ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2003 МАТЕМАТИКА № 7 (494)

УДК 517.948

К.А. КАСЫМОВ, М.К. ДАУЫЛБАЕВ

СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С НАЧАЛЬНЫМИ СКАЧКАМИ ЛЮБОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим на отрезке $0 \le t \le 1$ линейное интегро-дифференциальное уравнение с малым параметром $\varepsilon > 0$ вида

$$L_\varepsilon y \equiv \varepsilon y^{(n)} + A_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + A_n(t)y = F(t) + \\ + \int_0^1 [H_0(t,x)y(x,\varepsilon) + H_1(t,x)y'(x,\varepsilon) + \cdots + H_{m+1}(t,x)y^{(m+1)}(x,\varepsilon)]dx \quad (1)$$

с начальными условиями в правой точке данного отрезка

$$y^{(i)}(1,\varepsilon) = \alpha_i, \quad i = \overline{0, n-1}, \quad (2)$$

где α_i, $i = \overline{0, n-1}$, — некоторые известные постоянные, а m — любое целое число, удовлетворяющее неравенствам $0 \le m \le n-3$.

Пусть выполнены следующие условия:

I. Функции $A_i(t)$, $F(t)$, $i = \overline{1, n}$, на отрезке $0 \le t \le 1$, а $H_i(t,x)$, $i = \overline{0, m+1}$, в области $D = (0 \le t \le 1,\ 0 \le x \le 1)$ являются непрерывными вместе со своими производными до $(n-1)$-го порядка и $H_{m+1}(t,0) \ne 0 \ \ \forall t \in [0,1]$.

II. Функция $A_1(t)$ удовлетворяет неравенству

$$A_1(t) \ge \overline{\gamma} = \mathrm{const} > 0 \quad \forall t \in [0,1].$$

В данной статье для интегро-дифференциальной задачи (1), (2) доказываются теорема о существовании, единственности, интегральном представлении, а также теоремы об оценке решений и разности между решениями исходной сингулярно возмущенной и видоизмененной невозмущенной задач. Показано, что решение задачи (1), (2) обладает явлением начального скачка любого порядка, т. е. в точке $t = 0$ некоторые компоненты решения при $\varepsilon \to 0$ являются бесконечно большими разных порядков. Это свойство решения интегро-дифференциальной задачи существенным образом зависит от порядка производных, входящих под знаком интеграла в правой части уравнения (1).

Отбрасывая в (1) интегральные члены, получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$L_\varepsilon y = F(t) \quad (3)$$

с начальными условиями (2). Известно ([1], с. 236; [2], с. 12), что в силу условия II решение задачи (3), (2) при $\varepsilon \to 0$ и произвольных α_i стремится к бесконечности в полуинтервале $0 \le t < 1$ и, следовательно, не имеет конечного предела.

В противоположность этому решение $y(t,\varepsilon)$ интегро-дифференциальной задачи (1), (2), как показано в данной статье, при $\varepsilon \to 0$ имеет конечный предел $\overline{y}(t)$:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} y^{(i)}(t,\varepsilon) = \begin{cases} \overline{y}^{(i)}(t), & i = \overline{0, m-1}, \quad 0 \le t \le 1; \\ \overline{y}^{(i)}(t), & i = \overline{m, n-1}, \quad 0 < t \le 1. \end{cases} \quad (4)$$

Однако $\overline{y}(t)$ не является решением обычного вырожденного уравнения, получаемого из (1) при $\varepsilon = 0$, а удовлетворяет измененному вырожденному уравнению

$$L_0\overline{y} = F(t) + \int_0^1 [H_0(t,x)\overline{y}(x) + \cdots + H_{m+1}(t,x)\overline{y}^{(m+1)}(x)]dx + \Delta(t) \tag{5}$$

с начальными условиями

$$\overline{y}^{(i)}(1) = \alpha_i, \quad i = \overline{0, n-2}, \tag{6}$$

где $\Delta(t)$ — так называемый начальный скачок интегрального члена, подлежащий определению.

По теореме Нуайона [3] для фундаментальной системы решений (ф. с. р) однородного дифференциального уравнения $L_\varepsilon y = 0$ получаем следующие асимптотические при $\varepsilon \to 0$ представления (см., напр., [4]):

$$y_i(t,\varepsilon) = y_{i0}(t) + \sum_{j=1}^{n-2-m} \varepsilon^j y_{ij}(t) + O(\varepsilon^{n-1-m}), \quad i = \overline{1, n-1},$$

$$y_i^{(k)}(t,\varepsilon) = y_{i0}^{(k)}(t) + \sum_{j=1}^{n-2-m} \varepsilon^j y_{ij}^{(k)}(t) + O(\varepsilon^{n-1-m}), \quad i,k = \overline{1, n-1},$$

$$y_n(t,\varepsilon) = \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \overline{\mu}(x)dx\right)\left(y_{n0}(t) + \sum_{j=1}^{n-2-m} \varepsilon^j y_{nj}(t) + O(\varepsilon^{n-1-m})\right),$$

$$y_n^{(k)}(t,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^k}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \overline{\mu}(x)dx\right)\left(u_{n0}^{(k)}(t) + \sum_{j=1}^{n-2-m} \varepsilon^j u_{nj}^{(k)}(t) + O(\varepsilon^{n-1-m})\right), \quad k = \overline{1, n-1},$$

где

$$\overline{\mu}(t) = -A_1(t), \quad u_{nj}^{(k)}(t) = \sum_{l=0}^{j}\sum_{i=0}^{l} C_k^i h_{n,l-i}^{(k-i)}(t) y_{n,j-l}^{(i)}(t), \quad j = \overline{0, n-2-m}.$$

Здесь C_k^i — число сочетаний из k элементов по i, а $h_{nj}^{(k)}(t)$, $i = \overline{1, n-1}$, определяются рекуррентными формулами

$$h_{nj}^{(k)}(t) = \begin{cases} \overline{\mu}^k(t), & j = 0; \\ \sum\limits_{i=0}^{k-1-j} \overline{\mu}^i(t)\dfrac{d}{dt}h_{n,j-1}^{(k-1-i)}(t), & j = \overline{1, k-1}; \quad h_{nj}^{(l)}(t) = 0, \quad l < 0; \\ 0, & j \geq k. \end{cases}$$

Коэффициенты $y_{ik}(t)$, $i = \overline{1, n-1}$, $k = \overline{0, n-2-m}$, последовательно определяются из линейных уравнений $(n-1)$-го порядка, причем функции $y_{i0}(t) \equiv \overline{y}_i(t)$, $i = \overline{1, n-1}$, являются ф. с. р. однородного вырожденного дифференциального уравнения $L_0 y = 0$.

Пусть функции $K_i(t,s,\varepsilon)$, $i = \overline{0, n-1}$, при $0 \leq s \leq t \leq 1$ являются решениями однородной сингулярно возмущенной дифференциальной задачи

$$L_\varepsilon K_i(t,s,\varepsilon) = 0, \quad K_i^{(j)}(s,s,\varepsilon) = \delta_{ij}, \quad i,j = \overline{0, n-1}. \tag{7}$$

Решения $K_i(t,s,\varepsilon)$, $i = \overline{0, n-1}$, задачи (7) называются функциями Коши, и их можно представить в виде

$$K_i^{(j)}(t,s,\varepsilon) = W_{i+1}^{(j)}(t,s,\varepsilon)W^{-1}(s,\varepsilon), \quad i,j = \overline{0, n-1},$$

где $W_{i+1}^{(j)}(t,s,\varepsilon)$ — определитель, получаемый из вронскиана $W(s,\varepsilon)$ заменой его $(i+1)$-й строки ф. с. р. $y_1^{(j)}(t,\varepsilon), \ldots, y_n^{(j)}(t,\varepsilon)$ сингулярно возмущенного однородного дифференциального уравнения $L_\varepsilon y = 0$.

Пусть функции $Q_i(t,\varepsilon)$, $\Phi_i(t,\varepsilon)$, $i=\overline{0,n-1}$, являются решениями следующих интегро-дифференциальных задач:

$$\begin{aligned}&L_\varepsilon Q_i(t,\varepsilon)=\int_0^1\left[H_0(t,x)Q_i(x,\varepsilon)+\dots+H_{m+1}(t,x)Q_i^{(m+1)}(x,\varepsilon)\right]dx,\\&Q_i^{(j)}(0,\varepsilon)=\delta_{ij},\quad i,j=\overline{0,n-1},\end{aligned}\tag{8}$$

$$\begin{aligned}&L_\varepsilon \Phi_i(t,\varepsilon)=\int_0^1\left[H_0(t,x)\Phi_i(x,\varepsilon)+\dots+H_{m+1}(t,x)\Phi_i^{(m+1)}(x,\varepsilon)\right]dx,\\&\Phi_i^{(j)}(1,\varepsilon)=\delta_{ij},\quad i,j=\overline{0,n-1}.\end{aligned}\tag{9}$$

Решения задач (8), (9) назовем специальными функциями задачи Коши (1), (2).

III. Пусть число $\lambda=1$ не является собственным значением ядра

$$K(t,s)=\frac{1}{A_1(s)\overline{W}(s)}\int_s^1\sum_{j=0}^{m+1}H_j(t,x)\overline{W}_{n-1}^{(j)}(x,s)dx,\tag{10}$$

где $\overline{W}(t)$ — вронскиан ф. с. р. $\overline{y}_i(t)$, $i=\overline{1,n-1}$, однородного вырожденного дифференциального уравнения $L_0y=0$, а $\overline{W}_{n-1}^{(j)}(t,s)$ — определитель, получаемый из вронскиана $\overline{W}(s)$ заменой его $(n-1)$-й строки строкой $\overline{y}_1^{(j)}(t),\dots,\overline{y}_{n-1}^{(j)}(t)$.

Лемма 1. *Если выполнены условия* I–III, *то решение задачи* (8) *на отрезке* $0\le t\le 1$ *существует, единственно и выражается формулой*

$$Q_i(t,\varepsilon)=K_i(t,0,\varepsilon)+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t K_{n-1}(t,s,\varepsilon)\left[a_i(s,0,\varepsilon)+\int_0^1 R_\varepsilon(s,p)a_i(p,0,\varepsilon)dp\right]ds,$$

где

$$a_i(t,s,\varepsilon)=\int_s^1[H_0(t,x)K_i(x,s,\varepsilon)+\dots+H_{m+1}(t,x)K_i^{(m+1)}(x,s,\varepsilon)]dx,\quad i=\overline{0,n-1},$$

$K_i(t,s,\varepsilon)$, $i=\overline{0,n-1}$, — *функции Коши,* $R_\varepsilon(t,s)$ — *резольвента ядра* $K_\varepsilon(t,s)=K(t,s)+O(\varepsilon)$, *где* $K(t,s)$ *имеет вид* (10) *и представляет собой ядро интегрального уравнения, соответствующего вырожденной задаче* (5), (6).

Составим теперь определитель

$$\omega(1,\varepsilon)=\det\{Q_j^{(i)}(1,\varepsilon)\},\quad i,j=\overline{0,n-1},\tag{11}$$

где i — номер строки, а j — номер столбца. Вместо элементов этого определителя подставляем их асимптотические представления, а затем, применяя к столбцам элементарные преобразования, для определителя (11) получим асимптотическое при $\varepsilon\to 0$ представление

$$\omega(1,\varepsilon)=-\varepsilon^{n-1-m}(\Delta_0^{(n-1)}(0,0))^{n-1}\Delta_0^{(m)}(0,0)[\overline{\omega}(1)+O(\varepsilon)],\tag{12}$$

где $\Delta_0^{(j)}(0,0)=\overline{\mu}^{j-n+1}(0)$, а $\overline{\omega}(1)$ — главная, не зависящая от ε часть асимптотического представления (12):

$$\overline{\omega}(1)=\begin{vmatrix}T_{00}^{n-1,0}(1)&\cdots&T_{n-2,0}^{n-1,0}(1)&H_{m+1}(1)\\ \hdotsfor{4}\\ T_{00}^{n-1,n-2}(1)&\cdots&T_{n-2,0}^{n-1,n-2}(1)&H_{m+1}^{(n-2)}(1)\\ \overline{T}_{00}^{n-1,n-1}(1)&\cdots&\overline{T}_{n-2,0}^{n-1,n-1}(1)&\overline{H}_{m+1}^{(n-1)}(1)\end{vmatrix},\tag{13}$$

где функции $T_{i0}^{n-1,i}(t)$, $\overline{T}_{i0}^{n-1,n-1}(t)$, $H_{m+1}^{(i)}(t)$, $\overline{H}_{m+1}^{(n-1)}(t)$, $i,j=\overline{0,n-2}$, определенным образом выражаются через коэффициенты уравнения (1).

IV. Пусть $\overline{\omega}(1)\ne 0$.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия* I–IV. *Тогда специальные функции* $\Phi_i(t,\varepsilon)$, $i=\overline{0,n-1}$, *являющиеся решениями задачи* (9), *на отрезке* $0\le t\le 1$ *существуют, единственны и выражаются формулой*

$$\Phi_i(t,\varepsilon)=\frac{\omega_{i+1}(t,1,\varepsilon)}{\omega(1,\varepsilon)},\quad i=\overline{0,n-1}, \tag{14}$$

где $\omega(1,\varepsilon)$ *имеет вид* (12), *а* $\omega_{i+1}(t,1,\varepsilon)$, $i=\overline{0,n-1}$, — *определитель, получаемый из определителя* $\omega(1,\varepsilon)$ *заменой его* $(i+1)$*-й строки строкой* $Q_0(t,\varepsilon),\dots,Q_{n-1}(t,\varepsilon)$.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* I–IV. *Тогда решение задачи* (1), (2) *на отрезке* $0\le t\le 1$ *существует, единственно и выражается формулой*

$$y(t,\varepsilon)=(\alpha_0-P(1,\varepsilon))\Phi_0(t,\varepsilon)+\dots+(\alpha_{n-1}-P^{(n-1)}(1,\varepsilon))\Phi_{n-1}(t,\varepsilon)+P(t,\varepsilon),$$

где специальные функции $\Phi_i(t,\varepsilon)$, $i=\overline{0,n-1}$, *выражаются формулой* (14), *а функция* $P(t,\varepsilon)$ *является решением уравнения* (1) *с нулевыми начальными условиями и выражается формулой*

$$P(t,\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t K_{n-1}(t,s,\varepsilon)\Big[F(s)+\int_0^1 R_\varepsilon(s,p)F(p)dp\Big]ds.$$

Лемма 3. *Пусть выполнены условия* I–IV. *Тогда для функции* $\Phi_i(t,\varepsilon)$, $i=\overline{0,n-1}$, *при* $0\le t\le 1$ *справедливы асимптотические при* $\varepsilon\to 0$ *представления*:

$$\Phi_i^{(j)}(t,\varepsilon)=\frac{\overline{\omega}_{i+1}^{(j)}(t,1)}{\overline{\omega}(1)}+O(\varepsilon),\quad j=\overline{0,m-1},$$

$$\Phi_i^{(m)}(t,\varepsilon)=\frac{\overline{\omega}_{i+1}^{(m)}(t,1)}{\overline{\omega}(1)}+\frac{\Delta_0^{(m)}(t,0)}{\Delta_0^{(m)}(0,0)}\frac{A_{i+1,n}}{\overline{\omega}(1)}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\overline{\mu}(x)dx\right)+O(\varepsilon),$$

$$\Phi_i^{(m+1)}(t,\varepsilon)=\frac{\overline{\omega}_{i+1}^{(m+1)}(t,1)}{\overline{\omega}(1)}+\frac{1}{\varepsilon}\frac{\Delta_0^{(m+1)}(t,0)}{\Delta_0^{(m)}(0,0)}\frac{A_{i+1,n}}{\overline{\omega}(1)}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\overline{\mu}(x)dx\right)+$$
$$+O\Big(\varepsilon+\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\overline{\mu}(x)dx\right)\Big),$$

. . . .

$$\Phi_i^{(n-1)}(t,\varepsilon)=\frac{\overline{\omega}_{i+1}^{(n-1)}(t,1)}{\overline{\omega}(1)}+\frac{1}{\varepsilon^{n-1-m}}\frac{\Delta_0^{(n-1)}(t,0)}{\Delta_0^{(m)}(0,0)}\frac{A_{i+1,n}}{\overline{\omega}(1)}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\overline{\mu}(x)dx\right)+$$
$$+O\Big(\varepsilon+\frac{1}{\varepsilon^{n-2-m}}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\overline{\mu}(x)dx\right)\Big),$$

где $\overline{\mu}(t)=-A_1(t)<0$, $\overline{\omega}(1)$ *имеет вид* (13), $\overline{\omega}_{i+1}^{(j)}(t,1)$, $i,j=\overline{0,n-1}$, — *определитель, получаемый из* $\overline{\omega}(1)$ *заменой его* $(i+1)$*-й строки строкой из элементов* $T_{00}^{n-1,j}(t),\dots,T_{n-2,0}^{n-1,j}(t)$, $H_{m+1}^{(j)}(t)$ *для* $j=\overline{0,n-2}$ *и строкой из элементов* $\overline{T}_{00}^{n-1,n-1}(t),\dots,\overline{T}_{n-2,0}^{n-1,n-1}(t)$, $\overline{H}_{m+1}^{(n-1)}(t)$ *для* $j=n-1$, *а* $A_{i+1,n}$, $i=\overline{0,n-1}$, — *алгебраическое дополнение* $(i+1)$*-го элемента последнего столбца определителя* $\overline{\omega}(1)$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* I–IV. *Тогда на отрезке* $[0,1]$ *для решения* $y(t,\varepsilon)$ *задачи* (1), (2) *при* $\varepsilon\to 0$ *справедливы асимптотические оценки*

$$|y^{(i)}(t,\varepsilon)|\le\frac{K}{\overline{\omega}(1)}(|\alpha_0|+\dots+|\alpha_{n-1}|+\|F(t)\|),\quad i=\overline{0,m-1},$$

$$|y^{(i)}(t,\varepsilon)|\le\frac{K}{\overline{\omega}(1)}\Big(1+\frac{1}{\varepsilon^{i-m}}\exp\left(-\gamma\frac{t}{\varepsilon}\right)\Big)(|\alpha_0|+\ldots+|\alpha_{n-1}|+\|F(t)\|),\quad i=\overline{m,n-1},$$

где $\overline{\omega}(1)$ *имеет вид* (13), *а* $K>0$, $\gamma>0$ — *некоторые постоянные, не зависящие от* ε.

Введем понятие порядка начального скачка.

Определение. Будем говорить, что решение интегро-дифференциальной задачи (1), (2) обладает в точке $t = 0$ явлением начального скачка k-го порядка, если оно в этой точке имеет следующий порядок роста

$$y^{(k+1)}(0,\varepsilon) = O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right),\ y^{(k+2)}(0,\varepsilon) = O\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right), \ldots, y^{(n-1)}(0,\varepsilon) = O\left(\frac{1}{\varepsilon^{n-1-k}}\right),\quad \varepsilon \to 0.$$

Из теоремы 2 следует, что значения $y^{(i)}(0,\varepsilon)$, $i = \overline{0,m}$, ограничены при $\varepsilon \to 0$, а значения $y^{(i)}(0,\varepsilon)$, $i = \overline{m+1, n-1}$, при $\varepsilon \to 0$ являются бесконечно большими порядка $O(\frac{1}{\varepsilon^{i-m}})$, т. е. решение задачи (1), (2) в левой точке $t = 0$ обладает явлением начального скачка m-го порядка.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* I–IV. *Тогда для разности между решениями сингулярно возмущенной задачи* (1), (2) *и невозмущенной задачи* (5), (6) *на отрезке* $0 \le t \le 1$ *справедливы асимптотические оценки*

$$|y^{(i)}(t,\varepsilon) - \overline{y}^{(i)}(t)| \le K\varepsilon + K \max_{0\le t\le 1}\left|\Delta(t) - \frac{\overline{\omega}_n(1)}{\overline{\omega}(1)}H_{m+1}(t,0)\right|,\quad i = \overline{0, m-1},$$

$$|y^{(i)}(t,\varepsilon) - \overline{y}^{(i)}(t)| \le K\varepsilon + K \max_{0\le t\le 1}\left|\Delta(t) - \frac{\overline{\omega}_n(1)}{\overline{\omega}(1)}H_{m+1}(t,0)\right| + \frac{K}{\varepsilon^{i-m}}\exp\left(-\gamma\frac{t}{\varepsilon}\right),\quad i = \overline{m, n-1},$$

где $K > 0$, $\gamma > 0$ *— некоторые постоянные, не зависящие от* ε; $\overline{\omega}(1)$ *имеет вид* (13), $\overline{\omega}_n(1)$ *— определитель, получаемый из* $\overline{\omega}(1)$ *заменой его* n*-го столбца столбцом* $\alpha_0 - P(1), \ldots, \alpha_{n-1} - P^{(n-1)}(1)$.

Из теоремы 3 следует, что для стремления решения $y(t,\varepsilon)$ сингулярно возмущенной задачи (1), (2) при $\varepsilon \to 0$ к решению $\overline{y}(t)$ невозмущенной задачи (5), (6) достаточно положить

$$\Delta(t) = \frac{\overline{\omega}_n(1)}{\overline{\omega}(1)}H_{m+1}(t,0). \tag{15}$$

Тогда имеют место предельные равенства (4), т. е. решение сингулярно возмущенной задачи (1), (2) при $\varepsilon \to 0$ стремится к решению $\overline{y}(t)$ невозмущенной задачи (5), (6), где начальный скачок $\Delta(t)$ выражается формулой (15).

Литература

1. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. *Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений.* – М.: Наука, 1973. — 242 с.
2. Иманалиев М.И. *Асимптотические методы в теории сингулярно-возмущенных интегро-дифференциальных систем.* – Фрунзе: Илим, 1972. - 356 с.
3. Noaillon P. *Developpements asymtotiques dans les equations differentialles lineares a parametre variable* // Mem. Soc. Sci. Liege. – 1912 . – V. 3. – № 11. – P. 197.
4. Шабат А.Б. *Краевые задачи с малым параметром для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений* // УМН. – 1962. – Т. XVII. – Вып. 1. – С. 235–241.

Казахский национальный университет

Поступили
полный текст 24.07.2001
краткое сообщение 20.01.2003