Известия вузов. Математика *http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/*
2010, №9, с. 86–89 *Гос. номер статьи по НТЦ "Информрегистр" 0421000123\0086*

Д.А. КИРИЛЛОВА

ОБ ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЯХ БЕЗ ОБЩИХ ЗНАЧЕНИЙ

Аннотация. Для однолистных в круге $|z| < 1$ функций f_k без общих значений и переводящих нуль в точку на отрезке $[-1, 1]$, устанавливаются неравенства, содержащие модули производных $|f_k'(0)|$, $k = 1, \ldots, n$. Получена также оценка для функций f_k с участием производных Шварца.

Ключевые слова: однолистные функции, экстремальные разбиения, конформный радиус, производная Шварца.

УДК: 517.54

Abstract. In this paper we establish inequalities involving moduli of derivatives $|f_k'(0)|$ of functions f_k univalent in the unit disk $|z| < 1$ having no common values and translating zero in a point on the segment $[-1, 1]$, $k = 1, \ldots, n$. We estimate f_k by means of Schwarzian derivatives.

Keywords: univalent functions, extremal partitions, conformal radius, Schwarzian derivative.

Многие экстремальные проблемы геометрической теории функций сводятся к задачам об однолистных функциях без общих значений (см., например, [1]–[3]). Современные результаты в этом направлении приводятся в обзоре [4]–[5], а также в монографии [6]. В ряде случаев указанные задачи эквивалентны задачам об экстремальном разбиении и формулируются в терминах конформных радиусов неналегающих областей. В статье [7] предлагаются задачи с новыми ограничениями на отображающие функции, отличными от рассмотренных в [6]. Данная работа посвящена решению некоторых из них. Мы изучаем семейства $\{f_k\}_{k=1}^n$ регулярных и однолистных в круге $U_z = \{z : |z| < 1\}$ функций, $n \geqslant 2$. При этом часть значений $f_k(0)$, $1 \leqslant k \leqslant n$, не фиксируется ("свободные полюса") и расположена на единичном интервале $(-1, 1)$ (теоремы 1 и 2). Кроме того, мы доказываем теорему со свободными полюсами на отрезке с участием производных Шварца (теорема 3). Методика доказательств восходит к работе [8].

Теорема 1. *Пусть функции f_k, $k = 1, \ldots, n$ $(n \geqslant 2)$, регулярны и однолистны в круге U_z и попарно не принимают в нем одинаковых значений, причем $f_1(0) = 1$, $-1 < f_k(0) < 1$, $k = 2, \ldots, n$, и точка $w = -1$ не принадлежит объединению $\bigcup_{k=1}^{n} f_k(U_z)$. Тогда справедливо*

Поступила 29.01.2010

Работа выполнена при финансовой поддержке Дальневосточного отделения Российской академии наук (грант 09-III-A-01-007).

неравенство

$$|f_1'(0)|^{1/4}\prod_{k=2}^{n}\frac{|f_k'(0)|}{\sqrt{1-(f_k(0))^2}}\leqslant\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\left(\frac{4}{2n-1}\right)^{n-1/2}.$$

Равенство достигается в случае, когда $f_k(0)=\cos\frac{2\pi(k-1)}{2n-1}$, $k=1,\dots,n$, *и функции* f_k, $k=1,\dots,n$, *отображают круг* U_z *на области, на которые плоскость* $\overline{\mathbb{C}}_w$ *разбивается кривыми* $w=\cos\frac{\pi(2l-1)}{2n-1}\operatorname{ch}(t)+i\sin\frac{\pi(2l-1)}{2n-1}\operatorname{sh}(t)$, $t\in(-\infty,+\infty)$, $l=1,\dots,n$.

Схема доказательства. Обозначим $f_k(U_z)=D_k$, $f_k(0)=a_k$, $k=1,\dots,n$. Тогда $a_1=1$ и точки a_k для $k=2,\dots,n$ принадлежат интервалу $(-1,1)$. Области D_k являются односвязными, попарно не налегают, $a_k\in D_k\subset\overline{\mathbb{C}}_w\setminus\{-1\}$, $k=1,\dots,n$. Пусть $r(D_k,a_k)$ — конформный радиус области D_k относительно точки a_k. Хорошо известно (см., например, [1], с. 32), что $|f_k'(0)|=r(D_k,a_k)$, $k=1,\dots,n$. В области $\overline{\mathbb{C}}_w\setminus[-1,1]=B$ выделим ветвь функции, обратной функции Жуковского $\zeta=p(w)=w+\sqrt{w^2-1}$, отображающую область B на внешность круга U_ζ и доопределенную на границе B в смысле граничного соответствия. Пусть $\{D_1^1\}$ — результат разделяющего преобразования области D_1 относительно семейства, состоящего из одной функции $\{p\}$ [8]. Согласно теореме 1.9 работы [8]

$$r(D_1,1)\leqslant\left(\frac{r(D_1^1,1)}{\sqrt{2}}\right)^2. \tag{1}$$

Обозначим через a_k^+ и a_k^-, $k=2,\dots,n$, пары различных достижимых граничных точек области B, лежащих соответственно на верхнем и нижнем берегах разреза $[-1,1]$. Пусть D_k^+ — связная компонента множества $D_k\setminus[-1,1]$, из которой достижима точка a_k^+, D_k^- — связная компонента множества $D_k\setminus[-1,1]$, из которой достижима точка a_k^-. Обозначим через $\widetilde{D}_k^+$ (соответственно $\widetilde{D}_k^-$) объединение области D_k^+ (D_k^-) с достижимыми граничными точками этой области, принадлежащими $D_k\bigcap[-1,1]$. Обозначим через D_k^1 объединение множества $p(\widetilde{D}_k^+)$ с его отражением относительно единичной окружности, а через D_k^2 — объединение множества $p(\widetilde{D}_k^-)$ с его отражением относительно единичной окружности, $k=2,\dots,n$. Для каждой области D_k и соответствующей ей пары симметричных областей $\{D_k^1,D_k^2\}$, $k=2,\dots,n$, аналогично теореме 1.9 из [8] можно показать, что

$$r(D_k,a_k)\leqslant\left(\frac{r\big(D_k^1,a_k^{(1)}\big)r\big(D_k^2,a_k^{(2)}\big)}{1/(1-a_k^2)}\right)^{1/2}, \tag{2}$$

где $a_k^{(1)}=p(a_k^+)$, $a_k^{(2)}=p(a_k^-)$, $k=2,\dots,n$. Равенство в (2) достигается, если область D_k симметрична относительно действительной оси. Заметим, что области D_1^1, D_k^j, $j=1,2$, $k=2,\dots,n$, вообще говоря, могут не быть односвязными. Поэтому в неравенствах (1) и (2) $r(D_1^1,1)$, $r(D_k^j,a_k^{(j)})$ — внутренние радиусы соответствующих областей [8], [9]. Так как точка $w=-1$ не принадлежит объединению $\bigcup\limits_{k=1}^{n}D_k$ и $D_k\bigcap D_l=\emptyset$, $k\neq l$, $k,l=1,\dots,n$, то области D_1^1, D_k^j, $j=1,2$, $k=2,\dots,n$, попарно не налегают. Применяя последовательно соотношения (1), (2) и теорему 2.17 из работы [8], получаем

$$\sqrt{2}r^{1/2}(D_1,1)\prod_{k=2}^{n}\frac{r^2(D_k,a_k)}{1-a_k^2}\leqslant r(D_1^1,1)\prod_{k=2}^{n}r(D_k^1,a_k^{(1)})r(D_k^2,a_k^{(2)})\leqslant\left(\frac{4}{2n-1}\right)^{2n-1},$$

где знак равенства во втором неравенстве достигается в случае когда точки 1, $a_k^{(1)}$, $a_k^{(2)}$, $k = 2, \dots, n$, располагаются на единичной окружности под равными углами. Описанный в формулировке теоремы случай равенства вытекает из соответствующих условий равенств в (1), (2) и теореме 2.17 статьи [8].

Аналогично доказывается

Теорема 2. *Пусть функции f_k, $k = 1, \dots, n$ ($n \geqslant 3$) регулярны и однолистны в круге U_z и попарно не принимают в нем одинаковых значений, причем $f_1(0) = -f_n(0) = 1$, $-1 < f_k(0) < 1$, $k = 2, \dots, n-1$. Тогда справедливо неравенство*

$$|f_1'(0)|^{1/4}|f_n'(0)|^{1/4}\prod_{k=2}^{n-1}\frac{|f_k'(0)|}{\sqrt{1-(f_k(0))^2}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2}{n-1}\right)^{n-1}.$$

Равенство достигается в случае, когда $f_k(0) = \cos\frac{2\pi(k-1)}{2n-2}$, $k = 1, \dots, n$, и функции f_k, $k = 1, \dots, n$, отображают круг U_z на области, на которые плоскость $\overline{\mathbb{C}}_w$ разбивается кривыми $w = \cos\frac{\pi(2l-1)}{2n-2}\operatorname{ch}(t) + i\sin\frac{\pi(2l-1)}{2n-2}\operatorname{sh}(t)$, $t \in (-\infty, +\infty)$, $l = 1, \dots, n$.

Теоремы 1 и 2 дополняют теорему 7 работы [7], в которой рассмотрен случай, когда ни одна из областей $f_k(U_z)$ не содержит точек -1 и 1. Теорема 1 остается верной, если функция f_1 регулярна (не обязательно однолистна) в круге U_z. Следуя работе [10], можно показать, что теорема 2 справедлива для любых регулярных функций f_k, $k = 1, \dots, n$, удовлетворяющих остальным условиям теоремы.

В следующей теореме $S_f(z) = f'''(z)/f'(z) - 3/2\,(f''(z)/f'(z))^2$ — производная Шварца функции f в точке z.

Теорема 3. *Пусть функции f_k, $k = 1, \dots, n$, конформно и однолистно отображают единичный круг U_z на попарно неналегающие области $D_k \subset \overline{\mathbb{C}}_w \setminus \{-1, 1\}$, $k = 1, \dots, n$, так, что $f_k(0) = a_k \in (-1, 1)$, $k = 1, \dots, n$. Тогда*

$$\sum_{k=1}^{n}\left[(1-a_k^2)\left(\frac{1}{|f_k'(0)|^2} + \frac{1}{6}\operatorname{Re}\frac{S_{f_k}(0)}{(f_k'(0))^2}\right) + \frac{1}{4(1-a_k^2)}\right] \geqslant \frac{n}{12}(2n^2+1).$$

Равенство достигается в случае, когда $a_k = \cos\frac{\pi(2k-1)}{2n}$, $k = 1, \dots, n$, и функции f_k, $k = 1, \dots, n$, отображают круг U_z на области, на которые плоскость $\overline{\mathbb{C}}_w$ разбивается кривыми $w = \cos\frac{\pi(l-1)}{n}\operatorname{ch}(t) + i\sin\frac{\pi(l-1)}{n}\operatorname{sh}(t)$, $t \in (-\infty, +\infty)$, $l = 1, \dots, n+1$.

Доказательство сводится к неравенству для ядер Бергмана из работы [7] (см. с. 98) с помощью специально подобранных конформных отображений и известных формул для преобразований этих ядер ([11], с. 258).

Литература

[1] Голузин Г.М. *Геометрическая теория функций комплексного переменного* (Наука, М., 1966).

[2] Аленицын Ю.Е. *Об однолистных функциях без общих значений в многосвязной области*, Тр. матем. ин-та им. В.А. Стеклова **94**, 4–18 (1968).

[3] Лебедев Н.А. *Принцип площадей в теории однолистных функций* (Наука, М., 1975).

[4] Кузьмина Г.В. *Методы геометрической теории функций* I, Алгебра и анализ **9** (3), 41–103 (1997).

[5] Кузьмина Г.В. *Методы геометрической теории функций* II, Алгебра и анализ **9** (5), 1–50 (1997).

[6] Бахтин А.К., Бахтина Г.П., Зелинский Ю.Б. *Тополого-алгебраические структуры и геометрические методы в комплексном анализе*, Ін-т математики НАН України **73**, 308 с. (2008).

[7] Дубинин В.Н. *Емкости конденсаторов, обобщения лемм Гретша и симметризация*, Зап. научн. семин. ПОМИ **337**, 73–100 (2006).

[8] Дубинин В.Н. *Симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного*, УМН **49** (1), 3–76 (1994).
[9] Хейман В.К. *Многолистные функции* (Ин. лит., М., 1960).
[10] Дубинин В.Н. *О квадратичных формах, порожденных функциями Грина и Робена*, Матем. сб. **200** (10), 25–38 (2009).
[11] Курант Р. *Принцип Дирихле, конформные отображения и минимальные поверхности* (Ин. лит., М., 1953).

Д.А. Кириллова

старший преподаватель, кафедра высшей математики,
Дальневосточная государственная социально-гуманитарная академия,
ул. Широкая, д. 70а, г. Биробиджан, 679000,

e-mail: dina_kir_03@mail.ru

D.A. Kirillova

Senior Lecturer, Chair of Higher Mathematics,
Far Eastern Academy for Humanities and Social Studies,
70a Shirokaya str., Birobidzhan, 679000 Russia,

e-mail: dina_kir_03@mail.ru