ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 3 (442)

УДК 517.946

А.И. ВАГАБОВ

ЗАДАЧА О КОЛЕБАНИИ КОНЕЧНОЙ СТРУНЫ С НЕЛИНЕЙНЫМ ВОЗМУЩЕНИЕМ

1. В работах [1]–[6] и других использован обобщенный метод Фурье, сводящий решение смешанной задачи к исследованию бесконечной системы интегро-дифференциальных уравнений. В данной работе предлагается метод, сводящий решение одной простой задачи к интегро-дифференциальному уравнению. Затем строится разложение решения в обобщенный ряд Фурье. Важно, что указанный метод не предполагет самосопряженности пространственного оператора, соответствующего рассматриваемой задаче. Предлагаемая ниже задача, по-видимому, может быть решена также традиционным методом. К методу данной работы примыкает статья [7].

2. *Постановка задачи.* Ставится следующая смешанная задача

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(t,x,\widetilde{u}),\quad 0<x<1,\quad 0<t\le T<\infty, \tag{1}$$

$$u'_x(t,0)=u(t,1),\quad u'_x(t,1)=u(t,0), \tag{2}$$

$$u(0,x)=\psi_0(x),\quad u'_t(0,x)=\psi_1(x), \tag{3}$$

где $\widetilde{u}=(u,v,w)$, $v=\frac{\partial u}{\partial t}$, $w=\frac{\partial u}{\partial x}$. Будем считать, что

а) $\psi_i(x)\in C^{3-i}[0,1]$, $\frac{d^s\psi_i}{dx^s}\Big|_{0,1}=0$, $s=\overline{0,2-i}$;

б) $f(t,x,\widetilde{u})$ непрерывно дифференцируема в области $\mathcal{D}: 0\le t\le T$, $0\le x\le 1$, $|u-\Phi(t,x)|\le Q=\mathrm{const}$, $\left|v-\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right|\le Q$, $\left|w-\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right|\le Q$, где $\Phi(t,x)$ — решение задачи (1)–(3) при $f\equiv 0$.

Введем задачу на собственные значения для оператора с несамосопряженными граничными условиями

$$y''-\lambda^2 y=0,\quad 0<x<1, \tag{4}$$

$$y'(0)-y(1)=0,\quad y'(1)-y(0)=0. \tag{5}$$

Найдем подходящее представление для функции Грина при $\mathrm{Re}\,\lambda\ge 0$

$$G(x,\xi,\lambda)=g_0(x,\xi,\lambda)+\frac{\lambda e^{\lambda(1-\xi-x)}+\lambda e^{\lambda(\xi-x)}+\cdots}{2(e^{\lambda}-e^{-\lambda})(1+\lambda^2)}=$$
$$=g_0+\lambda\frac{e^{-\lambda(\xi+x)}+e^{-\lambda(1-\xi+x)}+\cdots}{2(1+\lambda^2)}\left(1+\frac{e^{-2\lambda}}{1-e^{-2\lambda}}\right) \tag{6}$$

(в числителе дроби в (6) из двенадцати слагаемых указаны лишь два старших по росту),

$$g_0=\begin{cases}-\dfrac{e^{-\lambda(x-\xi)}}{2\lambda} & \text{при } 0\le\xi<x;\\ -\dfrac{e^{\lambda(x-\xi)}}{2\lambda} & \text{при } x\le\xi\le 1.\end{cases} \tag{7}$$

Аналогичное представление имеет место при $\mathrm{Re}\,\lambda\le 0$. Спектр задачи (4), (5) состоит из точек $\pm i$, $\pm s\pi i$, $s=1,2,\dots$

Далее будем пользоваться формулой интегрального преобразования

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{Re}\,\lambda=\pm H}\lambda\,d\lambda\int\limits_0^1 G(x,\xi,\lambda)\psi(\xi)\,d\xi=\psi(x)\ \ \forall H>0,\ \ 0<x<1, \tag{8}$$

справедливой для любой функции $\psi\in L_2(0,1)$. Вывод формулы (8) получается известным методом интегрирования по λ в левой части с использованием (6), (7) и сведением к интегралу Дирихле. (Аналогичные вычисления см. ниже в п. 4.) Направление интегрирования по λ выбрано так, что при движении по прямым $\mathrm{Re}\,\lambda=\pm H$ область $|\,\mathrm{Re}\,\lambda|\le H$ остается слева, а интегралы понимаются как пределы интегралов по отрезкам $[\pm H-iA,\ \pm H+iA]$ при $A\to\infty$.

Для решения $u(t,x)$ задачи (1)–(3) выполняются соотношения

$$\begin{aligned}u&=e^{\lambda t}\psi_0(x)-\int_0^t e^{\lambda(t-\tau)}\Big(\lambda u-\frac{\partial u}{\partial\tau}\Big)\,d\tau,\\ \frac{\partial u}{\partial t}&=e^{\lambda t}\psi_1(x)+\int_0^t e^{\lambda(t-\tau)}f(\tau,x,\widetilde{u})\,d\tau+\int_0^t e^{\lambda(t-\tau)}\Big(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}-\lambda\frac{\partial u}{\partial t}\Big)\,d\tau.\end{aligned} \tag{9}$$

3. *Сведение к интегро-дифференциальному уравнению.* Пусть $u(t,x)$ — решение задачи (1)–(3). Применим к $u(t,x)$ интегральное преобразование (8), получим

$$u(t,x)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{Re}\,\lambda=\pm H}d\lambda\int\limits_0^1 G(x,\xi,\lambda)\Big(\lambda u+\frac{\partial u(t,\xi)}{\partial t}\Big)\,d\xi.$$

Действительно, интеграл $\int\limits_0^1 G(x,\xi,\lambda)\frac{\partial u}{\partial t}\,d\xi$ в полуплоскостях $|\,\mathrm{Re}\,\lambda|\ge H$ является аналитической функцией по λ и согласно (6), (7) имеет при $\lambda\to\infty$ убывание порядка $O(1/\lambda^2)$, что очевидно при интегрировании по частям. Следовательно,

$$\int\limits_{\mathrm{Re}\,\lambda=\pm H}d\lambda\int\limits_0^1 G(x,\xi,\lambda)\frac{\partial u}{\partial t}\,d\xi=0.$$

Используя (9), найдем

$$\begin{aligned}u(t,x)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{Re}\,\lambda=\pm H}d\lambda\int\limits_0^1 G(x,\xi,\lambda)\Big\{(\lambda\psi_0(\xi)+\psi_1(\xi))e^{\lambda t}+\int\limits_0^t e^{\lambda(t-\tau)}f(\tau,\xi,\widetilde{u})\,d\tau\Big\}\,d\xi-\\ -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{Re}\,\lambda=\pm H}d\lambda\int\limits_0^1 G(x,\xi,\lambda)\,d\xi\int\limits_0^t e^{\lambda(t-\tau)}\Big\{-\lambda^2u+\frac{\partial^2u}{\partial\xi^2}\Big\}\,d\tau.\end{aligned}$$

С учетом определения обратного оператора для второго слагаемого правой части получим выражение $-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{Re}\,\lambda=\pm H}d\lambda\int\limits_0^t e^{\lambda(t-\tau)}d\tau$, равное нулю. Таким образом, приходим к уравнению

$$u(t,x)=\Phi(t,x)-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{Re}\,\lambda=H}d\lambda\int\limits_0^1 G(x,\xi,\lambda)\,d\xi\int\limits_0^t e^{\lambda(t-\tau)}f(\tau,\xi,\widetilde{u})\,d\tau, \tag{10}$$

где $\Phi(t,x)$ — решение задачи (1)–(3) при $f\equiv 0$.

Теорема 1. *Решение* $u(t,x)$ *задачи* (1)–(3) *удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению* (10). *Обратно, если* $u(t,x)$ *— решение уравнения* (10), *имеющее непрерывные производные* u_{xx}, u_{tt}, *то оно служит решением задачи* (1)–(3).

Доказательство. Применим оператор $\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ к правой части (10)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\operatorname{Re}\lambda=\pm H}d\lambda\int\limits_0^t e^{\lambda(t-\tau)}d\tau\Big(-\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\lambda^2\Big)\int\limits_0^1 G(x,\xi,\lambda)f(\tau,\xi,\widetilde{u})d\xi-$$
$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\operatorname{Re}\lambda=\pm H}\lambda\,d\lambda\int\limits_0^1 G(x,\xi,\lambda)f(t,\xi,\widetilde{u})d\xi.\quad(11)$$

Первая производная по t, взятая по верхнему пределу интеграла, дает слагаемое, равное нулю, и оно отброшено. Из (11) и (8) получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\operatorname{Re}\lambda=\pm H}d\lambda\int\limits_0^t e^{\lambda(t-\tau)}f(\tau,x,\widetilde{u})d\tau+f(t,x,\widetilde{u})=f.$$

Введение оператора $\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ под знак интеграла в (11) оправдано равномерной сходимостью полученного интеграла. □

4. *Система интегральных уравнений.* Если $u(t,x)$ — дважды непрерывно дифференцируемое решение уравнения (10), то, дифференцируя по t и x под знаками интегралов в (10), придем к системе

$$\begin{aligned}
u&=\Phi-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\operatorname{Re}\lambda=H}d\lambda\int\limits_0^1 G(x,\xi,\lambda)d\xi\int\limits_0^t e^{\lambda(t-\tau)}f(\tau,\xi,\widetilde{u})d\tau,\\
v&=\Phi_1-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\operatorname{Re}\lambda=H}\lambda\,d\lambda\int\limits_0^1 G(x,\xi,\lambda)d\xi\int\limits_0^t e^{\lambda(t-\tau)}f(\tau,\xi,\widetilde{u})d\tau,\qquad(12)\\
w&=\Phi_2-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\operatorname{Re}\lambda=H}d\lambda\int\limits_0^1 G'_x(x,\xi,\lambda)d\xi\int\limits_0^t e^{\lambda(t-\tau)}f(\tau,\xi,\widetilde{u})d\tau\quad\Big(\Phi_1=\frac{\partial\Phi}{\partial t},\ \ \Phi_2=\frac{\partial\Phi}{\partial x}\Big).
\end{aligned}$$

Упростим уравнения (12), считая функцию $\widetilde{u}$ непрерывно дифференцируемой. Интегралы по λ заменим пределами интегралов по отрезкам $[H-iA,\,H+iA]$ при $A\to\infty$. Опираясь на (6), (7), выполним интегрирование по λ и получим при $t<2+x$

$$\begin{aligned}
v-\Phi_1&=\frac{1}{2\pi}\lim_{A\to\infty}\int_0^t d\tau\Big\{\int_0^x e^{H(\xi-x+t-\tau)}\frac{\sin A(x-t+\tau-\xi)}{x-t+\tau-\xi}f(\tau,\xi,\widetilde{u})d\xi+\\
&\quad+\int_x^1 e^{H(x-\xi+t-\tau)}\frac{\sin A(x+t-\tau-\xi)}{x+t-\tau-\xi}f(\tau,\xi,\widetilde{u})d\xi\Big\}-\\
&\quad-\frac{1}{2\pi}\lim_{A\to\infty}\int_0^t d\tau\int_0^1\Big\{e^{H(t-\tau-x-\xi)}\frac{\sin A(t-\tau-x-\xi)}{t-\tau-x-\xi}+\\
&\quad+e^{H(t-\tau-x-\xi)}\frac{\sin A(1+x-t+\tau-\xi)}{1+x-t+\tau-\xi}\Big\}f(\tau,\xi,\widetilde{u})d\xi+\cdots,\qquad(13)
\end{aligned}$$

где точки в продолжении суммы в (13) означают еще 10 слагаемых последнего типа. Равномерная при $A\to\infty$ сходимость интегралов типа Дирихле в (13) следует из непрерывной дифференцируемости f. Из (13) имеем

$$v-\Phi_1=\frac{1}{2}\int_0^t\{e^{H(x_4^*-x+t-\tau)}f(\tau,x_4^*,\widetilde{u})+e^{H(x-x_5^*+t-\tau)}f(\tau,x_5^*,\widetilde{u})+e^{H(-x-x_6^*+t-\tau)}f(\tau,x_6^*,\widetilde{u})\}d\tau+\cdots,\qquad(14)$$

где для удобства через $x^* = x^*(\tau, t, x)$ обозначены ξ — корни соответствующих знаменателей в выражении (13). Проделав аналогичные вычисления для $u - \Phi$ и $w - \Phi_2$ и устремляя H к нулю, получим

$$\begin{aligned} u &= \Phi + \frac{1}{2}\int_0^t \{f_0(\tau, x_1^*, \widetilde{u}) + f_0(\tau, x_2^*, \widetilde{u}) - f_0(\tau, x_3^*, \widetilde{u})\}d\tau + \cdots, \\ v &= \Phi_1 + \frac{1}{2}\int_0^t \{f(\tau, x_4^*, \widetilde{u}) + f(\tau, x_5^*, \widetilde{u}) - f(\tau, x_6^*, \widetilde{u})\}d\tau + \cdots, \\ w &= \Phi_2 + \frac{1}{2}\int_0^t \{f(\tau, x_7^*, \widetilde{u}) + f(\tau, x_8^*, \widetilde{u}) + f(\tau, x_9^*, \widetilde{u})\}d\tau + \cdots \end{aligned} \tag{15}$$

При нахождении $u - \Phi$ применялось интегрирование по частям по τ при $f\,dt = dv$, $e^{\lambda(t-\tau)} = u$, $v = \int\limits_0^\tau f\,d\tau_1 = f_0(\tau, \xi, \widetilde{u})$. При этом интеграл по λ от внеинтегрального слагаемого равен нулю. Таким образом, доказана

Теорема 2. *Системы интегральных уравнений* (12) *и* (15) *при* $t < 2 + x$ *эквивалентны относительно класса непрерывно дифференцируемых решений.*

5. *Исследование системы* (15), *основные теоремы.* Решая систему (15) методом последовательных приближений, возьмем $\widetilde{\Phi} = (\Phi, \Phi_1, \Phi_2)$ за первое приближение. Подставляя $n-1$-е приближение в правые части (15), найдем $\widetilde{u}_n$. Пусть $M_0 = \max\limits_{\mathcal{D}} |f|$. Из системы (15) имеем $|u_n - \Phi|$, $|v_n - \Phi_1|$, $|w_n - \Phi_2| \le Mt$, где $M = 21M_0$. Выбирая $t \le \min(2, T, Q/M)$, сохраним $\widetilde{u}_n$ в области $\mathcal{D}$, в которой ищется решение.

Ввиду непрерывной дифференцируемости f в области $\mathcal{D}$ справедливо неравенство

$$|f(t, x, \widetilde{u}) - f(t, x, \widetilde{u}^0)| \le M' \max_{x,t}(|u - u^0|, |v - v^0|, |w - w^0|), \tag{16}$$

где M' — постоянное для области $\mathcal{D}$ число. Опираясь на (16), докажем существование и единственность решения $\widetilde{u} = \widetilde{\Phi} + \sum\limits_{n=2}^{\infty}(\widetilde{u}_n - \widetilde{u}_{n-1})$ системы (15) в области $\mathcal{D}$ при $t \le \min(2, T, Q/M)$.

Установим, что это решение имеет непрерывные частные производные первого порядка. По приращению Δx составим приращения величин, зависящих от x, и для системы (15) запишем соотношения в конечных разностях

$$\begin{aligned} \frac{\Delta u}{\Delta x} &= \frac{\Delta \Phi}{\Delta x} + \frac{1}{2}\int_0^t \sum_{i=1}^{3}\Big(\pm\frac{\Delta f_0}{\Delta x_i^*} \pm \frac{\Delta f_0}{\Delta u}\frac{\Delta u}{\Delta x_i^*} \pm \frac{\Delta f_0}{\Delta v}\frac{\Delta v}{\Delta x_i^*} \pm \frac{\Delta f_0}{\Delta w}\frac{\Delta w}{\Delta x_i^*}\Big)d\tau + \cdots, \\ \frac{\Delta v}{\Delta x} &= \frac{\Delta \Phi_1}{\Delta x} + \frac{1}{2}\int_0^t \sum_{i=4}^{6}\Big(\pm\frac{\Delta f}{\Delta x_i^*} \pm \frac{\Delta f}{\Delta u}\frac{\Delta u}{\Delta x_i^*} \pm \frac{\Delta f}{\Delta v}\frac{\Delta v}{\Delta x_i^*} \pm \frac{\Delta f}{\Delta w}\frac{\Delta w}{\Delta x_i^*}\Big)d\tau + \cdots, \\ \frac{\Delta w}{\Delta x} &= \frac{\Delta \Phi_2}{\Delta x} + \frac{1}{2}\int_0^t \sum_{i=7}^{9}\Big(\pm\frac{\Delta f}{\Delta x_i^*} \pm \frac{\Delta f}{\Delta u}\frac{\Delta u}{\Delta x_i^*} \pm \frac{\Delta f}{\Delta v}\frac{\Delta v}{\Delta x_i^*} \pm \frac{\Delta f}{\Delta w}\frac{\Delta w}{\Delta x_i^*}\Big)d\tau + \cdots \end{aligned} \tag{17}$$

Ввиду гладкости Φ, Φ_1, Φ_2, f имеем

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} \approx \frac{\partial f}{\partial x}, \ \frac{\Delta \Phi}{\Delta x} \approx \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \ \ldots \ \frac{\Delta f}{\Delta w} \approx \frac{\partial f}{\partial w},$$

и система (17) однозначно определяет $\frac{\Delta u}{\Delta x}$, $\frac{\Delta v}{\Delta x}$, $\frac{\Delta w}{\Delta x}$ как суммы рядов непрерывных функций, равномерно сходящихся по x и $\Delta x \to 0$. Поэтому $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial x}$ существуют и непрерывны.

Наличие непрерывных производных $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial v}{\partial t}$, $\frac{\partial w}{\partial t}$ следует из вида системы (15). Так

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} + \frac{1}{2}\int_0^t \sum_{i=7}^{9}\Big(\frac{\partial f}{\partial x_i^*} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_i^*} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x_i^*} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x_i^*}\Big)d\tau + \sum_{i=7}^{9} f(t, x_i^*, \widetilde{u}) + \cdots$$

Итак, справедлива

Теорема 3. *При условиях п. 2 система* (15) *имеет непрерывно дифференцируемое решение* $\widetilde{u}(t,x)$ *в области* $\mathcal{D}$ *при* $t = t_0 \le \min(2, T, Q/M)$.

Теорема 4. *При условиях п. 2 задача* (1)–(3) *имеет единственное классическое решение.*

Доказательство. Решение $\widetilde{u}$ системы (15) согласно теореме 3 непрерывно дифференцируемо. На основании теоремы 2 оно служит решением системы (12). Первая компонента этого решения обладает непрерывными частными производными второго порядка и является по построению решением интегро-дифференциального уравнения (10). По теореме 1 $\widetilde{u}$ является решением задачи (1)–(3), и оно единственно. □

Замечание 1. Если построенное решение u не выходит из области $\mathcal{D}$, то, приняв t_0 за начальный момент, можно продолжить $u(t,x)$ и как угодно близко подойти к границе области $\mathcal{D}$, как для задачи Коши в случае обыкновенных дифференциальных уравнений.

Теорема 5. *Решение* u *задачи* (1)–(3) *существует, единственно и представимо в виде равномерно сходящегося ряда Фурье по собственным функциям спектральной задачи* (4)–(5).

Доказательство. Существование и единственность указаны в теореме 4. Возвращаясь к представлению (10), легко получим из него запись в виде ряда Фурье по собственным функциям задачи (4)–(5)

$$u(t,x) = -\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{c_k} d\lambda \int_0^1 G(x,\xi,\lambda)\Big\{(\lambda\psi_0(\xi) + \psi_1(\xi))e^{\lambda t} + \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} f(\tau,\xi,\widetilde{u})d\tau\Big\}d\xi, \quad (18)$$

где c_k — замкнутый контур, содержащий внутри единственный из полюсов $\pm i$, $\pm s\pi i$, $s = 1, 2, \ldots$ функции $G(x,\xi,\lambda)$. Порядок суммирования ряда определен в виде $\lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{k=-N}^{N}$. Ряд (18) сходится равномерно на $[0,1]\times[0,t_0]$. □

Замечание 2. Слагаемые в ряде (18) с номерами k, происходящие от наличия f, указывают "возмущения" коэффициентов Фурье линейной задачи (случай $f \equiv 0$). Можно обратить внимание на быстрый характер убывания этих возмущений. Так, если проинтегрировать по частям по ξ и τ, то установим, что порядок возмущения в k-м коэффициенте равен $O(1/k^3)$.

Литература

1. Бернштейн С.Н. *Об одном классе функциональных уравнений с частными производными* // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1940. – Т. 4. – № 1. – С. 17–26.
2. Халилов З.И. *Решение задачи колебания конечной струны в среде с переменным коэффициентом сопротивления* // ДАН АзССР. – 1952. – Т. 8. – № 7. – С. 333–337.
3. Коробейник Ю.Ф. *Бесконечные системы линейных дифференциальных уравнений*: Дис. ... канд. физ.-матем. наук. – Ростов н/Д, 1955. – 204 с.
4. Дедушев А.В. *Обобщенный метод Фурье в уравнениях с частными производными*: Дис. ... канд. физ.-матем. наук. – Ростов н/Д, 1987. – 149 с.
5. Гусейнов А.И., Худавердиев К.И. *О решении методом Фурье одномерной смешанной задачи для квазилинейных гиперболических уравнений второго порядка* // ДАН СССР. – 1963. – Т. 148. – № 3. – С. 496–500.
6. Максудов Ф.Г., Худавердиев Ф.К. *Исследование многомерной смешанной задачи для одного класса нелинейных гиперболических уравнений* // ДАН СССР. – 1990. – Т. 310. – № 3. – С. 539–542.
7. Вагабов А.И. *Обобщенный метод Фурье решения смешанных задач для нелинейных уравнений* // Дифференц. уравнения. – 1996. – Т. 32. – № 1. – С. 90–100.

Дагестанский государственный университет

Поступили
первый вариант 17.10.1995
окончательный вариант 25.07.1996