для оптимальности $u \in V$ достаточно, чтобы

$$\Delta_{v(t)} H(p(t,u,v), x(t,v), u(t), t) \le 0, \quad v \in V, \quad t \in T.$$

Для выполнения последнего неравенства достаточно требовать, чтобы $\Delta_v H(p, x, u(t), t) \le 0$, $v \in U$, $p \in R^n$, $x \in R^n$, $t \in T$. Последнее условие эквивалентно соотношению $u(t) = u^*(p, x, t)$, $p \in R^n$, $x \in R^n$, $t \in T$. Учитывая вид формулы (7), множество возможных пар значений (x, p) сузим до множества достижимости пары фазовой и сопряженной систем в момент $t \in T$

$$D_{x,p}(t,u) = \{(x(t,v), p(t,u,v)),\ v \in V\}.$$

Таким образом, для оптимальности управления $u \in V$ в задаче (1), (2) достаточно, чтобы

$$u(t) = u^*(p, x, t), \quad (x,p) \in D_{x,p}(t,u), \quad t \in T. \quad (13)$$

Рассмотрим вторую формулу (8). Пусть $D_p(t,u) = \{p(t,v,u),\ v \in V\}$ — множество достижимости векторной модифицированной сопряженной системы в момент $t \in T$. Тогда для оптимальности управления $u \in V$ в задаче (1), (2) достаточно, чтобы

$$u(t) = u^*(p, x(t,u), t), \quad p \in D_p(t,u), \quad t \in T. \quad (14)$$

Очевидно, что в достаточных условиях (13), (14) могут фигурировать любые оценки по включению для соответствующих множеств достижимости. Принцип максимума (6) получается из достаточных условий (13), (14) при $x = x(t,u)$, $p = p(t,u,u)$.

3. Процедуры улучшения

Поставим задачу об улучшении текущего управления $u \in V$: найти управление $v \in V$ с условием $\Delta_v \Phi(u) \le 0$. Формулы (7), (8) открывают возможность решения задачи улучшения управления через операцию (5) на максимум функции Понтрягина.

Первая процедура улучшения. 1. Найдем решение $(x(t), p(t))$, $t \in T$, краевой задачи

$$\dot{x} = f(x, u^*(p,x,t), t), \quad x(t_0) = x^0, \quad (15)$$

$$\dot{p} = -H_x(p, x(t,u), u(t), t) - \frac{1}{2} H_{xx}(p, x(t,u), u(t), t)(x - x(t,u)),$$

$$p(t_1) = -\varphi_x(x(t_1,u)) - \frac{1}{2} \varphi_{xx}(x(t_1,u))(x(t_1) - x(t_1,u)). \quad (16)$$

2. Сформируем управление $v(t) = u^*(p(t), x(t), t)$, $t \in T$.

Проведем обсуждение процедуры. В целях корректности предположим, что решение краевой задачи (15),(16) (возможно не единственное) существует на T, причем получаемое управление

$v(t)$ является кусочно-непрерывным. Тогда пара $(v(t), x(t))$ является допустимой в исходной задаче (1), (2).

Понятно, что $x(t) = x(t, v)$, $p(t) = p(t, u, v)$, $t \in V$, причем

$$v(t) = u^*(p(t, u, v), x(t, v), t), \quad t \in T. \tag{17}$$

Отсюда в силу определения отображения (5) получаем $\Delta_{v(t)} H(p(t, u, v), x(t, v), u(t), t) \geq 0$, $t \in T$. Тогда из формулы (7) следует, что $\Delta_v \Phi(u) \leq 0$.

Рассмотрим множество управлений на выходе первой процедуры улучшения $V_1(u) = \{v \in V : v(t) = u^*(p(t, u, v), x(t, v), t),\ t \in T\}$. Если $u \in V_1(u)$, то получаем $u(t) = u^*(p(t, u, u), x(t, u), t) = u^*(\psi(t, u), x(t, u), t)$, $t \in T$, т. е. управление u удовлетворяет принципу максимума.

Обратно, если управление $u \in V$ удовлетворяет принципу максимума, то оно определяется условием (17) при $v = u$. Следовательно, $u \in V_1(u)$.

Таким образом, получаем следующее утверждение.

Теорема. *Управление $u \in V$ удовлетворяет принципу максимума тогда и только тогда, когда $u \in V_1(u)$.*

Следствие 1. Если краевая задача улучшения (15), (16) не имеет решения, то текущее управление $u \in V$ не удовлетворяет принципу максимума.

Укажем условия, при которых имеет место строгое улучшение $\Phi(v) < \Phi(u)$. Для этого ограничимся случаем скалярного управления ($m = 1$) с областью значений $U = [u^-, u^+]$ (двусторонние ограничения) в подклассе линейных по управлению задач (1), (2)

$$\Phi(u) = \varphi(x(t_1)) + \int_T (F_0(x, t) + F_u(x, t)u)dt \to \min_{u \in V}, \tag{18}$$

$$\dot{x} = f_0(x, t) + f_u(x, t)u, \quad x(t_0) = x^0, \quad u(t) \in U, \quad t \in T. \tag{19}$$

В задаче (18), (19) функция Понтрягина имеет следующую структуру по управлению $H(\psi, x, u, t) = H_0(\psi, x, t) + H_u(\psi, x, t)u$.

Введем функцию $g(\psi, x, t) = H_u(\psi, x, t)$ переключения управления. Тогда отображение (5) представляется в форме

$$u^*(\psi, x, t) = \begin{cases} u^-, & g(\psi, x, t) < 0; \\ u^+, & g(\psi, x, t) > 0; \\ v \in U, & g(\psi, x, t) = 0. \end{cases}$$

Определение. Решение $(x(t, v), p(t, u, v))$, $t \in T$, краевой задачи (15), (16) называется особым на множестве $T_0 \subset T$, $\operatorname{mes} T_0 > 0$, если $g(p(t, u, v), x(t, v), t) = 0$, $t \in T_0$.

Для поиска управления $v(t) = u^*(p(t, u, v), x(t, v), t)$, порождающего особый режим на $T_0 \subset T$, $\operatorname{mes} T_0 > 0$, необходимо продифференцировать тождество $g(p(t, u, v), x(t, v), t) = 0$ по времени (возможно не один раз) с учетом систем (15), (16) и решить полученное уравнение относительно v с последующей проверкой на выполнение ограничения $v \in [u^-, u^+]$.

Образуем множества

$$T_1 = \{t \in T : g(p(t, u, v), x(t, v), t) \neq 0\}, \quad T_2 = \{t \in T : u(t) \neq v(t)\}, \quad T_{u,v} = T_1 \cap T_2.$$

Приращение функционала имеет вид

$$\Delta_v \Phi(u) = -\int_T g(p(t, u, v), x(t, v), t)(v(t) - u(t))dt, \tag{20}$$

причем подинтегральная функция неотрицательна на T. Из (20) следует, что неравенство $\operatorname{mes} T_{u,v} > 0$ является условием строгого улучшения в задаче (18), (19).

Таким образом, строгое улучшение гарантируется (в том числе и для управления $u \in V$, удовлетворяющего принципу максимума), если решение краевой задачи $(x(t, v), p(t, u, v))$, $t \in T$, имеет неособый участок, на котором управления u, v не совпадают.

Следствие 2. Если решение $(x(t,v), p(t,u,v))$ не является особым в пределах T ($\operatorname{mes} T_1 = \operatorname{mes} T$), то для управления, не удовлетворяющего принципу максимума ($u \notin V_1(u)$), строгое улучшение гарантируется.

Из формулы (20) получаем

Условие отсутствия улучшения в задаче (18), (19): если $\operatorname{mes} T_{u,v} = 0$, то $\Delta_v \Phi(u) = 0$.

Следствие 3. Если решение $(x(t,v), p(t,u,v))$ является особым на T ($\operatorname{mes} T_1 = 0$), то улучшение отсутствует ($\Delta_v \Phi(u) = 0$).

Перейдем к рассмотрению второй формулы (8) приращения функционала с позиций улучшения управления $u \in V$.

Вторая процедура улучшения. 1. Сформируем экстремальное управление $v^*(p,t) = u^*(p, x(t,u), t)$.

2. Найдем решение $(x(t), p(t))$, $t \in T$, краевой задачи

$$\dot{x} = f(x, v^*(p,t), t), \quad x(t_0) = x^0, \tag{21}$$

$$\dot{p} = -H_x(p, x(t,u), v^*(p,t), t) - \frac{1}{2} H_{xx}(p, x(t,u), v^*(p,t), t)(x - x(t,u)),$$
$$p(t_1) = -\varphi_x(x(t_1,u)) - \frac{1}{2}\varphi_{xx}(x(t_1,u))(x(t_1) - x(t_1,u)). \tag{22}$$

3. Сформируем управление $v(t) = v^*(p(t), t)$, $t \in T$.

Обоснуем свойство улучшения. Поскольку $x(t) = x(t,v)$, $p(t) = p(t,v,u)$, $t \in T$, то $v(t) = u^*(p(t,v,u), x(t,u), t)$, $t \in T$. Тогда в силу определения отображения (5) получаем

$$\Delta_{v(t)} H(p(t,v,u), x(t,u), u(t), t) \geq 0, \quad t \in T.$$

Отсюда и из (8) следует, что $\Delta_v \Phi(u) \leq 0$.

Введем множество управлений $V_2(u) = \{v \in V : v(t) = u^*(p(t,v,u), x(t,u), t),\ t \in T\}$ на выходе второй процедуры улучшения.

Проводя анализ возможностей второй процедуры улучшения, нетрудно получить утверждения, аналогичные первой процедуре.

Принцип максимума характеризуется включением $u \in V_2(u)$.

Для конкретизации условия строгого улучшения скалярного управления в задаче (18), (19) функция переключения образуется в виде $g_1(p,t) = g(p, x(t,u), t)$. Отображение (5) приобретает форму

$$u^*(p,x,t) = \begin{cases} u^-, & g_1(p,t) < 0; \\ u^+, & g_1(p,t) > 0; \\ v \in U, & g_1(p,t) = 0. \end{cases}$$

Особый режим определяется тождеством $g_1(p(t,v,u), t) = 0$ на решении $(x(t,v), p(t,v,u))$, $t \in T$, краевой задачи (21), (22). Вторая формула (8) приращения функционала в задаче (18), (19) приобретает вид $\Delta_v \Phi(u) = -\int\limits_T g_1(p(t,v,u), t)(v(t) - u(t))dt$. Условие строгого улучшения сохраняет аналогичную для первой процедуры формулировку, где $T_1 = \{t \in T : g_1(p(t,v,u), t) \neq 0\}$.

Предложенные процедуры улучшения указывают на принципиальную возможность осуществления нелокального улучшения управления в рассматриваемом классе задач. Трудоемкость построения улучшающего управления определяется трудоемкостью решения возникающих краевых задач улучшения. Отметим, что улучшения носят нелокальный характер, т. к. в процедурах отсутствует малый параметр, гарантирующий близость управлений u, v.

Выделим особенности краевых задач улучшения, упрощающие их по сравнению с краевой задачей принципа максимума, в которой правые части уравнений для фазовой и сопряженной переменных в общем случае являются разрывными функциями по этим переменным.

1. В краевой задаче (15), (16) уравнение для сопряженной переменной p является линейным по фазовой переменной x и линейным по p.

2. В краевой задаче (21), (22) уравнение для фазовой переменной x является гладким по x. Уравнение для сопряженной переменной p линейно по переменной x.

В случае линейности по состоянию x функций $f(x,u,t)$, $F(x,u,t)$, $\varphi(x)$ векторная модифицированная сопряженная система не содержит фазового приращения и совпадает со стандартной. Следовательно, сопряженная система в краевых задачах улучшения (15), (16) и (21), (22) интегрируется независимо от фазовой. Таким образом, в линейном случае трудоемкость реализации первой и второй процедур определяется двумя задачами Коши (для сопряженной и фазовой систем). При этом рассматриваемый подход становится эквивалентным нелокальным процедурам улучшения для линейных по состоянию систем [1].

Пусть $f(x,u,t)$ линейна по x, функции $F(x,u,t)$, $\varphi(x)$ квадратичны по x (линейно-квадратичная задача). Подставим в представление (11) для приращения функционала разложение $p(t)=\psi(t,u)+\frac{1}{2}\Psi(t,u)(x(t,v)-x(t,u))$, $t\in T$, где матричная функция $\Psi(t,u)$, $t\in T$, является решением стандартной матричной сопряженной системы

$$\dot\Psi=-f_x^T(x(t,u),u,t)\Psi-\Psi f_x(x(t,u),u,t)+F_{xx}(x(t,u),u,t),\quad \Psi(t_1,u)=-\varphi_{xx}(x(t_1,u)).$$

Осуществляя несложные выкладки, из (11) вместо формулы (7) получим известную ([1], с. 26) конечную формулу приращения функционала без остаточных членов

$$\Delta_v\Phi(u)=-\int_T\Delta_{v(t)}H(\psi(t,u)+\Psi(t,u)(x(t,v)-x(t,u)),x(t,v),u(t),t)dt.$$

Эта формула позволяет заменить решение краевой задачи (15), (16) в первой процедуре улучшения решением двух векторных задач Коши $(\psi(t,u),x(t,v))$ и одной матричной задачи Коши $(\Psi(t,u))$ [1].

Аналогично, подставляя в представление (12) разложение $p(t)=\psi(t,v)+\frac{1}{2}\Psi(t,v)(x(t,u)-x(t,v))$, $t\in T$, можно получить вместо (8) известную ([1], с. 27) точную формулу приращения функционала

$$\Delta_v\Phi(u)=-\int_T\Delta_{v(t)}H(\psi(t,v)+\Psi(t,v)(x(t,u)-x(t,v)),x(t,u),u(t),t)dt.$$

Данная формула позволяет улучшить функционал, решив вместо краевой задачи (21), (22) одну векторно-матричную задачу Коши (для агрегированной векторной функции $\psi(t,v)+\Psi(t,v)(x(t,u)-x(t,v))$ и матричной функции $\Psi(t,v)$) и одну векторную задачу Коши $(x(t,v))$ [1].

4. Пример

В задаче

$$\Phi(u)=-ax(1)-\int_0^1 u(t)x(t)dt\to\min,\quad 0\le a\le 1,$$
$$\dot x=x-x^2-ux,\ \ x(0)=1,\ \ u(t)\in U=[0,1],\ \ t\in T=[0,1],$$

фазовое уравнение может интерпретироваться как безразмерная модель динамики численности популяции ([2], с. 18). Управление имитирует отлов особей по аналогии с [3]. Интегральное слагаемое в целевом функционале учитывает прибыль от отлова. В задачу введен также числовой параметр a. В качестве начального управления выбирается управление $u(t)=0$, $t\in T$, соответствующее отсутствию отлова особей. Поставим задачу об улучшении начального управления. Для данной задачи $H(\psi,x,u,t)=\psi((1-u)x-x^2)+ux$,

$$u^*(\psi,x,t)=\begin{cases}1, & (1-\psi)x>0;\\ 0, & (1-\psi)x<0;\\ v\in U, & (1-\psi)x=0,\end{cases}$$

функция переключения управления $g(\psi, x, t) = (1 - \psi)x$.

Применим первую процедуру улучшения. Краевая задача улучшения начального управления имеет вид

$$\dot{x} = x - x^2 - u^*(p, x, t)x, \quad x(0) = 1, \tag{23}$$

$$\dot{p} = px, \quad p(1) = a. \tag{24}$$

Знак функции переключения в точке $t = 0$ определяется значением $g|_{t=0} = 1 - p(0)$. Рассмотрим три возможных случая:

$$1)\ \ g|_{t=0} > 0; \quad 2)\ \ g|_{t=0} < 0; \quad 3)\ \ g|_{t=0} = 0.$$

В первом случае, анализируя знак функции переключения $g|_t$, $t > 0$, на решении порождаемой системы

$$\dot{x} = -x^2, \quad x(0) = 1, \tag{25}$$

$$\dot{p} = px, \quad p(0) < 1, \tag{26}$$

получаем вывод о существовании единственного решения краевой задачи (23), (24), совпадающего с решением системы (25), (26) при $p(0) = a/2$.

Действуя аналогично во втором случае, убеждаемся в отсутствии решения краевой задачи.

Наконец, третий случай при исследовании трех возможных подслучаев

$$3.1)\ \ g|_t > 0,\ \ t > 0; \quad 3.2)\ \ g|_t < 0,\ \ t > 0; \quad 3.3)\ \ g|_t = 0,\ \ t > 0,$$

приводит к выводу об отсутствии решения краевой задачи при рассматриваемых предположениях.

В итоге заключаем, что для $0 \le a \le 1$ единственным решением краевой задачи улучшения (23), (24) является решение системы (25), (26) при $p(0) = a/2$ с выходным управлением $v(t) = 1$, $t \in T$. Отсюда следует, что начальное управление $u(t) = 0$, $t \in T$, не удовлетворяет принципу максимума. Так как решение краевой задачи не является особым в пределах T, то имеет место строгое улучшение $\Phi(v) < \Phi(u)$.

В заключение выделим основные свойства построенных процедур улучшения управления:

1) нелокальность улучшения управления без процедуры варьирования; 2) возможность улучшения управлений, удовлетворяющих принципу максимума (в том числе особых управлений), которая появляется в связи с неединственностью решения краевых задач улучшения.

Литература

1. Срочко В.А. *Итерационные методы решения задач оптимального управления.* – М.: Физматлит, 2000. – 160 с.
2. Свирежев Ю.М., Логофет Д.О. *Устойчивость биологических сообществ.* – М.: Наука, 1978. – 352 с.
3. Колосов Г.Е. *Об одной задаче управления численностью популяции* // Теория и системы управления. – 1995. – № 2. – С. 181–189.

Восточно-Сибирский государственный технологический университет (Улан-Удэ)

Поступила 29.05.2001