ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2004 МАТЕМАТИКА № 1 (500)

УДК 517.92

Г.И. ИБРАГИМОВ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ИГРА МНОГИХ ЛИЦ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА УПРАВЛЕНИЯ ИГРОКОВ

1. Введение

В становлении дифференциальных игр основопологающими были исследования, проведенные в [1]–[4].

Н.Н. Красовским дана математическая формализация понятия дифференциальной игры, исходя из которой им, А.И. Субботиным [5] и их сотрудниками доказаны теоремы об альтернативе и предложены эффективные методы построения экстремальных стратегий сближения–уклонения на основе так называемого правила экстремального прицеливания.

Другой подход при определении дифференциальной игры предложен Л.С. Понтрягиным. Особенности этого метода заключаются в рассмотрении дифференциальной игры с точки зрения какого-либо игрока и информационной дискриминации игрока-противника.

Данная работа следует формализации Л.С. Понтрягина. Особый интерес представляют собой дифференциальные игры с интегральными ограничениями на управления игроков. Такие игры рассмотрены в [6]–[13]. Фундаментальные результаты в этом направлении получены в [6] и [7]. В [8]–[12] исследуются задачи преследования несколькими объектами одного.

Рассматривается управляемая система

$$\dot z_{ij} = C_{ij} z_{ij} + u_i - v_j, \quad z_{ij}(t_0) = z_{ij}^0, \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad j = 1, \dots, m, \tag{1}$$

где $z_i \in R^n$, C_{ij} — постоянная $n \times n$-матрица, u_i — управляющий параметр преследования, v_j — управляющий параметр убегания. Параметр u_i выбирается в виде функции $u_i = u_i(\cdot)$ из замкнутого шара $S(\rho_i)$ радиуса ρ_i с центром в начале координат пространства $L_2[t_0;\infty)$, а параметр v_j — в виде функции $v_j = v_j(\cdot)$ из шара $S(\sigma_j) \subset L_2[t_0,\infty)$. Такие функции назовем допустимыми управлениями преследующих и убегающих. Если $u_i(\cdot)$, $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, и $v_j(\cdot)$, $j \in \{1, 2, \dots, m\}$, — допустимые управления i-го преследующего и j-го убегающего соответственно, то траектория $z_{ij}(\cdot)$ определяется как абсолютно непрерывное решение задачи Коши

$$\dot z_{ij} = C_{ij} z_{ij} + u_i(t) - v_j(t), \quad z_{ij}(t_0) = z_{ij}^0.$$

Цель i-го преследующего: обеспечить равенство $z_{ij}(t) = 0$ за возможно наименьшее время t, а цель j-го убегающего — препятствовать этому. Игра (1) считается завершенной, если для любого $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ найдется $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ такое, что $z_{ij}(t_{ij}) = 0$ при некотором $t_{ij} \ge t_0$.

Определение 1. Функцию

$$u_i(t, \xi_i, v_1, \dots, v_m), \quad u_i : [t_0;\infty) \times [0, \rho_i^2] \times R^n \times \dots \times R^n \to R^n,$$

для которой при любых $v_j(\cdot) \in S(\sigma_j)$, $j = 1, \dots, m$, система

$$\begin{cases} \dot z_{ij} = C_{ij} z_{ij} + u_i(t) - v_j(t), \ z_{ij}(t_0) = z_{ij}^0, \quad j = 1, \dots, m; \\ \dot\xi_i = -|u_i|^2, \quad \xi_i(t_0) = \rho_i^2, \end{cases}$$

с $u_i = u_i(t, \xi_i, v_1, \ldots, v_m)$ при $v_1 = v_1(t), \ldots, v_m = v_m(t)$ имеет единственное абсолютно непрерывное решение $(z_{i1}(\cdot), \ldots, z_{im}(\cdot), \xi_i(\cdot))$, назовем *стратегией i-го преследующего.* Стратегию i-го преследующего назовем *допустимой*, если каждое управление, формируемое этой стратегией, допустимо.

Определение 2. Будем говорить, что в игре (1) из начального положения $z^0 = \{z^0_{11}, z^0_{12}, \ldots, z^0_{km}\}$ возможно завершение преследования за время $T(z^0)$, если существуют допустимые стратегии преследующих $u_1 = u_1(\cdot)$, $u_2 = u_2(\cdot), \ldots, u_k = u_k(\cdot)$ такие, что для любых $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ и $v_1(\cdot) \in S(\sigma_1)$, $v_2(\cdot) \in S(\sigma_2), \ldots, v_m(\cdot) \in S(\sigma_m)$ для решения системы (1) с $u_i = u_i(t, v_1(t), v_2(t), \ldots, v_m(t))$, $v_1 = v_1(t)$, $v_2 = v_2(t), \ldots, v_m = v_m(t)$, $t_0 \le t \le T(z^0)$, выполняется $z_{ij}(\tau_{ij}) = 0$ при некотором $\tau_{ij} \in [t_0, T(z^0)]$ и некотором $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$.

Рассматриваемая в этой статье игра при $m = 1$ и $k = 1$ является частным случаем игр, изученных в [6] и [7]. Для нее в [11] получено необходимое и достаточное условие для возможности завершения преследования из всех точек пространства в терминах собственных чисел матрицы C.

В данной статье получено достаточное условие, гарантирующее завершение преследования из всех точек пространства.

Работа продолжает исследования [8]–[13].

2. Вспомогательная дифференциальная игра

Рассмотрим дифференциальную игру, описываемую уравнением

$$\dot{z} = Cz + u - v, \quad u(\cdot) \in S(\rho), \quad v(\cdot) \in S(\sigma), \quad z(t_0) = z_0, \tag{2}$$

где $z \in R^n$, C — постоянная $n \times n$-матрица, u — управляющий параметр преследования, v — управляющий параметр убегания, ρ, σ — положительные числа. Игра (2) является частным случаем игры (1) при $k = 1$, $m = 1$. Для простоты в (2) использованы обозначения $C_{11} = C$, $u_1 = u$, $v_1 = v$, $\rho_1 = \rho$, $\sigma_1 = \sigma$, $z_{11} = z$. Решение задачи Коши (2) имеет вид

$$z(t) = e^{(t-t_0)C} z_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)C}(u(s) - v(s))ds,$$

при этом $z(t)$ обращается в нуль тогда и только тогда, когда

$$y(t) = e^{-t_0 C} z_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-sC}(u(s) - v(s))ds$$

обращается в нуль. Следовательно, игра, описываемая уравнением (2), эквивалентна игре, описываемой уравнением

$$\dot{y} = e^{-tC}(u - v), \quad y(t_0) = e^{-t_0 C} z^0_{11} = y_0,$$

где $y, y_0, u, v \in R^n$, $u(\cdot) \in S(\rho)$, $v(\cdot) \in S(\sigma)$.

Теперь приведем два утверждения, вытекающие из результатов работы [11]. Пусть $\widehat{\sigma}$ ($\widehat{\sigma} < \rho$) — некоторое положительное число.

Утверждение 1 (теорема 1 [11]). *Если собственные числа матрицы C имеют неположительные вещественные части, то для множества*

$$G(t_0, \vartheta) = \left\{ z : z = \int_{t_0}^{\vartheta} e^{-tC} w(t)dt, \quad w(\cdot) \in S(\rho - \widehat{\sigma}) \right\} \quad (\rho > \widehat{\sigma})$$

имеет место равенство

$$\bigcup_{\vartheta=1}^{\infty} G(t_0, \vartheta) = R^n.$$

Утверждение 2. *Пусть для момента времени* ϑ *верно включение* $y_0 \in G(t_0, \vartheta)$ *и преследующий применяет управление*

$$u(t, \xi(t), v(t)) = \begin{cases} v(t) - w(t), & t_0 \le t \le \vartheta; \\ 0, & t > \vartheta, \end{cases}$$

где $w(t) = e^{-tC'} F^{-1}(t_0, \vartheta) y_0$.

Если $\int\limits_{t_0}^{\vartheta} |v(s)|^2 ds \le \widehat{\sigma}^2$ $(\rho > \widehat{\sigma})$, то это управление допустимо и $y(\vartheta) = 0$.

Отметим, что когда преследующий применяет эту стратегию, он не наблюдает потраченного ресурса своего управления. Ему достаточно знать текущее значение параметра v. Хотя в определении 1 стратегия преследующего введена как функция, зависящая от израсходанного ресурса ξ, здесь он ограничивается стратегиями более узкого класса.

3. Общий случай

Игра (1) эквивалентна игре, описываемой уравнениями

$$\dot{y}_{ij} = e^{-tC_{ij}}(u_i - v_j), \quad y_{ij}(t_0) = e^{-t_0 C_{ij}} z_{ij}^0 = y_{ij}^0. \tag{3}$$

Рассмотрим игру (3). Пусть

$$F_{ij}(t_0, t) = \int_{t_0}^{t} e^{-sC_{ij}} e^{-sC'_{ij}} ds.$$

Ясно, что $F_{ij}(t_0, t)$, $F_{ij}^{-1}(t_0, t)$, $i = 1, \ldots, k$, $j = 1, 2, \ldots, m$, — симметрические положительно определенные матрицы.

Теорема. *Если* $\rho_1^2 + \rho_2^2 + \cdots + \rho_k^2 > \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_m^2$ *и все матрицы* C_{ij}, $i = 1, \ldots, k$, $j = 1, \ldots, m$, *имеют собственные значения с неположительными вещественными частями, то в игре* (1) *из любого начального положения* $z^0 = \{z_{11}^0, z_{12}^0, \ldots, z_{km}^0\}$ *возможно завершение преследования за некоторое конечное время* ϑ.

Доказательство. Введем обозначения

$$G_{ij}(t_0, \vartheta) = \left\{ z : z = \int_{t_0}^{\vartheta} e^{-tC_{ij}} w_{ij}(t) dt, \quad w_{ij}(\cdot) \in S(\rho_{ij} - \sigma_{ij}) \right\},$$

$$\rho = (\rho_1^2 + \rho_2^2 + \cdots + \rho_k^2)^{1/2}, \quad \sigma = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_m^2)^{1/2},$$

$$\rho_{ij} = \frac{1}{\sigma} \rho_i \sigma_j, \quad \sigma_{ij} = \frac{1}{\rho} \rho_i \sigma_j, \quad i = 1, 2, \ldots, k, \quad j = 1, 2, \ldots, m.$$

Ясно, что $\rho_{ij} > \sigma_{ij}$. Равенство

$$z_{ij}(t) = e^{tC_{ij}} y_{ij}(t), \quad t \ge t_0,$$

показывает, что завершение преследования в игре (1) эквивалентно для каждого j выполнению равенства $y_{ij}(\tau_{ij}) = 0$ при некоторых $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ и $\tau_{ij} \ge t_0$.

Теперь последовательно определим числа ϑ_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, k$, $j = 0, 1, 2, \ldots, m$. Примем, что $\vartheta_{10} = t_0$. Число ϑ_{ij} определим в момент времени $\vartheta_{i,j-1}$ из условия выполнения включения $y_{ij}(\vartheta_{i,j-1}) \in G_{ij}(\vartheta_{i,j-1}, \vartheta_{ij})$, $j = 1, \ldots, m$. Согласно утверждению 1 такой момент времени существует. Считаем, что $\vartheta_{i+1,0} = \vartheta_{i,m}$, $i = 1, 2, \ldots, k-1$. Управления преследующих определим так:

$$u_i(t, \xi_i(t), v_1(t), \ldots, v_m(t)) = \begin{cases} v_j(t) - w_{ij}(t), & \vartheta_{i,j-1} \le t \le t_{ij}; \\ 0, & t > t_{ij}, \end{cases} \tag{4}$$

$$u_h(t) = 0, \quad h = 1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, k, \quad \vartheta_{i,j-1} \le t \le \vartheta_{ij},$$

$i = 1, \ldots, k$, $j = 1, \ldots, m$, где $w_{ij}(t) = e^{-tC'_{ij}} F_{ij}^{-1}(\vartheta_{i,j-1}, \vartheta_{ij}) y_{ij}(\vartheta_{i,j-1})$, $t_{ij} = \min\{\vartheta_{ij}, \tau_i\}$, а $t = \tau_i$ — момент времени, при котором впервые выполняется равенство $\xi_i(t) = 0$.

Таким образом, каждый преследующий в ходе процесса преследования наблюдает текущие значения управляющих параметров убегающих и текущее значение израсходованного ресурса своего управления.

Согласно утверждению 2, когда i-й преследующий применяет управление (4), если

$$\int_{\vartheta_{i,j-1}}^{\vartheta_{ij}} |v_j(s)|^2 ds \le \sigma_{ij}^2, \tag{5}$$

то $\int\limits_{\vartheta_{i,j-1}}^{\vartheta_{ij}} |u_i(s)|^2 ds \le \rho_{ij}^2$ и $y_{ij}(\vartheta_{ij}) = 0$.

Для каждого $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ при некотором i выполняется неравенство (5). Действительно, в противном случае

$$\sum_{i=1}^{k} \int_{\vartheta_{i,j-1}}^{\vartheta_{ij}} |v_j(s)|^2 ds > \sigma_{1j}^2 + \sigma_{2j}^2 + \cdots + \sigma_{kj}^2 = \frac{\sigma_j^2}{\rho^2}(\rho_1^2 + \cdots + \rho_k^2) = \sigma_j^2,$$

что противоречит допустимости управления $v_j(\cdot)$.

Таким образом, для каждого $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ при некотором i выполняется (5). Тогда согласно утверждению 2 имеем $y_{ij}(\vartheta_{ij}) = 0$.

Теперь остается показать, что управление $u_i(\cdot)$ допустимо. Действительно,

$$\sum_{j=1}^{m} \int_{\vartheta_{i,j-1}}^{\vartheta_{ij}} |u_i(s)|^2 ds \le \rho_{i1}^2 + \rho_{i2}^2 + \cdots + \rho_{im}^2 = \frac{\rho_i^2}{\sigma^2}(\sigma_1^2 + \cdots + \sigma_m^2) = \rho_i^2. \quad \square$$

Пример. В R^4 рассмотрим игру

$$\dot z_{ij} = C_{ij} z_{ij} + u_i - v_j, \quad z_{ij}(t_0) = z_{ij}^0, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2, \tag{6}$$

где $z_i, u_i, v_j \in R^4$;

$$C_{11} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$C_{21} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Матрицы C_{ij}, $i, j = 1, 2$, не удовлетворяют условиям предположения 3 ([9]) и условиям предположения 2 ([10]).

Можно проверить, что все матрицы C_{ij}, $i, j = 1, 2$, имеют собственные значения с неположительными вещественными частями. Следовательно, согласно теореме 2 в игре (6) из любого начального положения $z^0 = \{z_{11}^0, z_{12}^0, z_{21}^0, z_{22}^0\}$ возможно завершение преследования за некоторое конечное время.

Литература

1. Айзекс Р. *Дифференциальные игры.* – М.: Мир, 1967. – 480 с.
2. Понтрягин Л.С. *Избранные труды.* – М.: Наука, 1988. – 576 с.
3. Красовский Н.Н., Субботин А.И. *Позиционные дифференциальные игры.* – М.: Наука, 1974. – 456 с.
4. Красовский Н.Н. *Управление динамической системой.* – М.: Наука, 1985. – 516 с.

5. Субботин А.И., Ченцов А.Г. *Оптимизация гарантии в задачах управления.* – М: Наука, 1981. – 288 с.
6. Никольский М.С. *Прямой метод в линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями* / В кн. "Управляемые системы". – Новосибирск, 1969. – Вып. 2. – С. 49–59.
7. Ушаков В.Н. *Экстремальные стратегии в дифференциальных играх с интегральными ограничениями* // ПММ. – 1972. – Т. 36. – № 1. – С. 15–23.
8. Сатимов Н.Ю., Рихсиев Б.Б., Ибрагимов Г.И. *Об одной дифференциальной игре многих лиц с интегральными ограничениями* / В кн. "Актуальные вопросы теории оптимального управления и дифференциальных игр". – Ташкент: Фан, 1996. – С. 89–94.
9. Сатимов Н.Ю., Рихсиев Б.Б., Хамдамов А.А. *О задаче преследования для линейных дифференциальных и дискретных игр многих лиц* // Матем. сб. – 1982. – Т. 118. – № 4. – С. 456–469.
10. Рихсиев Б.Б. *Об одной линейной задаче преследования многих лиц с интегральными ограничениями на управления игроков* / В кн. "Неклассические задачи математической физики". – Ташкент: Фан, 1985. – С. 184–202.
11. Ибрагимов Г.И. *К задаче группового преследования с интегральными ограничениями на управления игроков* // Матем. заметки. – 2001. – Т. 70. – № 2. – С. 201–212.
12. Ибрагимов Г.И. *Об одной игре оптимального преследования несколькими объектами одного* // ПММ. – 1998. – Т. 62. – № 2. – С. 199–205.
13. Azamov A.A., Samatov B.T. Π-*strategy. An elementary introduction to the theory of differential games.* – National Univ. of Uzbekistan, 2000. – 32 p.

Университет мировой экономики
и дипломатии (*Ташкент*)

Поступила
07.12.2002