ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2005 МАТЕМАТИКА № 10 (521)

УДК 517.956

Г.А. СВИРИДЮК, И.К. ТРИНЕЕВА

СБОРКА УИТНИ В ФАЗОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ УРАВНЕНИЯ ХОФФА

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞. В цилиндре $\Omega\times\mathbb{R}$ уравнение Хоффа

$$(\lambda + \Delta)u_t = \alpha u + \beta u^3 \tag{0.1}$$

при $n = 1$ моделирует динамику выпучивания двутавровой балки [1]. Здесь параметр $\lambda \in \mathbb{R}_+$ соответствует внешней нагрузке, а параметры $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ характеризуют свойства балки; искомая функция $u = u(x,t)$ определяет отклонение балки от вертикали.

Задача Коши–Дирихле

$$\begin{aligned} u(x,0) &= u_0(x), \qquad x \in \Omega; \\ u(x,t) &= 0, \qquad (x,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{0.2}$$

для уравнения (0.1) изучалась в [2] методами теории ветвления. В [3] начато изучение фазового пространства уравнения (0.1) при $1 \le n \le 4$. Там показано, что в фазовом пространстве уравнения Хоффа лежат те точки $u \in L_4(\Omega)$, для которых

$$\int_\Omega (\alpha + 3\beta u^2)u\varphi_l dx = 0, \quad \lambda = -\lambda_l, \tag{0.3}$$

причем определитель

$$\left| \int_\Omega (\alpha + 3\beta u^2)\varphi_k\varphi_l dx \right| \ne 0, \quad \lambda = -\lambda_l, \ \ \lambda = -\lambda_k. \tag{0.4}$$

Здесь $\{\varphi_m\}$ — ортонормированное (в смысле $L_2(\Omega)$) семейство собственных функций однородной задачи Дирихле для оператора Лапласа Δ в области Ω, соответствующих собственным значениям $\{\lambda_m\}$, которые занумерованы по невозрастанию с учетом кратности. (Если $-\lambda \notin \{\lambda_m\}$, то фазовое пространство совпадает с пространством $L_4(\Omega)$, а условие (0.4) исчезает.)

Другими словами, в [3] показано, что фазовое пространство (0.3) уравнения Хоффа локально (т. е. в некоторых окрестностях тех своих точек, для которых выполняется (0.4)) является банаховым C^∞-многообразием, моделируемым некоторым дополнительным к ядру $\ker(\lambda+\Delta)$ подпространством. В [4] показано, что при $\alpha\beta > 0$ фазовым пространством (0.3) служит простое банахово C^∞-многообразие (т. е. любой его атлас эквивалентен атласу, содержащему единственную карту), причем в любой его точке выполняется (0.4).

Исследуем фазовое пространство уравнения Хоффа в случае $\alpha\beta < 0$ и при нарушении условия (0.4). Чтобы привлечь идеи и методы [5], ограничимся случаем $\dim\ker(\lambda+\Delta) = 1$, который заведомо имеет место при $n = 1$. Основной результат статьи — характеристика особенностей фазового пространства (0.3) посредством относительно присоединенных векторов.

Первый параграф данной работы носит вспомогательный характер, он содержит результаты из [6], представленные в удобном для дальнейшего виде. Во втором, опираясь на результаты

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Министерства образования и науки России, грант № PO 02-1.1-82.

[3], [7], рассматриваем задачу (0.1), (0.2) в абстрактном виде. В третьем параграфе содержится основной результат статьи. Список литературы не претендует на полноту.

Исследования проводятся в вещественных банаховых пространствах, но в "спектральных" вопросах вводится их естественная комплексификация. Все контуры ориентированы движением против часовой стрелки и ограничивают области, лежащие слева при таком движении. Символами $\mathbb{I}$ и $\mathbb{O}$ обозначены единичный и нулевой операторы, области определения которых ясны из текста.

1. Относительно σ-ограниченные операторы и относительно присоединенные векторы

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ — банаховы пространства, оператор $L \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ (т. е. линеен, замкнут и плотно определен), а оператор $M \in L(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ (т. е. линеен и непрерывен). Введем L-резольвентное множество $\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in L(\mathfrak{F};\mathfrak{U})\}$ и L-спектр $\sigma^L(M) = \mathbb{C} \setminus \rho^L(M)$ оператора M. Нетрудно показать [6], что L-резольвентное множество всегда открыто, поэтому L-спектр всегда замкнут.

Определение 1.1. Оператор M называется *спектрально ограниченным относительно* оператора L (*(L,σ)-ограниченным*), если

$$\exists a \in \mathbb{R}_+ \ \ \forall \mu \in \mathbb{C} \ \ (|\mu| > a) \Rightarrow (\mu \in \rho^L(M)).$$

Пусть оператор M (L,σ)-ограничен. Выберем контур $\Gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = r > a\}$ и построим операторы

$$P = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma R^L_\mu(M)d\mu, \quad Q = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma L^L_\mu(M)d\mu.$$

Здесь $R^L_\mu(M) = (\mu L - M)^{-1}L$ — правая, а $L^L_\mu(M) = L(\mu L - M)^{-1}$ — левая L-резольвенты оператора M. Нетрудно показать, что операторы $P \in L(\mathfrak{U})$ и $Q \in L(\mathfrak{F})$ являются проекторами [6]. Положим $\mathfrak{U}^0 = \ker P$, $\mathfrak{U}^1 = \operatorname{im} P$, $\mathfrak{F}^0 = \ker Q$, $\mathfrak{F}^1 = \operatorname{im} Q$, а через L_k (M_k) обозначим сужение оператора $L(M)$ на $\operatorname{dom} L \cap \mathfrak{U}^k$ ($\mathfrak{U}^k$), $k = 0,1$.

Теорема 1.1. *Пусть оператор M (L,σ)-ограничен. Тогда*

(i) *операторы $L_k \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}^k;\mathfrak{F}^k)$, $M_k \in L(\mathfrak{U}^k;\mathfrak{F}^k)$, $k = 0,1$;*
(ii) *существуют операторы $L_1^{-1} \in L(\mathfrak{F}^1;\mathfrak{U}^1)$, $M_0^{-1} \in L(\mathfrak{F}^0;\mathfrak{U}^0)$.*

Линеал $\mathfrak{U}^0_0 = \operatorname{dom} L \cap \mathfrak{U}^0$, снабженный "нормой графика" $|||\cdot||| = \|\cdot\|_\mathfrak{U} + \|L\cdot\|_\mathfrak{F}$, является банаховым пространством $\mathfrak{U}^0_0 = (\operatorname{dom} L \cap \mathfrak{U}^0, |||\cdot|||)$, плотно и непрерывно вложенным в пространство $\mathfrak{U}^0$. Предположим, что в условиях теоремы 1.1 оператор

$$H = M_0^{-1}L_0 \in L(\mathfrak{U}^0_0). \tag{1.1}$$

Очевидно, оператор $S = L_1^{-1}M_1 \in L(\mathfrak{U}^1)$.

Следствие 1.1. Пусть оператор M (L,σ)-ограничен и выполнено условие (1.1). Тогда

$$(\mu L - M)^{-1} = -\sum_{q=0}^{\infty}\mu^q H^q M_0^{-1}(\mathbb{I} - Q) + \sum_{q=1}^{\infty}\mu^q S^{q-1}L_1^{-1}Q$$

при всех $\mu \in \sigma^L(M)$.

Определение 1.2. Для L-резольвенты $(\mu L - M)^{-1}$ оператора M точка ∞ называется

(i) *устранимой особой точкой*, если $H \equiv \mathbb{O}$;
(ii) *полюсом порядка* $p \in \mathbb{N}$, если $H^p \not\equiv \mathbb{O}$, а $H^{p+1} \equiv \mathbb{O}$;
(iii) *существенно особой точкой*, если $H^q \not\equiv \mathbb{O}$ при любом $q \in \mathbb{N}$.

Пусть вектор $\varphi_0 \in \ker L \setminus \{0\}$, упорядоченное множество $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots\} \subset \mathfrak{U}$ называется *цепочкой M-присоединенных векторов* вектора φ_0, если $L\varphi_{q+1} = M\varphi_q$, $q \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, и $\varphi_q \notin \ker L \setminus \{0\}$, $q \in \mathbb{N}$. Цепочка может быть бесконечной, в частности, она может быть заполнена нулями, если $\ker L \cap \ker M \neq \{0\}$. Однако она обязательно конечна, если в ней существует такой вектор φ_q, что $M\varphi_k \notin \operatorname{im} L$. Мощность конечной цепочки называется ее *длиной*. Порядковый номер M-присоединенного вектора в цепочке (конечной или бесконечной) называется его *высотой*. Линеал, натянутый на все векторы ядра $\ker L$ и все M-присоединенные векторы, называется *M-корневым линеалом* оператора L. Если M-корневой линеал замкнут, то он называется *M-корневым пространством* оператора L.

Теорема 1.2. *Пусть оператор M (L, σ)-ограничен. Тогда*

(i) $\mathfrak{U}^0 = \overline{\ker L}$ *и любой вектор $\varphi \in \ker L \setminus \{0\}$ не имеет M-присоединенных векторов, если ∞ является устранимой особой точкой L-резольвенты оператора M;*

(ii) $\mathfrak{U}^0$ *является замыканием M-корневого линеала оператора L и длина любой цепочки M-присоединенных векторов ограничена числом p, если ∞ является полюсом порядка $p \in \mathbb{N}$ L-резольвенты оператора M;*

(iii) $\mathfrak{U}^0$ *содержит M-корневой линеал оператора L, причем длины всех цепочек M-присоединенных векторов неограничены, если ∞ является существенно особой точкой L-резольвенты оператора M.*

В случае, когда оператор L фредгольмов (т. е. $\operatorname{ind} L = 0$), существует некоторое обращение теоремы 1.2 [6]. Чтобы сформулировать его, удобно считать устранимую особую точку полюсом порядка нуль.

Следствие 1.2. Пусть оператор L фредгольмов. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

(i) оператор M (L, σ)-ограничен, причем ∞ — полюс порядка $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ L-резольвенты оператора M;

(ii) длина любой цепочки M-присоединенных векторов оператора L ограничена числом $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$.

2. Задача Коши для уравнения соболевского типа

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ — банаховы пространства, операторы $L \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, $M \in L(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, $N \in C^\infty(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$. Рассмотрим задачу Коши

$$u(0) = u_0 \tag{2.1}$$

для полулинейного уравнения соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu + N(u). \tag{2.2}$$

Вектор-функцию $u \in C^\infty((-T, T); \mathfrak{U})$ назовем *решением уравнения* (2.2), если она удовлетворяет (2.2) при некотором $T \in \mathbb{R}_+$. Решение уравнения $u = u(t)$ называется *решением задачи* (2.1), (2.2), если оно удовлетворяет (2.1).

Пусть оператор M (L, σ)-ограничен, тогда в силу теоремы 1.1 уравнение (2.2) эквивалентно системе уравнений

$$L_0\dot{u}^0 = (\mathbb{I} - Q)(Mu + N(u)), \tag{2.3}$$

$$\dot{u}^1 = Su^1 + F(u), \tag{2.4}$$

где операторы $S = L_1^{-1}M_1 \in L(\mathfrak{U}^1)$, $F = L_1^{-1}QN \in C^\infty(\mathfrak{U}; \mathfrak{U}^1)$.

Пусть выполнено условие

$$L_0\dot{u}^0 \equiv 0, \tag{2.5}$$

тогда из (2.3) следует, что любое решение уравнения (2.2) лежит (как траектория) в множестве

$$\mathfrak{H} = \{u \in \mathfrak{U} : (\mathbb{I} - Q)(Mu + N(u)) = 0\}.$$

Такие решения названы *квазистационарными траекториями* [7]. Заметим, что условие (2.5) с необходимостью выполняется, если нелинейный член $N \equiv \mathbb{O}$.

Пусть $u_0 \in \mathfrak{H}$. Немного отходя от стандарта [8], некоторую окрестность $O_{u_0} \subset \mathfrak{H}$ точки u_0 будем называть *картой на множестве* $\mathfrak{H}$, если существует такой C^∞-диффеоморфизм $\delta : O^1_{u_0} \to O_{u_0}$ окрестности $O^1_{u_0} \subset \mathfrak{U}^1$ точки $u^1_0 = Pu_0$, что $\delta^{-1} = P$. Если такая карта существует, то множество $\mathfrak{H}$ будем называть *банаховым* C^∞*-многообразием в точке* u_0.

Замечание 2.1. Обозначим через N'_{u_0} производную Фреше оператора N в точке u_0, и пусть оператор $M+N'_{u_0} : \mathfrak{U}^0 \to \mathfrak{F}^0$ — топлинейный изоморфизм. Тогда множество $\mathfrak{H}$ в точке u_0 является банаховым C^∞-многообразием. Действительно, в силу теоремы о неявной функции существуют окрестности $O^1_{u_0} \subset \mathfrak{U}^1$ и $O^0_{u_0} \subset \mathfrak{U}^0$ точек $u^1_0 = Pu_0$ и $u^0_0 = (\mathbb{I} - P)u_0$ соответственно и отображение $d \in C^\infty(O^1_{u_0}; O^0_{u_0})$ такие, что $\delta = \mathbb{I} + d$ является требуемым C^∞-диффеоморфизмом.

Теорема 2.1. *Пусть оператор* M (L, σ)*-ограничен и выполнено условие* (2.5). *Если в точке* u_0 *множество* $\mathfrak{H}$ *является* C^∞*-многообразием, то для некоторого* $T \in \mathbb{R}_+$ *существует единственное решение задачи* (2.1), (2.2).

Доказательство. Пусть $\delta'_{u^1} : \mathfrak{U}^1 \to T_u\mathfrak{H}$ — производная Фреше диффеоморфизма δ в точке $u^1 \in O^1_{u_0}$ ($T_u\mathfrak{H}$ — касательное пространство в точке $u = \delta(u^1)$). Тогда из (2.4) вытекает

$$\dot{u} = \delta'_{u^1}\dot{u}^1 = \delta'_{u^1}(SPu + F(u)) = A(u), \tag{2.6}$$

где $u \in O_{u_0} \subset \mathfrak{H}$. В силу классической теоремы Коши [8] для некоторого $T \in \mathbb{R}_+$ существует единственное решение $u \in C^\infty((-T, T); \mathfrak{H})$ задачи (2.1), (2.6). Как нетрудно проверить, найденная вектор-функция $u = u(t)$ является решением задачи (2.1), (2.2). $\square$

Теорема 2.1 дает достаточные условия существования квазистационарных траекторий. Условие (2.5) заведомо выполняется, если $\ker L = \mathfrak{U}^0$. Если вдобавок оператор L фредгольмов, то условие $\ker L = \mathfrak{U}^0$ эквивалентно отсутствию M-присоединенных векторов (следствие 1.2). Если, кроме того, отсутствуют $(M + N'_{u_0})$-присоединенные векторы оператора L в любой точке $u_0 \in \mathfrak{H}$, то это означает, что оператор $(M + N'_{u_0}) : \mathfrak{U}_0 \to \mathfrak{F}^0$ — топлинейный изоморфизм, и в силу замечания 2.1 и теоремы 2.1 в любой точке $u_0 \in \mathfrak{H}$ задача (2.1), (2.2) однозначно разрешима. Именно эту ситуацию наблюдаем в задаче (0.1), (0.2) в случае $\alpha\beta > 0$ [4]. Рассмотрим теперь ситуацию, когда фредгольмов оператор L не имеет M-присоединенных векторов, но имеет $(M + N'_{u_0})$-присоединенные. Для простоты ограничимся случаем одномерного ядра $\ker L$.

Теорема 2.2. *Пусть оператор* L *фредгольмов,* $\dim\ker L = 1$. *Пусть оператор* L *не имеет* M*-присоединенных векторов, но имеет в некоторой точке* $u_0 \in \mathfrak{H}$ $(M + N'_{u_0})$*-присоединенные векторы высоты не большей* $p \in \mathbb{N}$. *Тогда в некоторой окрестности* $O_{u_0} \subset \mathfrak{H}$ *точки* u_0 *уравнение* (2.2) *может быть приведено к виду*

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_q &= \xi_{q-1} + g_{q-1}(u), \quad q = 1, 2, \ldots, p, \\ 0 &= \xi_p + g_p(u), \\ \dot{u}^1 &= Su^1 + F(u). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Доказательство. В силу следствия 1.2 оператор $M + N'_{u_0}$ (L, σ)-ограничен, причем ∞ — полюс порядка p L-резольвенты оператора. Пусть $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p\}$ — цепочка $(M + N'_{u_0})$-присоединенных векторов вектора $\varphi_0 \in \ker L\backslash\{0\}$. Нетрудно показать, что векторы $\{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_p\}$ линейно независимы [6]. Поэтому любой вектор $u \in \mathfrak{U}$ может быть представлен в виде

$$u = u^0 + u^1 = \sum_{q=0}^{p} \xi_q\varphi_q + u^1,$$

а уравнение (2.2) приобретает вид (2.3), (2.4) с той лишь разницей, что M_k есть сужение на $\mathfrak{U}^k$ оператора $M + N'_{u_0}$. Пусть $\{\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_p\} \subset \mathfrak{U}^*$ — биортогональный к $\{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_p\}$ базис. Преобразовав (2.3) к виду

$$H\dot{u}^0 = u^0 + M_0^{-1}(\mathbb{I} - Q)N(u), \tag{2.8}$$

и подействовав на (2.8) последовательно функционалами $\{\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_p\}$, с учетом (2.4) получим (2.7). □

В ситуации теоремы 2.2 нельзя говорить ни о существовании, ни о единственности решения задачи (2.1), (2.2). Действительно, пусть (2.7) имеет вид

$$\dot{\xi}_2 = \xi_1, \quad 0 = \xi_2 - \xi_1^2. \tag{2.9}$$

Тогда задача Коши

$$(\xi_1(0), \xi_2(0)) = (0, 0) \tag{2.10}$$

для системы (2.9), кроме стационарного $(\xi_1(t), \xi_2(t)) \equiv (0, 0)$, имеет еще одно решение $(\xi_1(t), \xi_2(t)) \equiv (\frac{t}{2}, \frac{t^2}{4})$. Если же (2.7) имеет вид

$$\dot{\xi}_2 = \xi_1 + 1, \quad 0 = \xi_2 - \xi_1^2, \tag{2.11}$$

то задача (2.10), (2.11) вообще не имеет решения.

3. Особенности фазового пространства

Редуцируем задачу (0.1), (0.2) к задаче (2.1), (2.2). Для этого положим $\mathfrak{U} = L_4$ (все функциональные пространства определены в области Ω). Операторы L, M, N определим формулами

$$\langle Lu, v\rangle = \int_\Omega (\lambda uv - u_{x_k} v_{x_k}) dx \quad \forall u, v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1,$$
$$\langle Mu, v\rangle = \alpha \int_\Omega uv\, dx, \quad \langle N(u), v\rangle = \beta \int_\Omega u^3 v\, dx \quad \forall u, v \in L^4,$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение в смысле L_2. При $1 \le n \le 4$ вложение $\overset{\circ}{W}{}_2^1 \hookrightarrow L_4$ плотно и непрерывно, поэтому оператор $L \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$, где $\mathfrak{F} = W_2^{-1}$. В [7] показано, что в силу вложения $(L_4)^{*2} \simeq L_{\frac{4}{3}} \hookrightarrow W_2^{-1}$ оператор $N \in C^\infty(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$.

Лемма 3.1. *Пусть $1 \le n \le 4$, тогда при любых $\lambda \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ оператор M (L, σ)-ограничен, причем ∞ — устранимая особая точка L-резольвенты оператора M.*

Доказательство. Пусть $\lambda \notin \sigma(\Delta)$, где $\sigma(\Delta)$ — спектр однородной задачи Дирихле в области Ω для оператора Лапласа Δ. Тогда существует оператор $L^{-1} \in L(\mathfrak{F}; \mathfrak{U})$. Очевидно, оператор $L^{-1}M \in L(\mathfrak{U})$, отсюда оператор $(\lambda L - M)^{-1} = L(\lambda\mathbb{I} - L^{-1}M)^{-1} \in L(\mathfrak{F}; \mathfrak{U})$.

Пусть $\lambda \in \sigma(\Delta)$, тогда $\ker L = \operatorname{span}\{\varphi_k : \lambda_k = \lambda\}$, $\operatorname{im} L = (\ker L)^\perp$, где $\{\varphi_k\}$ — ортонормированное (в смысле L_2) семейство собственных функций однородной задачи Дирихле в области Ω для оператора Лапласа Δ, соответствующих собственным значениям $\{\lambda_k\} = \sigma(L)$, которые занумерованы по невозрастанию с учетом кратности. (Ортогональность тоже в смысле L_2.) Поскольку оператор L фредгольмов, то для доказательства воспользуемся следствием 1.1. Пусть $\varphi \in \ker L \setminus \{0\}$, т. е.

$$\varphi = \sum_{\lambda_k = \lambda} a_k \varphi_k, \quad \sum_{\lambda_k = \lambda} |a_k| > 0.$$

Поэтому

$$M\varphi = \alpha \sum_{\lambda_k = \lambda} a_k \varphi_k \notin \operatorname{im} L. \quad \square$$

Ограничимся случаем $\dim\ker L = 1$ и построим проектор $\mathbb{I} - Q = \langle\cdot,\psi\rangle$, где $\psi \in \ker L$, $\|\psi\|_{L_2} = 1$, и множество

$$\mathfrak{H} = \{u \in \mathfrak{U} : \langle Mu + N(u), \psi\rangle = 0\}.$$

Здесь $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение в L_2.

Представив вектор u в виде $u = s\psi + v$, где $v \in \mathfrak{U}^1 = \{u \in \mathfrak{U} : \langle u,\psi\rangle = 0\}$, заметим, что множество $\mathfrak{H}$ C^∞-диффеоморфно множеству

$$\mathfrak{H}_s = \left\{(s,v) \in \mathbb{R}\times\mathfrak{U} : s^3\|\psi\|^4_{\mathfrak{U}} + 3s^2\int_\Omega \psi^3 v dx + s\left(3\int_\Omega \psi^2v^2dx + \alpha\beta^{-1}\right) + \int_\Omega \psi v^3 dx = 0\right\}.$$

В [5] множество $\mathfrak{H}_s$ названо 2-сборкой Уитни, в [4] показано, что в случае $\alpha\beta > 0$ при любом векторе $v \in \mathfrak{U}^1$ существует точно одно число $s \in \mathbb{R}$ такое, что $s\psi + v \in \mathfrak{H}$. Доказательство этого основано на том, что в любой точке $u \in \mathfrak{U}$ вектор $\psi \in \ker L \setminus \{0\}$ не имеет $(M + N'_u)$-присоединенных векторов.

Считая, что $\alpha\beta < 0$, выделим в множестве $\mathfrak{H}$ точки складки, которые определяют множество

$$\mathfrak{H}' = \{u \in \mathfrak{U} : \langle M\psi + N'_u\psi, \psi\rangle = 0\} \cap \mathfrak{H}.$$

Здесь N'_u — первая производная Фреше оператора N в точке u,

$$\langle N'_u v, w\rangle = 3\beta\int_\Omega u^2vw\,dx \quad \forall u,v \in L_4.$$

Это множество $\mathfrak{H}'$ C^∞-диффеоморфно множеству

$$\mathfrak{H}'_s = \left\{(s,v) \in \mathbb{R}\times\mathfrak{U}^1 : 3s^2\|\psi\|^4_{\mathfrak{U}} + 6s\int_\Omega \psi^3 v\,dx + 3\int_\Omega \psi^2v^2dx + \alpha\beta^{-1} = 0\right\} \cap \mathfrak{H}_s.$$

В дальнейшем ограничимся случаем $\lambda = -\lambda_1$, где λ_1 — наибольшее собственное значение однородной задачи Дирихле для оператора Лапласа Δ в области Ω. Это ограничение является частным случаем условия $\dim\ker L = 1$.

Теорема 3.1. *Пусть $1 \le n \le 4$, $\alpha\beta < 0$, $\lambda = -\lambda_1$. Тогда*

(i) *любой вектор $\xi \in \ker L\setminus\{0\}$ не имеет $(M+N'_u)$-присоединенных векторов, если $u \in \mathfrak{H}\setminus\mathfrak{H}'$;*

(ii) *любой вектор $\xi \in \ker L \setminus \{0\}$ имеет точно один $(M + N'_u)$-присоединенный вектор, если $u \in \mathfrak{H}' \setminus \mathfrak{U}'$.*

Доказательство. (i) Пусть

$$u \in \mathfrak{H}\setminus\mathfrak{H}' = \{u \in \mathfrak{U} : \langle Mu + N(u),\psi\rangle = 0,\ \langle M\psi + N'_u\psi,\psi\rangle \ne 0\}.$$

Любой вектор $\xi \in \ker L \setminus \{0\}$ имеет вид $\xi = a\psi$, $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Поскольку $\langle M\xi + N'_u\xi,\psi\rangle \ne 0$, то $M\xi + N'_u\xi \notin \operatorname{im} L$.

(ii) Пусть $u \in \mathfrak{H}'$. Тогда $M\psi + N'_u\psi = f \in \operatorname{im} L$. Построим множество $\operatorname{coim} L = \{u \in \operatorname{dom} L : \langle u,\psi\rangle = 0\}$. Линеал $\operatorname{coim} L$, снабженный "нормой графика" $|||\cdot||| = \|\cdot\|_{\mathfrak{U}} + \|L\cdot\|_{\mathfrak{F}}$, является банаховым пространством. Обозначим через L_1 сужение оператора L на $\operatorname{coim} L$. В силу отрицательной определенности оператора L_1 (т. е. $-\langle L_1u,u\rangle \ge \mathrm{const}\,\|u\|^2_{L_2}$) и теоремы Банаха существует оператор $L_1^{-1} \in L(\operatorname{im} L, \operatorname{coim} L)$. Отсюда вытекает существование вектора $\varphi = L_1^{-1}f \in \operatorname{coim} L$ такого, что $\langle\varphi,\psi\rangle = 0$. Далее,

$$\langle M\varphi + N'_u\varphi,\psi\rangle = \int_\Omega (\alpha + 3\beta u^2)\varphi\psi\,dx = \langle\varphi, M\psi + N'_u\psi\rangle = \langle\varphi, f\rangle = \langle L_1^{-1}f, f\rangle \le 0,$$

причем равенство $\langle L_1^{-1}f,f\rangle = 0$ имеет место тогда и только тогда, когда $f = 0$. Если же $\langle L_1^{-1}f,f\rangle < 0$, то это значит, что $M\varphi + N'_u\varphi \notin \operatorname{im} L$ и, следовательно, второго $(M + N'_u)$-присоединенного вектора вектор ψ не имеет. Поэтому и любой вектор $\xi = a\psi \in \ker L \setminus \{0\}$ обладает тем же свойством.

Предположим, что $f = 0$. Тогда $\langle M\psi + N'_u\psi, w\rangle = 0$ при любом $w \in \mathfrak{U}$. Положим $w = u$, получим

$$3\int_\Omega u^3\psi\,dx + s\alpha\beta^{-1} = 0, \tag{3.1}$$

где s из представления $u = s\psi + v$, $v \in \mathfrak{U}^1$. Поскольку $u \in \mathfrak{H}$, то

$$0 = \langle Mu + N(u), \psi\rangle = \int_\Omega u^3\psi\,dx + s\alpha\beta^{-1}. \tag{3.2}$$

Из (3.1), (3.2) вытекает, что $s = 0$ и $u = v \in \mathfrak{U}^1$, что противоречит условию. $\square$

Условие $M\psi + N'_u\psi = 0$ означает, что $\ker L \cap \ker(M + N'_u) = \ker L \neq \{0\}$. Отсюда $\mathbb{C}$ — L-спектр оператора $M + N'_u$. Поэтому оператор $M + N'_u$ не является (L,σ)-ограниченным.

Литература

1. Hoff N.J. *Creep buckling* // Aeron. – Quarterly 7. – 1956. – № 1. – P. 1–20.
2. Сидоров Н.А., Романова О.А. *О применении некоторых результатов теории ветвления при решении дифференциальных уравнений* // Дифференц. уравнения. – 1983. – Т. 19. – № 9. – С. 1516–1526.
3. Свиридюк Г.А. *Фазовые пространства полулинейных уравнений типа Соболева с относительно сильно секториальным оператором* // Алгебра и анализ. – 1994. – Т. 6. – № 5. – С. 252–272.
4. Свиридюк Г.А., Казак В.О. *Фазовое пространство начально-краевой задачи для уравнения Хоффа* // Матем. заметки. – 2002. – Т. 71. – № 2. – С. 292–297.
5. Бокарева Т.А., Свиридюк Г.А. *Сборки Уитни фазовых пространств некоторых полулинейных уравнений типа Соболева* // Матем. заметки. – 1994. – Т. 55. – № 3. – С. 3–10.
6. Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. *Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators.* – Utrecht: VSP, 2003. – 216 p.
7. Свиридюк Г.А. *Квазистационарные траектории полулинейных динамических уравнений типа Соболева* // Изв. РАН. Сер. матем. – 1993. – Т. 57. – № 3. – С. 192–207.
8. Ленг С. *Введение в теорию дифференцируемых многообразий.* – Волгоград: Платон, 1996. – 203 с.

Челябинский государственный университет
Магнитогорский государственный университет

Поступили
первый вариант 06.05.2003
окончательный вариант 26.03.2004