Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования
КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского
Кафедра дифференциальных уравнений

Специальность: 010100 – математика
Специализация: дифференциальные уравнения

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

(Бакалаврская работа)

«Элементарное решение операторов и их приложения»

Работа завершена:
«____» _____2014 г. _____ Шагиахметова Д.Ф.
Работа допущена к защите:
Научный руководитель
Кандидат физико-математических наук,доцент
«____» _____2014 г. _____Салехов Л.Г.
Заведующий кафедрой:
доктор физико-математических наук,
профессор
«____» _____2014 г. _____Обносов Ю.В.

КАЗАНЬ — 2014

Содержание

1.Введение 3
2.Теоретические сведения 4
3. Решение задачи Коши методом элементарного решения 6
4. Использованная литература 19

Введение

Многие задачи математической физики сводятся к краевым задачам для дифференциальных (интегрально-дифференциальных) уравнений – уравнений математической физики. Основными математическими средствами исследования этих задач служат теория дифференциальных уравнений, теория функций, функциональный анализ, теория вероятностей, приближенные методы и вычислительная математика.

Изучение математических моделей квантовой физики потребовало привличение новых областей математики, таких как теории обобщенных функций, теории функций комплексных переменных, топологических и алгебраических методов.

Среди задач математической физики выделяется важный класс корректно поставленных задач, т.е. задач, для которых решение существует, единственно и непрерывно зависит от данных задачи.

Точное определение обобщенного решения опирается на понятие обобщенной производной и вообще, обобщенной функции. Аппарат теории обобщенных функций служит удобным средством для исследования линейных краевых задач математической физики в обобщенной и классической постановках.

Обобщенные функции впервые в науку были введены П.Дираком в его квантомеханических исследованиях, в которых систематически использовалась знаменитая δ-функция. Основы математической теории обобщенных функций были заложены С.Л.Соболевым и Л.Шварцем. В дальнейшем теория обобщенных функций интенсивно развивалась многими математиками. В настоящее время теория обобщенных функций далеко продвинута вперед,имеет многочисленные применения в физике и математике и прочно вошла в обиход математика,физика и инженера.

Целью моей бакалаврской работы является решение задач Коши методом элементарного решения, применяя аппарат теории обобщенных функций.

Некоторые теоретические сведения

1) **Обобщенная функция** - линейный непрерывный функционал.

2)$\mathcal{D}(\mathbf{\Omega})$ - пространство функций, бесконечно дифференцируемых и финитных в Ω.

3)$\mathcal{D}'(\mathbf{\Omega})$- пространство обобщенных функций, бесконечно дифференцируемых и финитных в Ω.

4)**Функция Хевисайда** $Y(t)$:

$$Y(t) := \begin{cases} 1, \text{ t} > 0 \\ 0, \text{ t} < 0 \end{cases}$$

Свойства:

1) $\frac{dY}{dt} = \delta$

2)$\mathcal{F}(Y) = \delta_+$

5) **Мера Дирака**:

$< \delta, \varphi >:= \varphi(0), \qquad \forall \varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$, где $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ - пространство бесконечно дифференцируемых функций.

6) $\mathcal{A}$ - сверточная алгебра с 1-ой, $\mathfrak{M}$ - **сверточный модуль** на сверточной алгебре $\mathcal{A}$, если:

$\forall A \in \mathcal{A}, \qquad \forall X \in \mathfrak{M} \qquad \exists : A * X = X * A \in \mathfrak{M}.$

7) **Свойства преобразования Фурье**

Если преобразование Фурье основано на формуле:

$$(\mathcal{F}\varphi)(\xi) := \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i t \xi} \varphi(t) dt, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \qquad \forall n \in N,$$

то выполняются свойства:

1) $\mathcal{F}(\chi) = \delta_a, \qquad \forall a \in \mathbb{R}^n$

2) $\mathcal{F}(\delta_a) = \chi, \ \chi = e^{2\pi i a x}$

3)$\mathcal{F}[(2\pi ia\xi)^\alpha] = D^\alpha\delta, \qquad \forall\alpha \in \mathbb{N}^n$

4)$\mathcal{F}(D^\alpha\delta) = (-2\pi ia\xi)^\alpha)$

5)$\mathcal{F}(v.p.\frac{1}{x})(\xi) = -\pi isgn\xi$

6)$\mathcal{F}(sgnx)(\xi) = \frac{1}{\pi i}v.p.\frac{1}{\xi}$

7)E - **элементарное решение** (причем единственное) оператора $P(D)$, где $(P(D) = D^m + c_1D^{m-1} + ... + c_{m-1}D + c_m)$.

Элементарное решение ищется в виде:

$E = Y(t)\mathbf{e}(\mathbf{t})$, которое равно произведению функции Хевисайда на решение "e" , где e - решение классической задачи Коши:

$$\begin{cases} \text{P(D)e=0,} \\ \text{e(0)=e'(0)=...e}^{m-2} = 0;\ e^{m-1} = 1. \end{cases}$$

$P(D)E = \delta$

Решение задач методом элементарного решения

Задача 1.

Рассмотрим задачу Коши:

$$\begin{cases} L\mathcal{U} = f(x,t), \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall t > 0, \qquad (1) \\ L = \frac{\partial}{\partial t} + b\frac{\partial}{\partial x} + c, \qquad \text{где} \quad b, c - const, \\ \mathcal{U}|_{t=0} = \varphi(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}. \qquad (2) \end{cases}$$

Как мы знаем,общим решением нашей задачи Коши будет являться

$$\mathcal{U}(x,t) = e^{-ct}\varphi(x - bt).$$

Найдем элементарное решение:

$$LE = \delta, \qquad \text{где} \quad \delta - \text{мера Дирака.}$$

Применим метод преобразования Фурье в смысле обобщенных функций по x (считая t за параметр):

$$\left[\frac{d}{dt} + 2\pi(b\xi + c)\right]\widehat{E}(\xi,t) = \delta(t),$$

$$\widehat{E}(\xi,t) = Y(t)e^{-(2\pi ib\xi + c)t},$$

$$E(x,t) = Y(t)e^{-ct} \otimes \delta_{bt} = Y(t)e^{-ct} \otimes \delta(x - bt),$$

используя свойство преобразования Фурье $\mathcal{F}(\delta_a) = e^{-2\pi ia\xi}$

$E(x,t) = Y(t)e^{-ct} \otimes \delta(x - bt)$ - элементарное решение с гиперболическим носителем.

Введем регулярные обобщенные функции:

$$\mathcal{U} = Y(t)u(x,t),$$

$$F = Y(t)f(x,t).$$

Эти обобщенные функции определены на всей фазовой плоскости.

Распишем уравнение в частных производных $(\frac{\partial}{\partial t}+b\frac{\partial}{\partial x}+c)\mathcal{U}=f(x,t)$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{U}=Y(t)\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t}+\delta(t)\otimes\varphi(x),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{U}=Y(t)\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t},$$

$$\mathcal{U}=Y(t)u(x,t).$$

$$L\mathcal{U}=Y(t)(Lu+\delta(t)\otimes\varphi(x))$$

$$L\mathcal{U}=F+\delta(t)\otimes\varphi(x)$$

$$L\delta*\mathcal{U}=F+\delta(t)\otimes\varphi(x)\qquad\forall x,t\in\mathbb{R}^2$$

— уравнение сверток.

$\mathcal{U}\in\mathfrak{m}$ ($\mathfrak{m}$ — сверточный модуль с параболическим носителем).

$$\mathcal{U}=E*\{F*\delta(t)\otimes\varphi(x)\}$$

при $\mathcal{U}=\mathcal{U}|_{t>0}$ — получим решение исходной задачи Коши методом элементарного решения.

Задача 2.

Рассмотрим элементарное решение оператора $L=\dfrac{\partial}{\partial t}+\beta\dfrac{\partial}{\partial x}+\gamma$ и его приложение к решению задачи Коши:

$$\begin{cases} a\dfrac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} + b\dfrac{\partial \mathcal{U}}{\partial x} + c\mathcal{U} = f(x,t), t > 0, \forall x \in \mathbb{R}, & (1) \\ \mathcal{U}|_{t=0} = \varphi(x), \forall x \in \mathbb{R}. & (2) \end{cases}$$

Элементарным решением оператора $L = \dfrac{\partial}{\partial t} + \beta\dfrac{\partial}{\partial x} + \gamma$ (с гиперболическим носителем) будет $LE = \beta(x,t)$.

Ищем E в виде $E = e^{-\gamma t}E(x,t)$. Тогда:

$$\begin{array}{c|l} 1 & \dfrac{\partial E}{\partial t} = e^{-\gamma t}(E_t - \gamma E), \\ \beta & \dfrac{\partial E}{\partial x} = e^{\gamma t}E_x, \\ \gamma & E = e^{-\gamma t}E. \end{array}$$

$LE = e^{-\gamma t}(E_t - \beta E_x) = \beta(x,t)$, откуда $\dfrac{\partial E}{\partial t} + \beta\dfrac{\partial E}{\partial x} = e^{\gamma t}\delta(x,t) = \delta(x,t)$.

Таким образом, достаточно найти элементарное решение $E(x,t)$ оператора $L_0 = \dfrac{\partial}{\partial t} + \beta\dfrac{\partial}{\partial x}$.

Для отыскания E применим метод преобразования Фурье в смысле обобщенных функций по x (считая t за параметр) :

$$\frac{d\hat{E}(\xi,t)}{dt} + \beta 2\pi i\xi\hat{E}(\xi,t) = \beta(t) \Rightarrow$$

$$\hat{E}(\xi,t) = Y(t)e^{-2\pi i\beta\xi t}.$$

Отсюда получим:

$E(x,t) = Y(t) \bigotimes \delta_{\beta t}(x) \Rightarrow E(x,t) = Y(t)e^{-\gamma t} \bigotimes \delta_{\beta t}(x) = Y(t)e^{-\gamma t} \bigotimes \delta(x-\beta t), \forall x \in \mathbb{R}$.

Итак, $suppE(x,t) = \{(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_x \mid x - \beta t = 0\}$, то есть $suppE(x,t)$ есть гиперболическое множество.

Решение:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} + \beta \dfrac{\partial \mathcal{U}}{\partial x} + \gamma \mathcal{U} = \dfrac{1}{a} f(x,t), t > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \\ \mathcal{U}|_{t=0} = \varphi(x), \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Элементарное решение: $E(x,t) = Y(t)e^{-\gamma t} \bigotimes \delta(x - \beta t)$.

$\mathcal{U} = Y(t)\mathcal{U}(x,t)$, $F(x,t) = Y(t)\dfrac{1}{a} f(x,t)$.

$$\begin{array}{c|l} 1 & \dfrac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} = Y(t)\mathcal{U}_t(x,t) + \varphi(x) \bigotimes \delta(t), \\ \beta & \qquad \dfrac{\partial \mathcal{U}}{\partial x} = Y(t)\mathcal{U}_x(x,t), \\ \gamma & \qquad \mathcal{U} = Y(t)\mathcal{U}(x,t). \end{array}$$

$L\mathcal{U} = F(x,t) + \varphi(x) \bigotimes \delta(t)$.

$\mathcal{U} = E(x,t) * \{F(x,t) + \phi(x) \bigotimes \delta(t)\} = Y(t)e^{-\gamma t} \bigotimes \delta(x - \beta t) * \{F(x,t) + \varphi(x) \bigotimes \delta(t)\} = Y(t)e^{-\gamma t} * Y(t)\dfrac{1}{a} f(x - \beta t, t) + Y(t)e^{-\gamma t}\varphi(x - \beta t)$.

Откуда: $\mathcal{U}(x,t) = \dfrac{1}{a} \int\limits_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} f[x - \beta\tau, \tau] d\tau + e^{\gamma t}\phi(x - \beta t), t > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

И окончательно имеем: $\mathcal{U}(x,t) = \dfrac{1}{a} \int\limits_0^t e^{-\frac{c}{a}(t-\tau)} f[x - \dfrac{b}{a}\tau, \tau] d\tau + e^{-\frac{c}{a}t}\varphi(x - \dfrac{b}{a}t), t > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Задача 3.

случай задачи Коши для неоднородного случая

$$\begin{cases} \{(a\frac{\partial}{\partial t}+b\frac{\partial}{\partial x}+c)^{(2)}+d^2\}\mathcal{U}=f(x,t),\forall x\in R,t>0 & (1)\\ \mathcal{U}|_{t=0}=\mathcal{U}_t|_{t=0}=0,\forall x\in\mathbb{R} & (2)\end{cases}$$

$$\begin{cases} \{(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x})^{(2)}+1\}\mathcal{U}=\sin x,t>0,\forall x\in\mathbb{R}, & (3)\\ \mathcal{U}|_{t=0}=\mathcal{U}_t|_{t=0}=0,\forall x\in\mathbb{R} & (4)\end{cases}$$

Решение методом элементарного решения:

$$E(x,t)=\frac{Y(t)}{ad}e^{-\frac{c}{a}t}\sin\frac{d}{a}t\delta(x-\frac{b}{a}t).$$

$$\mathcal{U}=\frac{1}{ad}\int\limits_0^t e^{-\frac{c}{d}(t-\tau)}\sin\frac{d}{a}(t-\tau)f(x-\frac{b}{a}\tau,\tau)d\tau.$$

Тогда $\mathcal{U}(x,t)=\int\limits_0^t\sin(t-\tau)\sin(x-\tau)d\tau=\int\limits_0^t\sin\xi\sin(x-\xi)d\xi=$ $\frac{1}{2}\int\limits_0^t(\cos(2\xi-x)-cosx)d\xi=\frac{1}{2}\{\int\limits_0^t\cos(2\xi-x)d\xi-\cos(xt)\}$, но $\int\limits_0^t\cos(2\xi-x)d\xi=$ $\frac{1}{2}\int\limits_{-x}^{2t-x}\cos\tau d\tau=\frac{1}{2}\{\sin(2t-x)+\sin x\}=\sin t\cos(t-x)$.

$$\mathcal{U}(x,t)=\frac{1}{2}\{\sin t\cos(t-x)-t\cos x\}.\ (*)$$

Теперь при помощи формулы (*) найдем решение задачи (3)-(4):

$$\mathcal{U}_t|_{t=0}=\frac{1}{2}\{\cos x-\cos x\}=0,$$

$$\mathcal{U}_{tt}=\frac{1}{2}\{\cos t\cos(t-x)-\sin t\sin(t-x)-\cos x\},$$

$\mathcal{U}_{tt}=\frac{1}{2}\{-\sin t\cos(t-x)-\cos t\sin(t-x)+\cos t\sin(t-x)-\sin t\cos(t-x)=$ $-\{\sin t\cos(t-x)+\cos t\sin(t-x)\}=-\sin(2t-x)$,

$$\mathcal{U}_x=\frac{1}{2}\{\sin t\sin(t-x)+t\sin x\},$$

$$\mathcal{U}_{xx} = \frac{1}{2}\{-\sin t\cos(t-x) + t\cos x\},$$

$$\mathcal{U}_{tx} = \frac{1}{2}\{\cos t\sin(t-x) + \sin t\cos(t-x) + \sin x\},$$

$$(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x})^{(2)}\mathcal{U} = -\sin(2t-x)+\sin(2t-x)+\sin x-\frac{1}{2}\sin t\cos(t-x)+\frac{t}{2}\cos x,$$

$(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x})^{(2)}\mathcal{U}+\mathcal{U} = \{\sin x-\frac{1}{2}\sin t\cos(t-x)+\frac{t}{2}\cos x\}+\frac{1}{2}\{\sin t\cos(t-x)-$
$-\frac{t}{2}\cos x\} = \sin x.$

Действительно формула (*) дает решение исходной задачи (3)-(4).

Задача 4.

Найдем элементарное решение оператора $L = (a\frac{\partial}{\partial t} + b\frac{\partial}{\partial x} + c)^{(2)} + d^2$ и решение задачи Коши: $\begin{cases} L\mathcal{U} = f(x,t), t > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \\ \mathcal{U}_{|t=0} = \mathcal{U}_t|_{t=0} = 0, \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases}$

$$\{(a\frac{\partial}{\partial t} + b\frac{\partial}{\partial x} + c)^{(2)} + d^2\}E(x,t) = \delta(x)\otimes\delta(t),$$

$$\{(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{b}{a}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{c}{a})^{(2)} + (\frac{d}{a})^{(2)}\}E(x,t) = \frac{1}{a^2}\delta(x)\otimes\delta(t).$$

Найдем элементарное решение $E_1(x,t)$ оператора $\{(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{b}{a}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{c}{a})^{(2)} + (\frac{d}{a})^{(2)}\}$.

По определению E_1 имеем:

$$\{(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{b}{a}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{c}{a})^{(2)} + (\frac{d}{a})^{(2)}\}E_1 = \frac{1}{a^2}\delta(x)\otimes\delta(t).$$

Применим метод преобразования Фурье в смысле обобщенных функций и получим:

$$\{(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{b2\pi i\xi + c}{a})^{(2)} + (\frac{d}{a})^{(2)}\}\hat{E}_1(\xi,t) = \delta(t).$$

Решаем задачу "e":

$$e(\xi,t)=e^{-\frac{(2\pi i\xi b+c)t}{a}}\{A\cos\frac{d}{a}t+B\sin\frac{d}{a}t\},$$

$$e(0)=0\Rightarrow A=0\Rightarrow e(\xi,t)=Be^{-\frac{(2\pi i\xi b+c)t}{a}}\sin\frac{d}{a}t,$$

$$e^{'}(0)=1\Rightarrow B\frac{d}{a}=1\Rightarrow B=\frac{a}{d}.$$

Тогда $E_1(\xi,t)=\frac{a}{d}Y(t)e^{-(\frac{2\pi i\xi b+c}{a})t}\sin\frac{d}{a}t\Rightarrow$

$$E_1(x,t)=\frac{a}{d}Y(t)e^{\frac{c}{a}t}\sin\frac{d}{a}t\delta(x-\frac{b}{a}t).$$

А тогда $E(x,t)$ с гиперболическим носителем.

Тогда решение задачи

$$\begin{cases}\{(a\frac{\partial}{\partial t}+b\frac{\partial}{\partial x}+c)^{(2)}+d^2\}\mathcal{U}=f(x,t),t>0,\forall x\in\mathbb{R},\\ \mathcal{U}|_{t=0}=\mathcal{U}_t|_{t=0}=0,\forall x\in\mathbb{R}.\end{cases}$$

имеет вид:

$$E(x,t)*f(x,t)=\frac{1}{ad}\int\limits_0^t e^{\frac{c}{a}(t-\tau)}\sin\frac{d}{a}(t-\tau)f[x-\frac{b}{a}(\tau),\tau]d\tau.$$

Пусть $f=1$, тогда

$$\mathcal{U}=\frac{1}{ad}\int\limits_0^t e^{\frac{c}{a}(t-\tau)}\sin\frac{d}{a}(t-\tau)f[x-\frac{b}{a}(\tau),\tau]d\tau.\ (0)$$

Вычислим $I_1(t)=\int\limits_0^t e^{-\frac{c}{a}\xi}\sin\frac{d}{a}\xi d\xi$.

Введем $I_2(t)=\int\limits_0^t e^{-\frac{c}{a}\xi}\cos\frac{d}{a}\xi d\xi$.

Рассмотрим

$$I_2+iI_1=\int\limits_0^t e^{\frac{-c+di}{a}\xi}=\frac{a}{-c+di}\{e^{\frac{-c+di}{a}t}-1\}=\frac{a(-c-di)}{c^2+a^2}\{e^{\frac{-c}{a}t}[\cos\frac{d}{a}t+i\sin\frac{d}{a}t]-1\}.$$

Тогда:

$$I_1(t)=\frac{-ac}{c^2+a^2}e^{\frac{-c}{a}t}\sin\frac{d}{a}t-\frac{-ad}{c^2+d^2}[e^{\frac{-c}{a}t}(\cos\frac{d}{a}t-1)],$$

$$I_1(t)=\frac{-a}{c^2+a^2}\{e^{\frac{-c}{a}t}[c\sin\frac{d}{a}t+d\cos\frac{d}{a}t]-d\}.$$

Следовательно,

$$\mathcal{U}(t)=\frac{-1}{d(c^2+a^2)}\{e^{\frac{-c}{a}}t[c\sin\frac{d}{a}t+d\cos\frac{d}{a}t]-d\}.$$

Проверка начальных условий

$$\mathcal{U}_t|_{t=0}=\frac{-d}{d(c^2+a^2)}\{\frac{-c}{ad}+\frac{c}{ad}\}=0$$

Если решить иным способом, то получим $\mathcal{U}(x,t)=\mathcal{U}(t)$, тогда задача примет вид:

$$\begin{cases}[(a\frac{d}{dt}+c)^2+d^2]\mathcal{U}=1,\\ \mathcal{U}(0)=\mathcal{U}'(0)=0.\end{cases}$$

или $[(\frac{d}{dt}+\frac{c}{a})^2+(\frac{d}{a})^2]\mathcal{U}=(\frac{1}{a^2})$.

решим задачу "e":

$$\lambda_1=-\frac{c}{a}+i\frac{d}{a},\lambda_2=-\frac{c}{a}-i\frac{d}{a}.$$

$$e(t)=e^{\frac{-c}{a}t}(A\cos\frac{d}{a}t+B\sin\frac{d}{a}t)$$

из условий найдем A и B :

$$e(0)=0\Rightarrow A=0,$$

$$e'(0) = 1 \Rightarrow B = \frac{a}{d}.$$

В итоге получим:

$$e(t) = \frac{a}{d} e^{\frac{-c}{a}t} \sin \frac{d}{a} t.$$

$$E(t) = Y(t)e(t) = \frac{a}{d} Y(t) e^{\frac{-c}{a}t} \sin \frac{d}{a} t \Rightarrow$$

$$\mathcal{U} = E * \frac{1}{a^2} = \frac{1}{ad} \int\limits_0^t e^{\frac{c}{a}(t-\tau)} \sin \frac{d}{a}(t-\tau) d\tau.$$

то есть снова формула (0).

Задача 5.

Здесь рассмотрим задачу:

$$\begin{cases} \{(a\frac{\partial}{\partial t} + b\frac{\partial}{\partial x} + c)^{(2)} + d^2\}\mathcal{U} = 1, t > 0, \forall x \in \mathbb{R}, & (1) \\ \mathcal{U}|_{t=0} = \mathcal{U}_t|_{t=0} = 0, \forall x \in \mathbb{R}. & (2) \end{cases}$$

Поскольку правая часть уравнения не зависит от x, то решение для $\mathcal{U}(x,t)$ можем искать в виде:

$$\mathcal{U}(x,t) = \mathcal{U}(t).$$

Тогда возникает задача из "О.Д.У.":

$$\{(a\frac{d}{dt} + c)^2 + d^2\}\mathcal{U}(t) = 1,$$

с начальными условиями

$$\mathcal{U}(0) = \mathcal{U}'(0) = 0.$$

и ее решение приводит к тому же результату.

$$\begin{cases} \{(a\frac{\partial}{\partial t} + b\frac{\partial}{\partial x} + c)^{(2)} + d^2\}\mathcal{U} = f(x,t), t > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \\ \mathcal{U}|_{t=0} = \mathcal{U}_t|_{t=0} = 0, \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

$\mathcal{U}(x,t) = E(x,t) * Y(t)f(x,t) = Y(t)\frac{1}{ad}e^{-\frac{c}{a}t}\sin\frac{d}{a}t\delta(x-\frac{b}{a}t) * Y(t)f(x,t) = \frac{1}{ad}\int\limits_0^t e^{-\frac{c}{a}(t-\tau)}\sin\frac{d}{a}(t-\tau)f(x-\frac{b}{a}\tau,\tau)d\tau.$

Пусть $f = 1$:

$$\mathcal{U}(x,t) = \frac{1}{ad}\int\limits_0^t e^{-\frac{c}{a}(t-\tau)}\sin\frac{d}{a}(t-\tau)d\tau = \frac{1}{ad}\int\limits_0^t e^{-\frac{c}{a}\xi}\sin\frac{d}{a}\xi d\xi.$$

Вычислим $I_1(t) = \int\limits_0^t e^{-\frac{c}{a}\xi}\sin\frac{d}{a}\xi d\xi.$

Введем $I_2(t) = \int\limits_0^t e^{-\frac{c}{a}\xi}\cos\frac{d}{a}\xi d\xi.$

Рассмотрим

$A(t) = I_2 + iI_1 = \int\limits_0^t e^{\frac{-c+id}{a}\xi} = \frac{a}{-c+id}\{e^{\frac{-c+id}{a}t} - 1\} = \frac{a(-c-id)}{c^2+a^2}\{e^{\frac{-c}{a}t}[\cos\frac{d}{a}t + i\sin\frac{d}{a}t] - 1\}.$

Тогда $I_1(t) = ImA(t) = \frac{1}{c^2+d^2}\{-ace^{-\frac{c}{a}t}\sin\frac{d}{a}t - ade^{-\frac{c}{a}t}(\cos\frac{d}{a}t - 1) = -\frac{ae^{-\frac{c}{a}t}}{c^2+a^2}\{c\sin\frac{d}{a}t + d(\cos\frac{d}{a}t - 1)\}.$

Следовательно решение имеет вид:

$$\mathcal{U}(x,t) = \frac{e^{-\frac{c}{a}t}}{a}[c\sin\frac{d}{a}t + d(\cos\frac{d}{a}t - 1)].$$

Задача 6.

Рассмотрим задачу:

$$\begin{cases} \{(a\frac{\partial}{\partial t} + b\frac{\partial}{\partial x} + c)^{(2)} + d^2\}\mathcal{U} = f(x,t), t > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \\ \mathcal{U}|_{t=0} = \mathcal{U}_t|_{t=0} = 0, \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Введем замену: $\begin{cases} \xi = t, \\ \eta = x - at. \end{cases}$

$$\begin{array}{c|l} 1 & \dfrac{\partial}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial \xi}1 + \dfrac{\partial}{\partial \eta}(-a), \\ a & \dfrac{\partial}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial \xi}0 + \dfrac{\partial}{\partial \eta}1. \end{array}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} + a\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} \Rightarrow$$

$$\{(\frac{\partial}{\partial \xi} + c)^{(2)} + d^2\}\mathcal{U}(\xi,\eta) = f(\xi,\eta).(1)$$

$$I_0 : \{(\frac{\partial}{\partial \xi} + c)^{(2)} + d^2\}\mathcal{U}(\xi,\eta) = 0.$$

$$\{(\frac{d}{d\xi} + c)^{(2)} + d^2\}\mathcal{U}_0(\xi,\eta) = 0.$$

$$(\lambda + c)^2 + d^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda_1 = -c + id,$$

$$\lambda_2 = -c - id.$$

$$\mathcal{U}_0(\xi,\eta) = e^{-c\xi}\{\Phi(\eta)\cos d\xi + \Psi(\eta)\sin d\xi\},$$

то есть $\mathcal{U}_0(x,t) = e^{-ct}\{\Phi(x-at)\cos dt + \Psi(x-at)\sin dt\}$.

Теперь применим метод Дюамеля и для начала решим задачу "ω" :

$$\begin{cases} \mathrm{L}\omega = 0 \text{ ,где } L = \{(\frac{\partial}{\partial t} + a\frac{\partial}{\partial x} + c)^{(2)} + d^2\}, \\ \omega|_t = 0, \\ \omega_t|_{t=0} = f(x,\tau), \quad \forall \tau > 0. \end{cases}$$

$\omega|_t = \Phi(x) = 0, \qquad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \Phi(x) \equiv (0).$

Тогда $\omega(x,t) = e^{-ct}\Psi(x-at)\sin dt$.

$\omega_t|_{t=0} = \Psi(x)d = f(x,t) \Rightarrow \Psi(x) = \frac{1}{d}f(x,\tau)$.

Отсюда получим $\omega(x,t) = \frac{1}{d}e^{-ct}f(x-at,\tau)\sin dt$.
Следовательно $\Omega(x,t,\tau) = \tau_{t=\tau}\omega(x,t) = \frac{1}{d}e^{-c(t-\tau)}f[x-a(t-\tau),\tau]\sin(t-\tau)$.
Решение исходной задачи имеет вид:

$$\mathcal{U}(x,t) = \Omega(x,t,\tau)d\tau = \frac{1}{d}\int\limits_0^t e^{-c(t-\tau)}f[x-a(t-\tau),\tau]\sin(t-\tau)d\tau, t>0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Пусть $f(x,t) = e^{-ct}$,тогда
$\mathcal{U}(x,t) = \frac{e^{-ct}}{d}\int\limits_0^t \sin d(t-\tau)d\tau = \frac{e^{-ct}}{d}\int\limits_0^t \sin d\xi d\xi = \frac{e^{-ct}}{d^2}\{1-\cos dt\}, t > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ $(*)$
Очевидно, поскольку $f(x,t)$ не зависит от x ,то решение можно искать просто в виде $\mathcal{U}(x,t) = G(t)$, тогда исходное уравнение примет вид:

$$\{(\frac{d}{dt}+c)^2 + d^2\}G(t) = e^{-ct}, t>0, \ (A)$$

с начальными условиями $G(0) = G'(0) = 0$. (B)
Решаем задачу (A)-(B) методом Коши (то есть через "e"):

$$\{(\frac{d}{dt}+c)^2 + d^2\}e(t) = 0.$$

$$(\lambda+c)^2 + d^2 = 0:$$

$$\lambda_1 = -c + id,$$

$$\lambda_2 = -c - id.$$

$$e(t) = (M\cos dt + N\sin dt)e^{-ct}.$$

$$e(0) = 0 \Rightarrow M = 0,$$

$$e'(0) = 1 \Rightarrow N = \frac{1}{d},$$

$$e(t) = \frac{1}{d} e^{-ct} \sin dt, t > 0.$$

Тогда $G(t) = \int\limits_0^t e(t-\tau)e^{-c\tau} d\tau, t > 0.$

$G(t) = \frac{1}{d} \int\limits_0^t e^{-c(t-\tau)} \sin d(t-\tau) e^{-c\tau} d\tau = \frac{e^{-ct}}{d} \int\limits_0^t \sin d(t-\tau) d\tau = \{t - \tau = \xi\} = \frac{e^{-ct}}{d} \int\limits_0^t \sin d\xi d\xi = \frac{e^{-ct}}{d^2} \{1 - \cos dt\}$ $(**)$

Как мы видим, ответы (*) и (**) совпадают

Список использованной литературы.

1) В.С. Владимиров. Уравнения математической физики. - Наука. 1981г.
2) Салехов Л.Г. "Лекции по уравнениям в частных производных.", 2011г.
3) Салехов Л.Г. "Лекции по технике ядер.",2012 г.

4) Салехов Л.Г. "Лекции по интегральным преобразованиям в пространстве обобщенных функций." ,2014 г.
5) Агранович М. С. Обобщенные функции. М.: МЦНМО, 2009г.
6) Владимиров В.С., Михайлов В.П., Вашарин А.А., Каримова Х.Х., Сидоров Ю.В., Шабунин М.И. "Сборник задач по уравнениям математической физики", М.Наука, 1982г.

Ю. М. Широков, Алгебра одномерных обобщенных функций. Теоретическая и математическая физика, 1979г.