ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2002 МАТЕМАТИКА № 6 (481)

УДК 517.977.1

А.Г. ИВАНОВ

О КОРРЕКТНОСТИ РАСШИРЕНИЯ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИМИ ДВИЖЕНИЯМИ

Мерозначные управления играют важную роль при исследовании задач управления движением динамической системы, а также задач теории игр (см., напр., [1]–[6] и библиографию к ним) и целесообразность рассмотрения таких управлений обусловлена как вопросами существования решения, так и тем, что они служат хорошим инструментом качественного исследования свойств систем управления (напр., [7]–[9]). В данной работе рассматривается вопрос о существовании почти периодических (п. п.) допустимых управляемых процессов системы управления при условии, что у отвечающей ей системы с мерозначным п. п. управлением множество допустимых управляемых процессов не пусто. Доказанные в работе теоремы играют важную роль при обосновании корректности овыпукления задач оптимального управления п.п. движениями, а также при получении необходимых условий оптимальности в таких задачах.

1. Основные определения и обозначения

Пусть $\mathbb{R}^n$ — n-мерное евклидово пространство с нормой $|\cdot|$, $\overline{\mathrm{orb}}(\varphi)$ — замыкание (в $\mathbb{R}^n$) орбиты функции $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ и $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)$ — пространство линейных операторов $L:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ с нормой $|L|\doteq\max\limits_{|x|\le 1}|Lx|$. Обозначим через $B(\mathbb{R},\mathfrak{Y})$, $S(\mathbb{R},\mathfrak{Y})$, $\mathfrak{Y}\subset\mathbb{R}^n$, совокупность отображений $f:\mathbb{R}\to\mathfrak{Y}$, которые п. п. в смысле Бора, соответственно в смысле Степанова [10]. В дальнейшем (Ω,ρ) — компактное метрическое пространство и через $B(\mathbb{R}\times\Omega,\mathfrak{Y})$ обозначаем совокупность отображений

$$(t,\omega)\mapsto f(t,\omega)\in\mathfrak{Y},\quad (t,\omega)\in\mathbb{R}\times\Omega, \tag{1.1}$$

которые п. п. по $t\in\mathbb{R}$ в смысле Бора равномерно по $\omega\in\Omega$ [11]. Всюду далее каждую функцию из $L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},C(\Omega,\mathfrak{Y}))$ представляем в виде отображения (1.1) и через $S(\mathbb{R},C(\Omega,\mathfrak{Y}))$ обозначим подмножество из $L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},C(\Omega,\mathfrak{Y}))$ таких функций вида (1.1), что для любого $\varepsilon>0$ множество $\Big\{\tau\in\mathbb{R}:\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}\int\limits_t^{t+1}\max\limits_{\omega\in\Omega}|f(s+\tau,\omega)-f(s,\omega)|ds<\varepsilon\Big\}$ относительно плотно. Говорим, что функция f из $L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},C(\Omega,\mathfrak{Y}))$ удовлетворяет условию A), если для всякого $\varsigma>0$ выполняется равенство $\lim\limits_{\gamma\downarrow 0}(\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}(\mathrm{mes}\{s\in[t,t+1]:w_\gamma[f(s,\cdot),\Omega]\ge\varsigma\}))=0$, где mes — мера Лебега на $\mathbb{R}$ и $w_\gamma[f(s,\cdot),\Omega]$ — γ-колебание на Ω непрерывной функции $\omega\mapsto f(s,\omega)$.

Лемма 1.1 ([12]). *Имеют место следующие утверждения*:

1) *для того чтобы функция f из $L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},C(\Omega,\mathfrak{Y}))$ принадлежала $S(\mathbb{R},C(\Omega,\mathfrak{Y}))$, необходимо, а в случае, если $\sup\limits_{(t,\omega)\in\mathbb{R}\times\Omega}|f(t,\omega)|<\infty$, то и достаточно, чтобы она удовлетворяла условию* A) *и при каждом $\omega\in\Omega$ $f(\cdot,\omega)\in S(\mathbb{R},\mathfrak{Y})$*;
2) *если $f\in S(\mathbb{R},C(\Omega,\mathfrak{Y}))$, то $\lim\limits_{\gamma\downarrow 0}\Big(\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}\int\limits_t^{t+1}w_\gamma[f(s,\cdot),\Omega]ds\Big)=0$.*

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-00454) и конкурсного центра Министерства образования России (грант № E00-1.0-5).

Определение 1.1. Отображение (1.1) называется п. п. по $t \in \mathbb{R}$ в смысле Степанова равномерно по $\omega \in \Omega$, пишем $f \in S(\mathbb{R}\times\Omega, \mathfrak{Y})$, если оно удовлетворяет одновременно следующим условиям: при каждом ω $f(\cdot,\omega) \in S(\mathbb{R},\mathfrak{Y})$ и $\lim\limits_{\gamma\downarrow 0} \mathfrak{d}_\gamma[f,\Omega] = 0$, где

$$\mathfrak{d}_\gamma[f,\Omega] \doteq \sup\{d(f(\cdot,\omega_1), f(\cdot,\omega_2)),\ \omega_1,\omega_2 \in \Omega,\ \rho(\omega_1,\omega_2) \le \gamma\}. \tag{1.2}$$

(определение метрики d см. в [10]).

Определим мерозначные п. п. функции. С этой целью обозначим через $(\mathrm{frm}(\mathfrak{U}), |\cdot|_w)$ [1] нормированное пространство таких мер Радона на $\mathbb{R}^n$, носитель которых содержится в $\mathfrak{U}$, и через $\mathrm{rpm}(\mathfrak{U})$ обозначим его подмножество, состоящее из вероятностных мер Радона. В дальнейшем $\mathrm{DIR}(\mathfrak{U})$ — совокупность мер Дирака δ_u, сосредоточенных в точках $u \in \mathfrak{U}$, и через $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\mathbb{R}, \mathrm{frm}(\mathfrak{U}))$ обозначим совокупность таких измеримых отображений $\mu : \mathbb{R} \to (\mathrm{frm}(\mathfrak{U}), |\cdot|_w)$, что $\|\mu\| \doteq \operatorname*{ess\,sup}\limits_{t\in\mathbb{R}} |\mu(t)|(\mathfrak{U}) < \infty$ ($|\mu(t)|(\mathfrak{U})$ — вариация меры $\mu(t)$). Пусть далее $\mathfrak{V}_n = \mathfrak{V}_n(\mathbb{R}\times\mathfrak{U}, \mathbb{R}^n)$ — совокупность отображений $\varphi : \mathbb{R}\times\mathfrak{U} \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих следующим условиям: при почти всех (п. в.) $t \in \mathbb{R}$ $\varphi(t,\cdot) \in C(\mathfrak{U},\mathbb{R}^n)$, для каждого $u \in \mathfrak{U}$ отображение $t \mapsto \varphi(t,u) \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$, измеримо и существует такая функция $\psi_\varphi \in L_1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, что при п. в. $t \in \mathbb{R}$ $\max\limits_{u\in\mathfrak{U}} |\varphi(t,u)| \le \psi_\varphi(t)$. В $\mathfrak{V}_n$ можно ввести норму $\|\cdot\|_{\mathfrak{V}_n}$ [13] и показать, что нормированное пространство $(\mathfrak{V}_n, \|\cdot\|_{\mathfrak{V}_n})$ сепарабельно и изометрически изоморфно $L_1(\mathbb{R}, C(\mathfrak{U},\mathbb{R}^n))$. Кроме того, оказывается, что $\mathcal{M} \cong \mathfrak{V}_1^*$. Последнее позволяет [13] в $\mathcal{M}$ ввести норму $\|\cdot\|_w$, относительно которой множества $\mathcal{M}_1 \doteq \mathcal{M}(\mathbb{R}, \mathrm{rpm}(\mathfrak{U}))$, $\mathfrak{S}_1 \doteq \{\mu \in \mathcal{M} : \|\mu\| \le 1\}$ компактны и, если $\{\nu_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathfrak{S}_1$, то $\lim\limits_{j\to\infty} \|\nu_j\|_w = 0$ в том и только в том случае, если для каждой функции $\varphi \in \mathfrak{V}_1$ $\lim\limits_{j\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} \langle \nu_j(s), \varphi(s,u)\rangle ds = 0$, где $\langle \nu_j(s), \varphi(s,u)\rangle \doteq \int\limits_{\mathfrak{U}} \varphi(s,u)\nu_j(s)(du)$.

Определение 1.2. Отображение $\mu \in \mathcal{M}$ называется п. п. по Степанову, если для любой функции $c \in C(\mathfrak{U},\mathbb{R})$ отображение $t \mapsto \langle \mu(t), c(u)\rangle \doteq \int\limits_{\mathfrak{U}} c(u)\mu(t)(du)$ принадлежит пространству $S(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Совокупность всех п. п. по Степанову отображений из $\mathcal{M}$ обозначим APM и $APM_1 \doteq APM \cap \mathcal{M}_1$. Далее, через $APM_1^{(1)}$ обозначим совокупность таких $\mu \in APM_1$, что $\mu(t) = \delta_{u(t)}$ при п. в. $t \in \mathbb{R}$ и некотором измеримом отображении $u : \mathbb{R} \to \mathfrak{U}$. Можно показать, что $S(\mathbb{R},\mathfrak{U}) \cong APM_1^{(1)}$ и, следовательно, каждое $u(\cdot) \in S(\mathbb{R},\mathfrak{U})$ можно рассматривать также как элемент множества $APM_1^{(1)} \subset APM_1$, отождествляя его с отображением $t \mapsto \delta_{u(t)} \in \mathrm{DIR}(\mathfrak{U})$.

Определение 1.3. Отображение $(t,\omega) \mapsto \mu(t,\omega) \in \mathrm{frm}(\mathfrak{U})$ называется п. п. по $t \in \mathbb{R}$ в смысле Степанова равномерно по $\omega \in \Omega$, пишем $\mu \in S(\mathbb{R}\times\Omega, \mathrm{rpm}(\mathfrak{U}))$, если для любой функции $c(u) \in C(\mathfrak{U},\mathbb{R})$ отображение $(t,\omega) \mapsto \langle \mu(t,\omega), c(u)\rangle \doteq \int\limits_{\mathfrak{U}} c(u)\mu(t,\omega)(du)$ принадлежит пространству $S(\mathbb{R}\times\Omega,\mathbb{R})$.

В [14] показано, что $u \in S(\mathbb{R}\times\Omega,\mathfrak{U})$ в том и только в том случае, если отображение $(t,\omega) \mapsto \delta_{u(t,\omega)}$ принадлежит пространству $S(\mathbb{R}\times\Omega, \mathrm{rpm}(\mathfrak{U}))$.

В дальнейшем важную роль будет играть (см. [14], а также [15])

Теорема 1.1. *Пусть (Ω,ρ) — компактное метрическое пространство. Тогда для каждого отображения $\mu \in S(\mathbb{R}\times\Omega, \mathrm{rpm}(\mathfrak{U}))$ существует такая последовательность функций $\{u_j\}_{j=1}^\infty$ из пространства $S(\mathbb{R}\times\Omega,\mathfrak{U})$, что $\mathrm{Mod}(u_j) \subset \mathrm{Mod}(\mu)$ для всех $j \in \mathbb{N}$ и справедливы следующие свойства*:

1) *имеет место равенство* $\lim\limits_{j\to\infty} (\sup\limits_{\omega\in\Omega} \|\mu(\cdot,\omega) - \delta_{u_j(\cdot,\omega)}\|_w) = 0$;

2) *при каждом* $j \in \mathbb{N}$

$$\lim_{\gamma \downarrow 0} \Bigg(\sup_{\substack{\omega_1, \omega_2 \in \Omega \\ \rho(\omega_1, \omega_2) \le \gamma}} \Bigg(\sup_{t \in \mathbb{R}} \int_t^{t+1} |\delta_{u_j(s,\omega_1)} - \delta_{u_j(s,\omega_2)}|(\mathfrak{U}) ds \Bigg) \Bigg) = 0;$$

3) *для всякой функции* $g \in S(\mathbb{R}, C(\mathfrak{U}, \mathbb{R}))$

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \Bigg| \int_t^{t+1} \langle \mu(s,\omega) - \delta_{u_j(s,\omega)}, g(s,u) \rangle ds \Bigg| \underset{\omega \in \Omega}{\rightrightarrows} 0 \ \ \text{и} \ \ M\{g(t, u_j(t,\omega))\} \underset{\omega \in \Omega}{\rightrightarrows} M\{\langle \mu(t,\omega), g(t,u) \rangle\} \ \ \text{при} \ \ j \to \infty.$$

В заключение этого раздела приведем ряд необходимых для дальнейшего утверждений, связанных с понятием экспоненциальной дихотомичности (э. д.) однородной системы

$$\dot{x} = A(t)x, \quad A \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)), \quad d(A, 0) < \infty. \tag{1.3}$$

Напомним [16], [17], что система (1.3) называется э. д. на $\mathbb{R}$, если существует пара взаимно дополнительных проекторов $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2 \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)$ и положительные константы $\mathfrak{r}_j$, σ_j, $j = 1, 2$, такие, что

$$|P_1(t,s)| \doteq |\Phi(t) \mathfrak{P}_1 \Phi^{-1}(s)| \le \mathfrak{r}_1 e^{-\sigma_1 (t-s)}, \ \text{если} \ -\infty < s \le t < \infty;$$
$$|P_2(t,s)| \doteq |\Phi(t) \mathfrak{P}_2 \Phi^{-1}(s)| \le \mathfrak{r}_1 e^{-\sigma_2 (s-t)}, \ \text{если} \ -\infty < t \le s < \infty,$$

где $\Phi(t)$ — фундаментальная матрица системы (1.2). В этом случае функция $(t,s) \mapsto \mathcal{G}(t,s) \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)$, определенная равенством $\mathcal{G}(t,s) \doteq \chi_{(-\infty,t)}(s) P_1(t,s) - \chi_{(t,\infty)}(s) P_2(t,s)$, $t, s \in \mathbb{R}$ (χ_F — характеристическая функция множества $F \subset \mathbb{R}$), называется (главной) функцией Грина системы (1.3) и согласно [16], [17] для всякой функции $b \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, $d(b, 0) < \infty$, система $\dot{x} = A(t)x + b(t)$ имеет единственное ограниченное на $\mathbb{R}$ решение $x(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(t,s) b(s) ds$, $t \in \mathbb{R}$, при этом, если $A \in S(\mathbb{R}, \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n))$, $b \in S(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, то $x \in B(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$.

2. Основные утверждения работы

Пусть G — область в $\mathbb{R}^n$, отображение $(t,x,u) \mapsto f(t,x,u) \in \mathbb{R}^n$ в каждой точке $(t,x,u) \in \mathbb{R} \times G \times \mathfrak{U}$ имеет производную по x и для всякого фиксированного множества $K \in \mathrm{comp}(G)$ $f \in S(\mathbb{R}, C(K \times \mathfrak{U}, \mathbb{R}^n))$, $f'_x \in S(\mathbb{R}, C(K \times \mathfrak{U}, \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)))$ и

$$\mathfrak{d}(K) \doteq \sup\{|f(t,x,u)| + |f'_x(t,x,u)|, \ \ (t,x,u) \in \mathbb{R} \times K \times \mathfrak{U}\} < \infty. \tag{2.1}$$

Понадобится

Лемма 2.1. *Пусть функция* $g \in S(\mathbb{R}, C(K \times \mathfrak{U}, \mathbb{R}^n))$, $K \in \mathrm{comp}(G)$, *и ограничена. Тогда для любой функции* $x(\cdot) \in S(\mathbb{R}, K)$ *отображение* $(t,u) \mapsto g(t, x(t), u)$ *принадлежит пространству* $S(\mathbb{R}, C(K \times \mathfrak{U}, \mathbb{R}^n))$ *и, если множество* $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{S}_1 \cap APM$ *равностепенно п. п.*[1], *то совокупность отображений* $t \mapsto \langle \mu(t), g(t, x(t), u) \rangle$, $\mu \in \mathfrak{M}$, *принадлежит пространству* $S(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ *и является равностепенно п. п.*

Доказательство первого утверждения леммы 2.1 можно получить, если воспользоваться леммой 1.1. Второе утверждение есть следствие первого и теоремы 1.4 работы [15].

Рассмотрим п. п. по Степанову (см. лемму 2.1) систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = \langle \mu(t,\omega), f(t,x,u) \rangle = \int_{\mathfrak{U}} f(t,x,u) \mu(t,\omega)(du), \quad (t,x) \in \mathbb{R} \times G, \quad \mu \in S(\mathbb{R} \times \Omega, \mathrm{rpm}(\mathfrak{U})), \tag{2.2}$$

для которой пару $(x(\cdot,\omega), \mu(\cdot,\omega)) \in B(\mathbb{R}, G) \times APM_1$ ($\omega \in \Omega$) называем допустимой, если $x(\cdot,\omega)$ — решение этой системы уравнений, отвечающее $\mu(\cdot,\omega)$ и такое, что $\overline{\mathrm{orb}}(x(\cdot,\omega)) \subset G$.

[1] т.е. для любой функции $c \in C(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$ совокупность отображений $t \to \langle \mu(t), c(u) \rangle$, $\mu \in \mathfrak{M}$, принадлежащих (см. определение 1.1) $S(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, является равностепенно п.п. [11]

В дальнейшем для заданного $\mu \in S(\mathbb{R}\times\Omega, \mathrm{rpm}(\mathfrak{U}))$ будем предполагать выполненными условия

а) для любого $\omega \in \Omega$ пара $(x(\cdot,\omega), \mu(\cdot,\omega)) \in B(\mathbb{R}, G) \times APM_1$ является допустимой для системы (2.2), при этом отображение $(t,\omega) \mapsto x(t,\omega)$ принадлежит пространству $B(\mathbb{R}\times\Omega, G)$, и существует такое множество $\mathbb{K} \in \mathrm{comp}(G)$, что $\overline{\mathrm{orb}}(x(\cdot,\omega)) \subset \mathbb{K}$, $\omega \in \Omega$;

б) при каждом $\omega \in \Omega$ система уравнений в вариациях

$$\dot{y} = \langle \mu(t,\omega), f'_x(t, x(t,\omega), u)\rangle y, \quad (t,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,$$

допускает э. д., причем существуют такие положительные константы $\mathfrak{r}_j$, σ_j, $j = 1, 2$, не зависящие от $\omega \in \Omega$, что для функции Грина $\mathcal{G}(t,s;\omega) = \chi_{(-\infty,t)}(s)P_1(t,s;\omega) - \chi_{(t,\infty)}(s)P_2(t,s;\omega)$, $t, s \in \mathbb{R}$, этой системы имеют место оценки

$$\begin{aligned} |P_1(t,s;\omega)| &\le \mathfrak{r}_1 e^{-\sigma_1(t-s)}, \quad -\infty < s \le t < \infty; \\ |P_2(t,s;\omega)| &\le \mathfrak{r}_2 e^{-\sigma_2(s-t)}, \quad -\infty < t \le s < \infty. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Теорема 2.1. *Пусть выполнены условия* а), б) *и* $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ — *последовательность функций из* $S(\mathbb{R}\times\Omega, \mathfrak{U})$, *аппроксимирующая отображение* $\mu \in S(\mathbb{R}\times\Omega, \mathrm{rpm}(\mathfrak{U}))$. *Тогда найдется такое* $j_0 \in \mathbb{N}$, *начиная с которого при каждом* $\omega \in \Omega$ *система уравнений*

$$\dot{x} = f(t, x, u_j(t,\omega)) \tag{2.4}$$

имеет такое п. п. по Бору решение $x_j(\cdot,\omega)$, *что* $\overline{\mathrm{orb}}(x_j(\cdot,\omega)) \subset G$ *и*

$$\lim_{j\to\infty} (\sup_{\omega\in\Omega} \|x(\cdot,\omega) - x_j(\cdot,\omega)\|_{C(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)}) = 0. \tag{2.5}$$

Теорема 2.2. *Пусть в теореме* 2.1 *отображение* $\mu \in S(\mathbb{R}\times\Omega, \mathrm{rpm}(\mathfrak{U}))$ *такое, что*

$$\lim_{\gamma\downarrow 0} \mathfrak{m}_\gamma[\mu,\Omega] = 0, \quad \mathfrak{m}_\gamma[\mu,\Omega] \doteq \sup_{\substack{(\omega_1,\omega_2)\in\Omega,\ k=1,2 \\ \rho(\omega_1,\omega_2)\le\gamma}} \left(\sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+1} |\mu(s,\omega_1) - \mu(s,\omega_2)|(\mathfrak{U}) ds \right) = 0. \tag{2.6}$$

Тогда при каждом $j \ge j_0$, *где* $j_0 \in \mathbb{N}$ *взято из теоремы* 2.1, *решение* $x_j(\cdot,\omega)$ *системы* (2.4) *принадлежит пространству* $B(\mathbb{R}\times\Omega, \mathbb{R}^n)$.

3. Вспомогательные утверждения

Считаем $r > 0$ таким, что компактное множество $K_r \doteq \mathbb{K} + O_r[0] \subset G$ ($O_r[0] \doteq \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \le r\}$). В дальнейшем считаем $\mathfrak{d} \doteq \mathfrak{d}(K_r)$ (см. (2.1) при $K = K_r$) и $\nu_j(t,\omega) \doteq \mu(t,\omega) - \delta_{u_j}(t,\omega)$. Понадобятся следующие две громоздко доказываемые леммы.

Лемма 3.1 ([18]). *При выполнении условий* а) *и* б) *имеет место равенство*

$$\lim_{j\to\infty} (\sup_{(t,\omega)\in\mathbb{R}\times\Omega} I_j(t,\omega)) = 0, \quad I_j(t,\omega) \doteq \left| \int_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(t,s;\omega) \langle \nu_j(s,\omega), f(t, x(s,\omega), u)\rangle ds \right|. \tag{3.1}$$

Лемма 3.2 ([18]). *Пусть выполнены условия* а) *и* б). *Тогда для любых фиксированных* $\varsigma > 0$, $i \in \mathbb{Z}_+$ *и* $\mathfrak{k} \in (0,\infty)$ *имеют место следующие равенства*:

$$\lim_{j\to\infty} \left(\sup_{\varsigma\in(0,\mathfrak{k}]} \left(\sup_{(t,\omega)\in\mathbb{R}\times\Omega} \left| \int_{\mathfrak{s}_k(t,i)} P_k(t,s;\omega) \langle \nu_j(s,\omega), f'_x(s, x(s,\omega), u)\rangle ds \right| \right) \right) = 0, \quad k = 1, 2, \tag{3.2}$$

где $\mathfrak{s}_1(t,i) \doteq [t - i\varsigma - \varsigma, t - i\varsigma]$, $\mathfrak{s}_2(t,i) \doteq [t + i\varsigma, t + i\varsigma + \varsigma]$.

Для $(j,\omega) \in \mathbb{N}\times\Omega$ введем оператор $\mathfrak{J}_j[\cdot,\omega] : B(\mathbb{R}, O_r[0]) \to B(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, определенный для каждой функции $z \in B(\mathbb{R}, O_r[0])$ равенством

$$\mathfrak{J}_j[z(\cdot),\omega](t) \doteq \int_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(t,s;\omega) \langle \nu_j(s,\omega), f'_x(s, x(s,\omega), u)\rangle z(s) ds, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{3.3}$$

Лемма 3.3. *Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $j_0 \in \mathbb{N}$, что для всех $j \geq j_0$ и каждой функции $z \in B(\mathbb{R}, O_r[0])$ выполнено неравенство*

$$\sup_{(t,\omega)\in\mathbb{R}\times\Omega} |\mathfrak{J}_j[z(\cdot),\omega](t)| \leq \varepsilon\left(2\mathfrak{d}\left(\frac{\mathfrak{r}_1}{\sigma_1}+\frac{\mathfrak{r}_2}{\sigma_2}\right)+\|z\|_C\right) \quad (\|\cdot\|_C \doteq \|\cdot\|_{C(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)}). \tag{3.4}$$

Доказательство. Фиксируем произвольную функцию $z \in B(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$. Так как п. п. по Бору функция равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$, то для заданного $\varepsilon > 0$ найдется такое $\varsigma = \varsigma(z(\cdot)) \in (0, \mathfrak{k}]$, где $\mathfrak{k} \doteq \varepsilon/2\mathfrak{d}$, что

$$\omega_\varsigma[z,\mathbb{R}] \doteq \sup_{\substack{t,s\in\mathbb{R},\\ |t-s|<\varsigma}} |z(t)-z(s)| < \varepsilon. \tag{3.5}$$

Теперь, полагая $g(t,\omega,u) = f'_x(t,x(t,\omega),u)$, имеем (см. определение $\mathcal{G}(t,s;\omega)$) соотношения

$$\sup_{(t,\omega)\in\mathbb{R}\times\Omega} |\mathfrak{J}_j[z(\cdot),\alpha,\omega](t)| =$$

$$= \sup_{(t,\omega)\in\mathbb{R}\times\Omega}\left|\int_{-\infty}^t P_1(t,s;\omega)\langle\nu_j(s,\omega),g(s,\omega,u)\rangle z(s)ds - \int_t^\infty P_2(t,s;\omega)\langle\nu_j(s,\omega),g(s,\omega,u)\rangle z(s)ds\right| \leq$$

$$\leq \sup_{(t,\omega)\in\mathbb{R}\times\Omega}\sum_{i=0}^\infty\left\{\left|\int_{t-i\varsigma-\varsigma}^{t-i\varsigma} P_1(t,s;\omega)\langle\nu_j(s,\omega),g(s,\omega,u)\rangle(z(s)-z(t-i\varsigma-\varsigma))ds +\right.\right.$$

$$+\int_{t-i\varsigma-\varsigma}^{t-i\varsigma} P_1(t,s;\omega)\langle\nu_j(s,\omega),g(s,\omega,u)\rangle ds\cdot z(t-i\varsigma-\varsigma) -$$

$$-\int_{t+i\varsigma}^{t+i\varsigma+\varsigma} P_2(t,s;\omega)\langle\nu_j(s,\omega),g(s,\omega,u)\rangle(z(s)-z(t+i\varsigma))ds -$$

$$\left.\left.-\int_{t+i\varsigma}^{t+i\varsigma+\varsigma} P_2(t,s;\omega)\langle\nu_j(s,\omega),g(s,\omega,u)\rangle ds\cdot z(t+i\varsigma)\right|\right\} \overset{(2.3)}{\leq}$$

$$\leq 2\mathfrak{d}\left(\frac{\mathfrak{r}_1}{\sigma_1}+\frac{\mathfrak{r}_2}{\sigma_2}\right)\omega_\varsigma[z,\mathbb{R}] + \sum_{k=1}^2\sum_{i=0}^\infty \Psi_j^{(k)}(i\varsigma,\varsigma)\cdot\|z\|_C,$$

где (см. обозначения, принятые в (3.2))

$$\Psi_j^{(k)}(i\varsigma,\varsigma) \doteq \sup_{(t,\omega)\in\mathbb{R}\times\Omega}\left|\int_{\mathfrak{s}_k(t,i)} P_k(t,s;\omega)\langle\nu_j(s,\omega),g(s,\omega,u)\rangle ds\right|, \quad k=1,2.$$

Таким образом, в силу (3.5) для всех $j \in \mathbb{N}$ и $z \in B(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$

$$\sup_{(t,\omega)\in\mathbb{R}\times\Omega} |\mathfrak{J}_j[z(\cdot),\omega](t)| \leq 2\varepsilon\mathfrak{d}\left(\frac{\mathfrak{r}_1}{\sigma_1}+\frac{\mathfrak{r}_2}{\sigma_2}\right) + \sum_{k=1}^2\sum_{i=0}^\infty \Psi_j^{(k)}(i\varsigma,\varsigma)\cdot\|z\|_C.$$

Далее, т. к. для любого $N \in \mathbb{N}$ и $k = 1,2$

$$\sum_{i=0}^N \sup_{(j,\varsigma)\in\mathbb{N}\times(0,\mathfrak{k}]} \Psi_j^{(k)}(i\varsigma,\varsigma) \overset{(1.3)}{\leq} 2\mathfrak{d}\frac{\mathfrak{r}_k}{\sigma_k}\sup_{\varsigma\in(0,\mathfrak{k}]}\left((1-e^{-\sigma_k\varsigma})\sum_{i=0}^\infty e^{-i\sigma_k\varsigma}\right) = 2\mathfrak{d}\frac{\mathfrak{r}_k}{\sigma_k}, \tag{3.6}$$

то ряды $\sum\limits_{i=0}^\infty \Psi_j^{(k)}(i\varsigma,\varsigma)$ являются равномерно сходящимися на множестве $\mathbb{N}\times(0,\mathfrak{k}]$. Поэтому найдется такое $i_0 = i_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, что для всех $(j,\varsigma) \in \mathbb{N}\times(0,\mathfrak{k}]$ будет выполнено неравенство

$$\sum_{i=0}^\infty \Psi_j^{(k)}(i\varsigma,\varsigma) \leq \sum_{i=0}^{i_0} \Psi_j^{(k)}(i\varsigma,\varsigma) + \frac{\varepsilon}{4}, \quad k=1,2. \tag{3.7}$$

В свою очередь, используя равенство (3.4), при $\mathfrak{k} \doteq \varepsilon/2\mathfrak{d}$ получаем, что $\lim\limits_{j\to\infty}(\sup\limits_{\varsigma\in(0,\mathfrak{k}]}\Psi_j^{(k)}(i\varsigma,\varsigma)) = 0$, $k = 1, 2$, $i = 0,\dots,i_0$, и, следовательно, найдется такое $j_0 = j_0(\varepsilon/4) \in \mathbb{N}$, что для всех $j \geq j_0$ будет иметь место неравенство $\sum\limits_{i=0}^{i_0}\sup\limits_{\varsigma\in(0,\mathfrak{k}]}\Psi_j^{(k)}(i\varsigma,\varsigma) < \frac{\varepsilon}{4}$, $k = 1, 2$. Отсюда совместно с неравенствами (3.6) и (3.7) получаем, что для всех $j \geq j_0$ и любой функции $z \in B(\mathbb{R}, O_r[0])$ справедливо неравенство (3.4). $\square$

4. Доказательство теоремы 2.1

Поскольку $u_j \in S(\mathbb{R}\times\Omega,\mathfrak{U})$, то, как отмечалось в п. 1, отображение $(t,\omega) \mapsto \delta_{u_j(t,\omega)} \doteq \mu_j(t,\omega)$ принадлежит $S(\mathbb{R}\times\Omega, \mathrm{rpm}(\mathfrak{U}))$ и систему (2.4) можно записать в эквивалентной форме

$$\dot{x} = \langle\mu_j(t,\omega), f(t,x,u)\rangle. \tag{4.1}$$

Эта система относительно переменной $z = x(t,\omega) - x$ запишется в виде

$$\dot{z} = A(t,\omega)z + a(t,\omega,z) + b_j(t,\omega,z), \quad (t,z) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n, \quad (j,\omega) \in \mathbb{N}\times\Omega, \tag{4.2}$$

где

$$\begin{gathered} A(t,\omega) \doteq \langle\mu(t,\omega), f'_x(t,x(t,\omega),u)\rangle, \quad b_j(t,\omega,z) \doteq \langle\nu_j(t,\omega), f(t,x(t,\omega)-z,u)\rangle, \\ a(t,\omega,z) \doteq \langle\mu(t,\omega), f(t,x(t,\omega),u) - f(t,x(t,\omega)-z,u)\rangle - A(t,\omega)z. \end{gathered} \tag{4.3}$$

Для каждой пары $(j,\omega) \in \mathbb{N}\times\Omega$ рассмотрим оператор $\mathfrak{F}_j[\cdot,\omega] : B(\mathbb{R},O_r[0]) \to B(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$, определенный для любой функции $z \in B(\mathbb{R},O_r[0])$,

$$\mathfrak{F}_j[z(\cdot),\omega](t) \doteq \int_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(t,s;\omega)[b_j(s,\omega,z(s)) + a(s,\omega,z(s))]ds, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{4.4}$$

Полагаем далее при $\gamma > 0$ и всех $t \in \mathbb{R}$

$$\mathfrak{w}_\gamma(t) \doteq \sup\{|f'_x(t,x_1,u) - f'_x(t,x_2,u)|, \quad (x_k,u) \in K_r\times\mathfrak{U}, \quad k = 1,2, \quad |x_1 - x_2| \leq \gamma\}. \tag{4.5}$$

Из ограничений, наложенных на f, в силу леммы 1.1 $\lim\limits_{\gamma\downarrow 0}\Big(\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}\int\limits_t^{t+1}\mathfrak{w}_\gamma(s)ds\Big) = 0$. Следовательно, для заданного $q \in (0,1)$ (конкретный его выбор будет указан позднее) найдется такое $\delta \in (0,r]$, что

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}\mathfrak{w}_\delta(s)ds \leq q/\mathfrak{k}, \quad \mathfrak{k} \doteq \frac{\mathfrak{r}_1}{1-e^{-\sigma_1}} + \frac{\mathfrak{r}_2}{1-e^{-\sigma_2}}. \tag{4.6}$$

Теперь, обозначив $\mathfrak{m}_1(t,i) \doteq [t-i-1, t-i]$, $\mathfrak{m}_2(t,i) \doteq [t+i, t+i+1]$, из (4.3), (4.4) получаем, что для всех $(j,\omega) \in \mathbb{N}\times\Omega$ и любой функции $z(\cdot) \in B(\mathbb{R},O_\delta[0])$ (см. обозначения в (3.1) и (3.3))

$$\begin{gathered} |\mathfrak{F}_j[z(\cdot),\omega](t)| \leq I_j[z(\cdot),\omega](t) + |\mathfrak{J}_j[z(\cdot),\omega](t)| + \\ + \sum_{k=1}^{2}\Bigg(\sum_{i=0}^{\infty}\int_{\mathfrak{m}_k(t,i)}|P_k(t,s;\omega)|\Big|\Big\langle\nu_j(s,\omega), \int_0^1(f'_x(s,x(s,\omega)-\vartheta z(s,\omega),u) - f'_x(s,x(s,\omega),u))d\vartheta\Big\rangle\Big|ds + \\ + \int_{\mathfrak{m}_k(t,i)}|P_k(t,s;\omega)|\Big|\Big\langle\mu(s,\omega), \int_0^1(f'_x(s,x(s,\omega)-\vartheta z(s,\omega),u) - f'_x(s,x(s,\omega),u))d\vartheta\Big\rangle\Big|ds\Bigg)\|z\|_C \leq \\ \leq I_j[z(\cdot),\omega](t) + |\mathfrak{J}_j[z(\cdot),\omega](t)| + 3\sum_{k=1}^{2}\Bigg(\mathfrak{r}_k\int_{\mathfrak{m}_k(t,i)}e^{-\sigma_k|s-t|}\mathfrak{w}_\delta(s)ds\Bigg)\|z\|_C. \end{gathered}$$

Отсюда в силу (4.6) вытекает, что для всех $(j,\omega) \in \mathbb{N}\times\Omega$ и любой функции $z(\cdot) \in B(\mathbb{R},O_\delta[0])$

$$\sup_{(t,\omega)\in\mathbb{R}\times\Omega}|\mathfrak{F}_j[z(\cdot),\omega](t)| \leq 3q\|z\|_C + \sup_{(t,\omega)\in\mathbb{R}\times\Omega}|\mathfrak{J}_j[z(\cdot),\omega](t)| + \sup_{(t,\omega)\in\mathbb{R}\times\Omega}|I_j(t,\omega)|. \tag{4.7}$$

Фиксируем константу $\beta \in (0, \delta/2]$. Учитывая, что для любых $z_1, z_2 \in B(\mathbb{R}, O_\beta[0])$ при всех $\vartheta \in [0,1]$ $\|z_2 + \vartheta(z_1 - z_2)\|_C \le \delta$, $\|z_1 + \vartheta(z_2 - z_1)\|_C \le \delta$, получаем (см. (4.3) и (4.4)), что для всех $(j,\omega) \in \mathbb{N} \times \Omega$

$$|\mathfrak{F}_j[z_1(\cdot),\omega](t) - \mathfrak{F}_j[z_2(\cdot),\omega](t)| \le 3\mathfrak{k} \sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+1} w_\delta^{(1)}(s)ds\|z_1 - z_2\|_C +$$
$$+ \sup_{(t,\omega)\in\mathbb{R}\times\Omega} |\mathfrak{I}[z_1(\cdot) - z_2(\cdot),\omega](t)| \overset{(4.5)}{\le} 3q\|z_1 - z_2\|_C + \sup_{(t,\omega)\in\mathbb{R}\times\Omega} |\mathfrak{I}[z_1(\cdot) - z_2(\cdot),\alpha,\omega](t)|.$$

Тогда по лемме 3.3 для константы $\varepsilon > 0$, удовлетворяющей неравенству

$$\varepsilon < \frac{q\beta}{2\mathfrak{d}(\mathfrak{r}_1/\sigma_1 + \mathfrak{r}_2/\sigma_2) + \beta}\,, \tag{4.8}$$

найдется $j_1 \in \mathbb{N}$ такое, что для всех $z(\cdot) \in B(\mathbb{R}, O_\delta[0])$ при $j \ge j_1$ будет выполнено неравенство (3.4). Следовательно, при этих j для любых $z_1, z_2 \in B(\mathbb{R}, O_\beta[0])$ $(z_1(\cdot) \not\equiv z_2(\cdot))$, учитывая, что функция $t \mapsto \beta(z_1(t) - z_2(t))/\|z_1 - z_2\|_C$ принадлежит $B(\mathbb{R}, O_\beta[0])$ и $\beta \in (0, \delta/2]$, получим

$$|\mathfrak{I}_j[z_1(\cdot) - z_2(\cdot),\omega](t)| \le \frac{1}{\beta}\|z_1 - z_2\|_C \sup_{(t,\omega)\in\mathbb{R}\times\Omega} \left|\mathfrak{I}_j\left[\frac{z_1(\cdot) - z_2(\cdot)}{\|z_1 - z_2\|_C},\omega\right](t)\right| \overset{(3.4)}{\le}$$
$$\le \varepsilon(2\mathfrak{d}(\mathfrak{r}_1/\sigma_1 + \mathfrak{r}_2/\sigma_2) + \beta)\frac{1}{\beta}\|z_1 - z_2\|_C \overset{(4.8)}{<} q\|z_1 - z_2\|_C.$$

Следовательно, для любых $z_1, z_2 \in B(\mathbb{R}, O_\beta[0])$ и всех $j \ge j_1$

$$\sup_{(t,\omega)\in\mathbb{R}\times\Omega} |\mathfrak{F}_j[z_1(\cdot),\omega](t) - \mathfrak{F}_j[z_2(\cdot),\omega](t)| \le 4q\|z_1 - z_2\|_C, \tag{4.9}$$

т. е., если $4q < 1$, то при $j \ge j_1$ операторы $\mathfrak{F}_j[(\cdot),\omega] : B(\mathbb{R}, O_\beta[0]) \to B(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ являются операторами сжатия с общей константой $4q < 1$. Покажем теперь, что, начиная с некоторого j_0, при всех $\omega \in \Omega$ $\mathfrak{F}_j[B(\mathbb{R}, O_\beta[0]),\omega] \subset B(\mathbb{R}, O_\beta[0])$. В самом деле, выберем $j_0 \in \mathbb{N}$, $j_0 \ge j_1$ таким, чтобы при всех $j \ge j_0$ выполнялось неравенство (см. (3.1)) $\sup\limits_{(t,\omega)\in\mathbb{R}\times\Omega} |I_j(t,\omega)| < q\beta$. Тогда при этих j из (4.7) вытекает, что при каждом $z(\cdot) \in B(\mathbb{R}, O_\beta[0])$ $\sup\limits_{(t,\omega)\in\mathbb{R}\times\Omega} |\mathfrak{F}_j[z(\cdot),\omega](t)| \le 4q\beta + \sup\limits_{(t,\omega)\in\mathbb{R}\times\Omega} |\mathfrak{I}[z(\cdot),\alpha,\omega](t)|$, и т. к. $\sup\limits_{(t,\omega)\in\mathbb{R}\times\Omega} |\mathfrak{I}_j[z(\cdot),\omega](t)| \le \varepsilon(2\mathfrak{d}(\mathfrak{r}_1/\sigma_1 + \mathfrak{r}_2/\sigma_2) + \beta) \overset{(4.8)}{<} q\beta$, то при каждом $j \ge j_0$ и всякой функции $z(\cdot) \in B(\mathbb{R}, O_\beta[0])$ $\sup\limits_{(t,\omega)\in\mathbb{R}\times\Omega} |\mathfrak{F}_j[z(\cdot),\omega](t)| \le 5q\beta$. Таким образом, если с самого начала взять $q \in (0,\, 1/5)$, то при каждом $j \ge j_0$ и всяком $\omega \in \Omega$ выполнено нужное включение. Последнее совместно с (4.9) влечет по теореме о сжимающем отображении, что оператор $\mathfrak{F}_j[\cdot,\alpha,\omega]$ имеет на замкнутом подмножестве $B(\mathbb{R}, O_\beta[0])$ банахова пространства $B(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ неподвижную точку, т. е. для каждого $j \ge j_0$ и любого $\omega \in \Omega$ существует (единственная) функция $z_j(\cdot,\alpha,\omega) \in B(\mathbb{R}, O_\beta[0])$ такая, что при всех $t \in \mathbb{R}$

$$z_j(t,\alpha,\omega) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(t,s;\omega)[a(s,\omega,z_j(s,\omega)) + b_j(s,\omega,z_j(s,\omega))]ds. \tag{4.10}$$

Полученное равенство означает, что $z_j(\cdot,\omega)$ — п. п. по Бору решение системы уравнений (4.2), но тогда функция $x_j(\cdot,\omega) = x(\cdot,\omega) - z_j(\cdot,\alpha,\omega)$ будет п. п. по Бору решением системы (4.1), или, что тоже самое, системы (2.4), и т.к. $\|z_j(\cdot,\alpha,\omega)\|_C \le \beta < r$ при каждом $j \in \mathbb{N}$, $j_0 \ge j$ и любом $\omega \in \Omega$, то $\overline{\mathrm{orb}}(x_j(\cdot,\omega)) \subset K_r \subset G$. Тем самым первое утверждение теоремы 2.1 доказано.

Для доказательства второго утверждения теоремы 2.1 (в силу доказанного) достаточно показать, что $\lim\limits_{j\to\infty}(\sup\limits_{\omega\in\Omega}\|z_j(\cdot,\omega)\|_C) = 0$. Для доказательства этого равенства заметим сначала, что если $z_j(\cdot,\omega)\in B(\mathbb{R},O_\beta[0])$, то в силу выбора j_0 имеем соотношения

$$|\mathfrak{I}_j[z_j(\cdot,\omega),\omega](t)| = \frac{1}{\beta}\Big|\mathfrak{I}_j\Big[\frac{z_j(\cdot,\omega)}{\|z_j(\cdot,\omega)\|_C},\omega\Big](t)\Big|\|z_j(\cdot,\omega)\|_C \overset{(3.4)}{\le}$$
$$\le \frac{\varepsilon}{\beta}(2\mathfrak{d}(\mathfrak{r}_1/\sigma_1+\mathfrak{r}_2/\sigma_2)+\beta)\|z_j(\cdot,\omega)\|_C \overset{(4.8)}{\le} q\|z_j(\cdot,\omega)\|_C.$$

Используя их, в силу (4.7) и (4.10) получаем неравенство

$$\sup_{\omega\in\Omega}\|z_j(\cdot,\omega)\|_C \le (1-4q)(\sup_{(t,\omega)\in\mathbb{R}\times\Omega} I_j(t,\omega)).$$

Теперь нужное предельное равенство (2.5) вытекает из (3.1).

5. Доказательство теоремы 2.2

В силу вышедоказанного для каждого $j\ge j_0$ и всех $\omega\in\Omega$ $x_j(\cdot,\omega)=x(\cdot,\omega)-z_j(\cdot,\omega)$, где функция $z_j(\cdot,\omega)\in B(\mathbb{R},O_\beta[0])$ и является решением системы уравнений (4.2), а т.к. решение $x(\cdot,\omega)$ системы (2.2) принадлежит $B(\mathbb{R}\times\Omega,\mathbb{R}^n)$, то для доказательства теоремы 2.2 достаточно показать, что $z_j\in B(\mathbb{R}\times\Omega,\mathbb{R}^n)$. С этой целью полагаем $\delta(\omega_1,\omega_1)\doteq\|x(\cdot,\omega_1)-x(\cdot,\omega_2)\|_C$ и

$$\mathfrak{q}_\gamma \doteq \sup\Big\{\int_{\mathbb{R}}|\mathcal{G}(t,s;\omega_1)-\mathcal{G}(t,s;\omega_2)|ds,\ (t,\omega_l)\in\mathbb{R}\times\Omega,\ l=1,2,\ \rho(\omega_1,\omega_2)\le\gamma\Big\}.$$

Теперь фиксируем произвольные $j\ge j_0$ и $\omega_1,\omega_2\in\Omega$, $\rho(\omega_1,\omega_2)\le\gamma$. Тогда из равенств

$$z_j(t,\omega_l)=\int_{\mathbb{R}}\mathcal{G}(t,s;\omega_l)[b_j(s,\omega_l,z_j(s,\omega_l))+a(s,\omega_l,z_j(s,\omega_l))]ds,\quad t\in\mathbb{R},\quad l=1,2,$$

получаем (см. обозначения (4.3) и (4.4)), что

$$|z_j(t,\omega_1)-z_j(t,\omega_2)|\le|\mathfrak{F}_j[z_j(\cdot,\omega_1),\omega_1](t)-\mathfrak{F}_j[z_j(\cdot,\omega_2),\omega_1](t)|+$$
$$+|\mathfrak{F}_j[z_j(\cdot,\omega_2),\omega_1](t)-\mathfrak{F}_j[z_j(\cdot,\omega_2),\omega_2](t)| \overset{(4.9)}{\le} 4q\|z_j(\cdot,\omega_1)-z_j(\cdot,\omega_2)\|_C+\mathfrak{d}(2+4\beta)\mathfrak{q}_\gamma+$$
$$+I_j^{(1)}(t,\omega_1,\omega_2)+I_j^{(2)}(t,\omega_1,\omega_2),\quad (5.1)$$

где

$$I_j^{(1)}(t,\omega_1,\omega_2)\doteq\int_{\mathbb{R}}|\mathcal{G}(t,s;\omega_2)|\,|b_j(s,\omega_1,z_j(s,\omega_2))-b_j(s,\omega_2,z_j(s,\omega_2))|ds,$$
$$I_j^{(2)}(t,\omega_1,\omega_2)\doteq\int_{\mathbb{R}}|\mathcal{G}(t,s;\omega_2)|\,|a(s,\omega_1,z_j(s,\omega_2))-a(s,\omega_2,z_j(s,\omega_2))|ds.$$

Далее, определим $\mathfrak{v}(t)$, $t\in\mathbb{R}$, аналогично $\mathfrak{w}(t)$ (см. (4.5)) при $f'_x=f$. Тогда при всех $t\in\mathbb{R}$

$$|b_j(t,\omega_1,z_j(t,\omega_2))-b_j(t,\omega_2,z_j(t,\omega_2))| \overset{(4.3)}{\le} \mathfrak{d}|\nu_j(t,\omega_1)-\nu_j(t,\omega_2)|(\mathfrak{U})+2\mathfrak{v}_{\delta(\omega_1,\omega_1)}(t),$$
$$|a(t,\omega_1,z_j(s,\omega_2))-a(t,\omega_2,z_j(s,\omega_2))| \overset{(4.3)}{\le} |\langle\mu(t,\omega_1),f(t,x(t,\omega_1),u)-f(t,x(t,\omega_2),u)\rangle|+$$
$$+|\langle\mu(t,\omega_1),f(t,x(t,\omega_2)-z_j(t,\omega_2),u)-f(t,x(t,\omega_1)-z_j(t,\omega_2),u)\rangle|+$$
$$+|A(t,\omega_2)-A(t,\omega_1)|\,|z_j(t,\omega_2)|+|\langle\mu(t,\omega_1)-\mu(t,\omega_2),f(t,x(t,\omega_2),u)\rangle|+$$
$$+|\langle\mu(t,\omega_1)-\mu(t,\omega_2),f(t,x(t,\omega_2)-z_j(t,\omega_2),u)\rangle|\le$$
$$\le 2\mathfrak{v}_{\delta(\omega_1,\omega_1)}(t)+2\mathfrak{d}(\beta+1)|\mu(t,\omega_1)-\mu(t,\omega_2)|(\mathfrak{U})+\beta\mathfrak{w}_{\delta(\omega_1,\omega_1)}(t).$$

Поэтому (см. обозначение в (4.6))

$$I_j^{(1)}(t,\omega_1,\omega_2)+I_j^{(2)}(t,\omega_1,\omega_2) \overset{(2.3)}{\leq}$$
$$\leq \mathfrak{k}\mathfrak{d}\mathfrak{m}_\gamma[\nu_j,\Omega]+3\mathfrak{k}\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}\mathfrak{v}_{\delta(\omega_1,\omega_1)}(s)ds+2\mathfrak{d}\mathfrak{k}(\beta+1)\mathfrak{m}_\gamma[\mu,\Omega]+\beta\mathfrak{k}\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}\mathfrak{w}_{\delta(\omega_1,\omega_1)}(s)ds.$$

Теперь, обозначив через $\widetilde{\mathfrak{k}}$ максимальный из постоянных множителей в каждом слагаемом правой части полученного неравенства, из (5.1) имеем

$$(1-4q)\|z_j(\cdot,\omega_1)-z_j(\cdot,\omega_2)\|_C \leq \mathfrak{d}(2+4\beta)\mathfrak{q}_\gamma+\widetilde{\mathfrak{k}}\Big(\mathfrak{m}_\gamma[\nu_j,\Omega]+\mathfrak{m}_\gamma[\mu,\Omega]+$$
$$+\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}(\mathfrak{v}_{\delta(\omega_1,\omega_1)}(s)+\mathfrak{w}_{\delta(\omega_1,\omega_1)}(s))ds\Big). \quad (5.2)$$

Так как $f\in S(\mathbb{R},C(K_r\times\mathfrak{U},\mathbb{R}^n))$, $f'_x\in S(\mathbb{R},C(K_r\times\mathfrak{U},\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)))$, а $x\in B(\mathbb{R}\times\Omega,\mathbb{R}^n)$, то по лемме 1.1

$$\lim_{\gamma\downarrow 0}\Bigg(\sup_{\substack{\omega_1,\omega_1\in\Omega\\ \rho_\Omega(\omega_1,\omega_1)\leq\gamma}}\Bigg(\int_t^{t+1}(\mathfrak{v}_{\delta(\omega_1,\omega_1)}(s)+\mathfrak{w}_{\delta(\omega_1,\omega_1)}(s))ds\Bigg)\Bigg)=0.$$

Далее, поскольку $\nu_j(\cdot,\omega)\doteq\mu(\cdot,\omega)-\delta_{u_j(\cdot,\omega)}$, то при каждом j (см. второе утверждение теоремы 1.1 и равенство (2.6)) $\lim\limits_{\gamma\downarrow 0}\mathfrak{m}_\gamma[\nu_j,\Omega]=0$. Наконец, в [12] показано, что $\lim\limits_{\gamma\downarrow 0}\mathfrak{q}_\gamma=0$. Поэтому в силу (5.2) получим

$$\lim_{\gamma\downarrow 0}(\sup_{\substack{\omega_1,\omega_1\in\Omega\\ \rho_\Omega(\omega_1,\omega_1)\leq\gamma}}\|z_j(\cdot,\omega_1)-z_j(\cdot,\omega_2)\|_C)=0,$$

а это и означает [11], что отображение $(t,\omega)\mapsto z_j(t,\omega_1)$ принадлежит пространству $B(\mathbb{R}\times\Omega,\mathbb{R}^n)$.

6. Дополнение теоремы 2.1

Рассмотрим отображение $(t,x,v,u)\mapsto\mathfrak{f}(t,x,v,u)\in\mathbb{R}^n$, имеющее в каждой точке $(t,x,v,u)\in\mathbb{R}\times G\times\mathcal{V}\times\mathfrak{U}$, $\mathcal{V}\in\mathrm{comp}(\mathbb{R}^k)$ производную по x и для всякого фиксированного множества $K\in\mathrm{comp}(G)$ $\mathfrak{f}\in S(\mathbb{R},C(K\times\mathcal{V}\times\mathfrak{U},\mathbb{R}^n))$, $\mathfrak{f}'_x\in S(\mathbb{R},C(K\times\mathcal{V}\times\mathfrak{U},\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)))$ и $\mathfrak{d}(K)\doteq\sup\{|\mathfrak{f}(t,x,v,u)|+|\mathfrak{f}'_x(t,x,v,u)|,\ (t,x,v,u)\in\mathbb{R}\times G\times\mathcal{V}\times\mathfrak{U}\}<\infty$. Будем также предполагать, что при $v(\cdot)\in S(\mathbb{R},\mathcal{V})$ для п. п. по Степанову (см. лемму 2.1) системы

$$\dot{x}=\langle\mu(t,\omega),\mathfrak{f}(t,x,v(t),u)\rangle=\int_{\mathfrak{U}}\mathfrak{f}(t,x,v(t),u)\mu(t,\omega)(du) \quad (6.1)$$

выполнены *условия* А) и Б), аналогичные условиям а) и б) при $f(t,x,u)=\mathfrak{f}(t,x,v(t),u)$, и будем рассматривать такую последовательность $\{v_j(\cdot)\}_{j=1}^\infty\subset S(\mathbb{R},\mathcal{V})$, что

$$\lim_{j\to\infty}d(v(\cdot),v_j(\cdot))=0. \quad (6.2)$$

Замечание 6.1. В качестве последовательности $\{v_j(\cdot)\}_{j=1}^\infty$, удовлетворяющей (6.2) при исследовании п. п. систем управления, содержащих в качестве параметра функции из множества $S(\mathbb{R},\mathcal{V})$, выступает последовательность, отвечающая вектору, который принадлежит какому-либо конусу (в зависимости от вида рассматриваемой задачи), порожденному множеством $S(\mathbb{R},\mathcal{V})$ с вершиной в точке $v(\cdot)\in S(\mathbb{R},\mathcal{V})$, например, касательному или контингентному [19].

Следующая теорема играет важную роль при изучении задач оптимального управления п. п. движениями, содержащих параметр.

Теорема 6.1. *Пусть для системы* (6.1) *выполнены условия* А), Б) *и* $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ — *последовательность функций из* $S(\mathbb{R}\times\Omega,\mathfrak{U})$*, определенная в теореме* 1.1*, аппроксимирующая отображение* $\mu \in S(\mathbb{R}\times\Omega,\mathrm{rpm}(\mathfrak{U}))$*. Тогда если для последовательности* $\{v_j(\cdot)\}_{j=1}^{\infty} \subset S(\mathbb{R},\mathcal{V})$ *выполнено равенство* (6.2)*, то найдется такое* $j_0 \in \mathbb{N}$*, начиная с которого при каждом* $\omega\in\Omega$ *система уравнений*

$$\dot{x} = \mathfrak{f}(t,x,v_j(t),u_j(t,\omega)) \qquad (6.3)$$

имеет п. п. по Бору решение $x_j(\cdot,\omega)$ *такое, что* $\overline{\mathrm{orb}}(x_j(\cdot,\omega)) \subset G$*,* $\omega\in\Omega$*, и удовлетворяется равенство* (2.6)*.*

Доказательство. Как и в теореме 2.1, константа $r>0$ такая, что $K_r \doteq \mathbb{K}+O_r[0]\subset G$, константу $\mathfrak{d}>0$ определяем для функции $\mathfrak{f}$ равенством (2.1) при $K=K_r\times\mathcal{V}$ и введем обозначения

$$f_j(t,x,u) \doteq \mathfrak{f}(t,x,v_j(t),u), \quad f'_{jx}(t,x,u) = \mathfrak{f}'_x(t,x,v_j(t),u). \qquad (6.4)$$

Сделав в системе (6.3) замену $z = x(t,\omega)-x$, получим

$$\dot{z} = A(t,\omega)z + a(t,\omega,z) + b_j(t,\omega,z) + c_j(t,\omega,z), \quad (t,z)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n, \quad (j,\omega)\in\mathbb{N}\times\Omega, \qquad (6.5)$$

где (напомним, что $\delta_{u_j(t,\omega)} \doteq \mu_j(t,\omega)$)

$$c_j(t,\omega,z) \doteq \langle \mu_j(t,\omega), f(t,x(t,\omega)-z,u) - f_j(t,x(t,\omega)-z,u)\rangle, \qquad (6.6)$$

а $A(t,\omega)$, $a(t,\omega,z)$ и $b_j(t,\omega,z)$ определяются равенствами в (4.3) при $f(t,x,u)=\mathfrak{f}(t,x,v(t),u)$.

Для каждой пары $(j,\omega)\in\mathbb{N}\times\Omega$ рассмотрим оператор $\mathcal{P}_j[\cdot,\omega] : B(\mathbb{R},O_r[0]) \to B(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$, определенный для любой функции $z\in B(\mathbb{R},O_r[0])$ равенством $\mathcal{P}_j[z(\cdot),\omega](t) \doteq \mathfrak{F}_j[z(\cdot),\omega](t)+\mathbb{P}_j[z(\cdot),\omega](t)$, где оператор $\mathfrak{F}_j[z(\cdot),\omega]$ задается равенством (4.4) при указанных $a(t,\omega,z)$ и $b_j(t,\omega,z)$, а

$$\mathbb{P}_j[z(\cdot),\omega](t) \doteq \int_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(t,s;\omega)c_j(s,\omega,z(s))ds, \quad t\in\mathbb{R}.$$

Лемма 6.1. *Имеет место равенство*

$$\lim_{j\to\infty}(\sup\{\sup_{(t,\omega)\in\mathbb{R}\times\Omega}|\mathbb{P}_j[z(\cdot),\alpha,\omega](t)|, \ z(\cdot)\in B(\mathbb{R},O_r[0])\}) = 0.$$

Доказательство. Полагаем при $\gamma>0$ и всех $t\in\mathbb{R}$

$$\mathfrak{w}^{(1)}_{\gamma}(t) \doteq \sup\{|\mathfrak{f}(t,x,v_1,u)-\mathfrak{f}(t,x,v_2,u)|, \quad (x,v_k,u)\in K_r\times\mathcal{V}\times\mathfrak{U}, \quad k=1,2, \quad |v_1-v_2|\le\gamma\},$$

и аналогично задаем $\mathfrak{w}^{(2)}_{\gamma}(t)$ при $\mathfrak{f}=\mathfrak{f}'_x$. Из ограничений, наложенных на $\mathfrak{f}$ и $\mathfrak{f}'_x$, в силу леммы 1.1 вытекает

$$\lim_{\gamma\downarrow 0}\left(\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}\mathfrak{w}^{(l)}_{\gamma}(s)ds\right) = 0, \quad l=1,2. \qquad (6.7)$$

Следовательно, для произвольного $\varepsilon>0$ найдется такое $\gamma=\gamma(\varepsilon)>0$, что $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}\int\limits_t^{t+1}\mathfrak{w}^{(1)}_{\gamma}(s)ds \le \frac{\varepsilon}{2\mathfrak{k}}$, где $\mathfrak{k}>0$ задается равенством (4.6). Теперь, если $T_j(t) \doteq \{s\in[t,t+1] : |v(s)-v_j(s)|\ge\gamma\}$, $(t,j)\in\mathbb{R}\times\mathbb{N}$, то (см. определение функции $\mathfrak{w}^{(1)}_{\gamma}(t)$, а также (6.4) и (6.6)) для каждой функции $z(\cdot)\in B(\mathbb{R},O_r[0])$

$$|\mathbb{P}_j[z(\cdot),\omega](t)| \le \sum_{i=0}^{\infty}\Bigg\{\mathfrak{r}_1 e^{-\sigma_1 i}\left(\int_{T_j(t-i)}|c_j(s,\omega,z(s))|ds + 2\mathfrak{d}\,\mathrm{mes}\,T_j(t-i)\right) +$$

$$+\mathfrak{r}_2 e^{-\sigma_2 i}\left(\int_{T_j(t+i)}|c_j(s,\omega,z(s))|ds + 2\mathfrak{d}\,\mathrm{mes}\,T_j(t+i)\right)\Bigg\} \le$$

$$\le \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{2}\mathfrak{r}_k e^{-\sigma_k i}\left(\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}w^{(1)}_{\gamma}(s)ds + \frac{2\mathfrak{d}}{\gamma}d(v(\cdot),v_j(\cdot))\right) < \varepsilon/2 + \frac{2\mathfrak{k}\mathfrak{d}}{\gamma}d(v(\cdot),v_j(\cdot)).$$

Отсюда в силу (6.2) вытекает нужное равенство.

Теперь для заданного $q \in (0,1)$ выбираем $\delta > 0$, при котором выполняется неравенство (4.6), и пусть $\beta \in (0, \delta/2]$.

Лемма 6.2. *Найдется такое $\iota \in \mathbb{N}$, что при $j \geq \iota$ и всех $z_1, z_2 \in B(\mathbb{R}, O_\beta[0])$*

$$\sup_{(t,\omega)\in\mathbb{R}\times\Omega} |\mathbb{P}_j[z_1(\cdot),\omega](t) - \mathbb{P}_j[z_2(\cdot),\omega](t)| < 3q\|z_1 - z_2\|_C.$$

Доказательство. Для любых $z_1, z_2 \in B(\mathbb{R}, O_\beta[0])$ и $f'_x(t,x,u) = \mathfrak{f}'_x(t,x,v(t),u)$ имеем (см. (6.4)) соотношения

$$|\mathbb{P}_j[z_1(\cdot),\omega](t) - \mathbb{P}_j[z_2(\cdot),\omega](t)| \leq$$

$$\leq \bigg\{ \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{G}(t,s)| \Big| \Big\langle \mu(s,\alpha,\omega), \int_0^1 (f'_x(s,\widehat{x}(s) - z_2(s) + \theta(z_2(s) - z_1(s)),u) - f'_x(s,\widehat{x}(s),u))d\theta \Big\rangle \Big| ds +$$

$$+ \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{G}(t,s)| \Big| \Big\langle \mu(s,\alpha,\omega), \int_0^1 (f'_{jx}(s,\widehat{x}(s) - z_2(s) + \theta(z_2(s) - z_1(s)),u) - f'_{jx}(s,\widehat{x}(s),u))d\theta \Big\rangle \Big| ds +$$

$$+ J_j(t,\omega) \bigg\} \|z_1 - z_2\|_C \leq \bigg(2\mathfrak{k} \sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+1} \mathfrak{w}^{(1)}_\delta(s)ds + J_j(t,\omega) \bigg) \|z_1 - z_2\|_C \overset{(4.6)}{\leq} (2q + J_j(t,\omega))\|z_1 - z_2\|_C,$$

где $J_j(t,\omega) \doteq \int\limits_{\mathbb{R}} |\mathcal{G}(t,s)|\, |\langle \mu_j(s,\omega), f'_x(s,\widehat{x}(s),u) - f'_{jx}(s,\widehat{x}(s),u)\rangle| ds$. Поскольку при всех $j \in \mathbb{N}$ и $\gamma > 0$ (см. доказательство леммы 6.1) $J_j(t,\omega) \leq \mathfrak{k}\Big(\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \int\limits_t^{t+1} \mathfrak{w}^{(2)}_\gamma(s)ds + \frac{2\mathfrak{d}}{\gamma} d(v(\cdot), v_j(\cdot)) \Big)$, то (см. (6.7) при $l = 2$), выбрав $\gamma > 0$ и $\iota \in \mathbb{N}$ так, чтобы $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \int\limits_t^{t+1} \mathfrak{w}^{(2)}_\gamma(s)ds < q/(2\mathfrak{k})$ и (см. (6.2)) при всех $j \geq \iota$ $d(v_\alpha(\cdot), v_\alpha(\cdot)) < \gamma_1 q/(4\mathfrak{d}\mathfrak{k})$, получим нужное неравенство.

Теперь, используя леммы 6.1 и 6.2, свойства оператора $\mathfrak{F}_j[\cdot,\omega]$ при $f(t,x,u) = \mathfrak{f}(t,x,v(t),u)$, приведенные в доказательстве теоремы 2.1, следуя схеме доказательства этой теоремы для оператора $\mathcal{P}_j[\cdot,\omega](t) \doteq \mathfrak{F}_j[\cdot,\omega](t) + \mathbb{P}_j[\cdot,\omega](t)$, получим существование такого j_0, что при всех $j \geq j_0$ и каждом $\omega \in \Omega$ система (6.5) будет иметь такое п. п. по Бору решение $z_j(\cdot,\omega)$, что $\|z_j(\cdot,\omega)\|_C < \beta < r$ и $\lim\limits_{j\to\infty} (\sup\limits_{\omega\in\Omega} \|z_j(\cdot,\omega)\|_C) = 0$, а значит, функция $x_j(\cdot,\omega) = x(\cdot,\omega) - z_j(\cdot,\omega)$ будет п. п. по Бору решением системы (6.3) с указанными в теореме 6.1 свойствами.

Литература

1. Варга Дж. *Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями.* – М.: Наука, 1977. – 623 с.
2. Гамкрелидзе Р.В. *Основы оптимального управления.* – Тбилиси: Изд-во Тбилиск. ун-та, 1975. – 230 с.
3. Гамкрелидзе Р.В. *Скользящие режимы в теории оптимального управления* // Тр. матем. ин-та АН СССР. – 1985. – Т. 169. – С. 180–193.
4. Ченцов А.Г. *Приложения теории меры к задачам управления.* – Свердловск: Средн.-Урал. кн. изд-во, 1985. – 126 с.
5. Субботин А.И., Ченцов А.Г. *Оптимизация гарантии в задачах управления.* – М.: Наука, 1981. – 287 с.
6. Красовский Н.Н. *Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированного результата.* – М.: Наука, 1985. – 518 с.
7. Ченцов А.Г. *Конечно-аддитивные меры и релаксации экстремальных задач.* – Екатеринбург: УИФ “Наука”, 1993. – 232 с.
8. Пак В.Е., Ченцов А.Г. *Некоторые топологические свойства обобщенных решений нелинейных управляемых систем* // Дифференц. уравнения. – 1989. – Т. 25. – № 11. – С. 607–618.

9. Серов В.П., Ченцов А.Г. *Об одной конструкции расширения задачи управления с интегральными ограничениями* // Дифференц. уравнения. – 1990. – Т. 26. – № 4. – С. 607–618.
10. Левитан Б.М. *Почти периодические функции.* – М.: Гостехиздат, 1953. – 396 с.
11. Fink A.M. *Almost periodic differential equation* // Lect. Notes Math. – 1973. – V. 377. – 336 p.
12. Иванов А.Г. *О непрерывной дифференцируемости по параметру почти периодического решения* // Дифференц. уравнения. – 2001. – Т. 37. – № 5. – С. 601–608.
13. Иванов А.Г. *О непрерывной зависимости почти периодического решения от мерозначного управления* // Дифференц. уравнения. – 1992. – Т. 28. – № 11. – С. 1907–1915.
14. Иванов А.Г. *Об одном свойстве почти периодического интеграла, зависящего от параметра* // Изв. вузов. Математика. – 2001. – № 6. – С. 34–43.
15. Иванов А.Г. *Элементы аппарата задач оптимального управления почти периодическими движениями.* I. – Удмуртск. ун-т. – Ижевск, 2001. – 49 с. – Деп. в ВИНИТИ 28.06.2001, № 1536-В01.
16. Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.* – М.: Наука, 1970. – 534 с.
17. Массера Х.Л., Шеффер Х.Х. *Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства.* – М.: Мир, 1970. – 456 с.
18. Иванов А.Г. *О ряде свойств линейных почти периодических систем управления.* – Удмуртск. ун-т. – Ижевск, 2001. – 25 с. – Деп. в ВИНИТИ 27.08.2001, № 1902-В01.
19. Кларк Ф. *Оптимизация и негладкий анализ.* – М.: Наука, 1988. – 280 с.

Удмуртский государственный университет

Поступила
11.09.2001