Известия вузов. Математика *http://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm/*
2017, №4, с. 15–22 *e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru*

Н.А. КОРЕШКОВ

О ВНУТРЕННИХ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯХ ПРОСТЫХ ЛИЕВЫХ ПУЧКОВ РАНГА 1

Аннотация. В работе доказано, что простые лиевы пучки ранга один над алгебраически замкнутым полем P характеристики 0, у которых операторы левого умножения являются дифференцированиями, имеют вид сэндвичевой алгебры $M_3(U, \mathcal{D}')$, где U — подпространство всех кососимметрических матриц в $M_3(P)$, а $\mathcal{D}'$ — любое подпространство, содержащее $\langle E \rangle$ в пространстве всех диагональных матриц $\mathcal{D}$ в $M_3(P)$.

Ключевые слова: лиев пучок, картановская подалгебра, тор, внутреннее дифференцирование, сэндвичева алгебра.

УДК: 512.554

Лиевы пучки были введены в работе [1]. Их конструкция связана с нахождением первых интегралов некоторых гамильтоноых систем [2], [3].

Приведем определение лиева пучка. Пусть L — конечномерное векторное пространство над полем P. Обозначим через K пространство всех билинейных кососимметрических отображений из $L \times L$ в L.

Определение 1. Векторное пространство L над полем P называется лиевым пучком, если существует подпространство S из K такое, что для любого $s \in S$ выполняется соотношение

$$(asb)sc + (bsc)sa + (csa)sb = 0, \quad a, b, c \in L$$

(здесь xsy — образ пары $(x, y) \in L \times L$ при отображении s), т. е. линейная комбинация двух лиевых умножений из S снова является лиевым умножением. Это позволяет переформулировать определение 1 следующим образом.

Определение 2. Векторное пространство L над полем P называется лиевым пучком, если существует подпространство S из K такое, что для любых s и s' из S имеет место соотношение

$$J(a, b, c, s, s') + J(a, b, c, s', s) = 0, \quad a, b, c \in L, \tag{1}$$

где $J(a, b, c, s, s') = (asb)s'c + (bsc)s'a + (csa)s'b$.

Если $\dim S = n$, то лиев пучок часто будем называть n-кратным лиевым пучком и обозначать $L(S)$.

Определение 2 с заменой термина “n-кратный лиев пучок ” на “n-кратная алгебра Ли” использовалось в [4], [5]. Для этих алгебр в [5] были доказаны аналоги теорем Ли и Энгеля.

Заметим, что если в определении у n-арной алгебры Ли ([6]) $n-2$ аргументов считать фиксированными, то получим пример m-кратного лиева пучка, где $m = (n-2)\dim L$. Кроме того, конструкция n-кратного лиева пучка при $n = 2$ под названием бигамильтоновой

Поступила 29.09.2015

операды рассматривалась в [7]. Важным примером лиева пучка является сэндвичева алгебра.

Определение 3. Сэндвичевой алгеброй $M_n(U,V)$ называется пара пространств U, V в пространстве матриц $M_n(P)$, для которых выполнено условие $u_1vu_2 - u_2vu_1 \in U$, когда $u_1, u_2 \in U$, $v \in V$.

Легко проверить, что сэндвичева алгебра $M_n(U,V)$ является лиевым пучком $U(V)$ в смысле определения 1, если в качестве подпространства умножений S рассматривать подпространство V.

Определим некоторые понятия для лиевых пучков, аналогичные соответствующим понятиям для алгебр Ли.

Если U и V — два подпространства в $L(S)$, то символ UV или USV будет обозначать пространство $\langle usv,\ u \in U,\ v \in V,\ s \in S\rangle_P$.

Назовем лиев пучок $L = L(S)$ разрешимым, если существует натуральное k такое, что $L^{(k)} = 0$, где $L^{(i+1)} = L^{(i)}L^{(i)}$, $i \geq 0$, $L^{(0)} = L$.

Лиев пучок $L = L(S)$ нильпотентен, если для некоторого натурального k имеем $L^k = 0$, где $L^{i+1} = L^iL$, $i \geq 1$, $L^1 = L$. В частности, лиев пучок $L(S)$ абелев, если $L^2(S) = 0$.

Подпространство I в лиевом пучке $L(S)$ назовем идеалом, если $xsy \in I$ для любых $x \in I$, $y \in L$, $s \in S$. Лиев пучок называется простым, если он не содержит нетривиальных идеалов и $L^2(S) \neq 0$.

Подпространство U в лиевом пучке $L(S)$ назовем подалгеброй, если $xsy \in U$ при $x, y \in U$, $s \in S$.

Подпространство H в $L(S)$ назовем картановской подалгеброй лиева пучка $L(S)$, если H — нильпотентная подалгебра, совпадающая со своим нормализатором

$$N_{L(S)}(H) = \{x \in L \mid hsx \in H \ \forall h \in H,\ \forall s \in S\}.$$

В работе [5] показано, что любой лиев пучок $L(S)$ содержит картановскую подалгебру H, которая является нульпространством L_0 относительно регулярной пары $\{x_0, s_0\} \in L \times S$, т. е. $L_0 = L_0(x_0, s_0) = \{x \in L \mid (\operatorname{ad}_{s_0} x_0)^k x = 0,\ k \in \mathbb{N}\}$, где ad_{s_0} — оператор левого умножения, определенный элементом $s_0 \in S$. (Пара $\{x_0, s_0\} \in L \times S$ называется регулярной, если $\dim L_0(x_0, s_0)$ минимальна.) Размерность нулькомпоненты $L_0(x_0, s_0)$ регулярной пары $\{x_0, s_0\}$ будем называть рангом лиева пучка $L(S)$ и обозначать $rL(S)$.

Как известно, тождество Якоби, определяющее структуру алгебры Ли L, равносильно тому, что любой оператор левого умножения $\operatorname{ad} x$, $x \in L$, является дифференцированием в L при условии антикоммутативности, т. е. $\operatorname{ad} x[y,z] = [\operatorname{ad} x(y), z] + [y, \operatorname{ad} x(z)]$. Такие дифференцирования называют внутренними. Если оператор левого умножения $\operatorname{ad}_s x$, $x \in L$, $s \in S$, лиева пучка $L(S)$ является дифференцированием, то $\operatorname{ad}_s x(ys'z) = (\operatorname{ad}_s x(y))s'z + ys'((\operatorname{ad}_s x)z)$ или $(ys'z)sx + (zsx)s'y + (xsy)s'z = 0$. Обозначим левую часть этого соотношения через $\mathcal{D}(y, z, x, s', s)$. Тогда соотношение (1), определяющее лиев пучок, можно представить в виде

$$\mathcal{D}(a, b, c, s, s') + \mathcal{D}(a, b, c, s's) = 0, \quad a, b, c \in L, \quad s, s' \in S.$$

То, что условие быть дифференцированием для операторов левого умножения в отличие от алгебр Ли обычно не выполняется, показывает

Теорема. *Пусть $L(S)$ — простой лиев пучок, $\dim S > 1$, ранга 1 над алгебраически замкнутым полем P характеристики нуль. Тогда операторы левого умножения $\operatorname{ad}_s x$, $x \in L$, $s \in S$, пучка $L(S)$ являются дифференцированиями, т. е. $\mathcal{D}(y, z, x, s', s) = 0$, $x, y, z \in L$, $s, s' \in S$, тогда и только тогда, когда $L(S)$ совпадает с сэндвичевой алгеброй $M_3(U, \mathcal{D}')$,* *где U — подпространство всех кососимметрических матриц в $M_3(P)$, а $\mathcal{D}'$ — любое подпространство, содержащее $\langle E \rangle$, в пространстве всех диагональных матриц $\mathcal{D}$.*

Доказательство. Как показано в [5], множество пар $U = \{(x_0, s_0),\ x_0 \in L,\ s_0 \in S\}$, для которых $\dim L_0(x_0, s_0) = rL(S)$, образует непустое открытое в топологии Зарисского множество в $L \times S$.

С другой стороны, в [8] показано, что в любом простом лиевом пучке $L(S)$ множество пар (x, s), для которых оператор $\mathrm{ad}_s\, x$ полупрост, также образует непустое открытое в топологии Зарисского множество в $L \times S$. Следовательно, существуют картановские подалгебры, содержащие ненулевые элементы x, для которых оператор $\mathrm{ad}_s\, x$ полупрост, когда s принадлежит некоторому подпространству $S' \subseteq S$. Если ранг $L(S)$ равен единице, то существует картановская подалгебра H, совпадающая с тором $T = T(S')$, где $T(S)$ — абелева алгебра, для любого элемента x которой оператор $\mathrm{ad}_s\, x$, $s \in S' \subseteq S$, полупрост.

Пусть $H = T = \langle h \rangle_P$. Легко видеть, что H будет картановской подалгеброй в алгебре Ли $L(s_0)$, определяемой тем же умножением s_0, для которого пара (h, s_0) регулярна, а элемент h будет регулярным элементом для алгебры Ли $L(s_0)$.

Рассмотрим разложение алгебры Ли $L(s_0)$ в прямую сумму корневых пространств относительно $\mathrm{ad}_{s_0} h$, т. е.

$$L(s_0) = H + \sum_{\alpha \neq 0} L_\alpha,$$

где $L_\alpha = \{x \in L \mid (\mathrm{ad}_{s_0} h)x = \alpha(h)x\}$, $H = L_0 = \{x \in L \mid (\mathrm{ad}_{s_0} h)x = 0\}$, $\alpha(h) \in P$.

Рассмотрим три случая.

I. Обозначим через Σ совокупность всех ненулевых корней для ореретора $\mathrm{ad}_{s_0} h$. Предположим, что для любого $\alpha \in \Sigma$ функция $-\alpha$ не является корнем. Тогда подпространство $\mathcal{L} = \sum\limits_{\alpha \neq 0} L_\alpha$ — нильпотентная подалгебра в алгебре Ли $L(s_0)$. Действительно, так как $e_\alpha s_0 e_\beta \in L_{\alpha+\beta}$, когда $e_\alpha \in L_\alpha$, $e_\beta \in L_\beta$, то из условия $\alpha+\beta \neq 0$ вытекает, что $\mathcal{L}$ — подалгебра. Так как характеристика поля P равна нулю, то все функции $\alpha + t\beta$, $t \in \mathbb{N}$, различны. Следовательно, в силу конечности числа корней, для любых $\alpha, \beta \in \Sigma$ существует $t \in \mathbb{N}$ такое, что $\alpha + t\beta \in \Sigma$, но $\alpha + (t+1)\beta \notin \Sigma$, т. е. $(\mathrm{ad}_{s_0} e_\beta)^{t+1} e_\alpha = 0$. Отсюда следует, что для любого $\beta \in \Sigma$ оператор $\mathrm{ad}_{s_0} e_\beta$ нильпотентен. Так как объединение всех корневых пространств L_α, $\alpha \in \Sigma$, образует множество Ли, т. е. замкнуто относительно операции s_0, то по теореме Энгеля в форме Джекобсона ([9]) алгебра Ли $\mathcal{L}(s_0)$ нильпотентна. Поэтому $\mathcal{L} \supset \mathcal{L}^2 \supset \cdots \supset \mathcal{L}^m \supset 0$, где $\mathcal{L}^i = \mathcal{L}^{i-1} s_0 \mathcal{L}$, $i \geq 2$. Очевидно, $h s_0 \mathcal{L}^i \subset \mathcal{L}^i$, т. е. $\mathcal{L}^i$ инвариантно относительно оператора дифференцирования $\mathrm{ad}_{s_0} h$. Поэтому $\mathcal{L}^i = \sum\limits_{\alpha \neq 0} \mathcal{L}^i_\alpha$, где $\mathcal{L}^i_\alpha = \{e^i_\alpha \in \mathcal{L}^i \mid (\mathrm{ad}_{s_0} h) e^i_\alpha = \alpha(h) e^i_\alpha\}$. Обозначим $\Sigma_i = \{\alpha \in \Sigma \mid \exists e^i_\alpha \in \mathcal{L}^i_\alpha\}$. Так как $\mathcal{L}_i s_0 \mathcal{L}^j \subset \mathcal{L}^{i+j}$, то цепочка подмножеств $\Sigma_1 \supset \Sigma_2 \supset \cdots \supset \Sigma_m$ образует фильтрацию относительно операции сложения корней. Действительно, если $\alpha \in \Sigma_i$, $\beta \in \Sigma_j$ и $\alpha + \beta \in \Sigma$, то $\alpha + \beta \in \Sigma_{i+j}$. Предположим, что любой оператор левого умножения в $L(S)$ является дифференцированием. Рассмотрим соотношение $\mathcal{D}(e^i_\alpha, e^j_\beta, h, s, s_0) = 0$. Оно может быть представлено в виде

$$\mathrm{ad}_{s_0} h(e^i_\alpha s e^j_\beta) = (\alpha + \beta)(h)(e^i_\alpha s e^j_\beta).$$

Таким образом, если $\alpha + \beta \in \Sigma$, то $e^i_\alpha s e^j_\beta \in \mathcal{L}^{i+j}$, в противном случае $e^i_\alpha s e^j_\beta = 0$, и можно считать, что $e^i_\alpha s e^j_\beta \in \mathcal{L}^{i+j}$, т. е. фильтрация в $\mathcal{L}$ согласована и с операцией s. В частности, $\mathcal{L}$ — алгебра Ли относительно s.

С другой стороны, определим в алгебре Ли $\mathcal{L}(s_0)$ центральную фильтрацию по правилу $\mathcal{L}_i = \{x \in \mathcal{L} \mid xs_0\mathcal{L} \subset \mathcal{L}_{i+1}\}$, $i = m, m-1, m-2, \dots, 1$, где $\mathcal{L}_{m+1} = 0$. Подпространства $\mathcal{L}_i$, как и $\mathcal{L}^i$, инвариантны относительно $\mathrm{ad}_{s_0} h$. Поэтому $\mathcal{L} = \sum\limits_{\alpha \neq 0} \mathcal{L}_i^\alpha$, где $\mathcal{L}_i^\alpha = \{e_\alpha^i \in \mathcal{L}_i \mid (\mathrm{ad}_{s_0} h)e_\alpha^i = \alpha(h)e_\alpha^i\}$, причем $\mathcal{L}_{i-1} = L_{i-1} \oplus \mathcal{L}_i$, где $L_{i-1} = \langle e_\alpha^{i-1} \in \mathcal{L}_{i-1} \mid hs_0e_\alpha^{i-1} = \alpha(h)e_\alpha^{i-1}$, $e_\alpha^{i-1} \notin \mathcal{L}_i\rangle_P$. Следовательно, $\mathcal{L} = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} L_i$, $\mathcal{L}_i = \bigoplus\limits_{j \geq i} L_j$.

Пусть $hse_\alpha^i = \lambda_\alpha^i h + \sum\limits_{\delta,j} e_\delta^j(\alpha, i)$, $\lambda_\alpha^i \in P$. Так как $e_\alpha^1 s_0 e_\beta^m = 0$, то равенство $\mathcal{D}(e_\alpha^1, e_\beta^m, h, s_0, s) = 0$ дает

$$\Big(\lambda_\beta^m h + \sum_{\delta,j} e_\delta^j(\beta, m)\Big)s_0 e_\alpha^1 - \Big(\lambda_\alpha^1 h + \sum_{\delta,j} e_\delta^j(\alpha, 1)\Big)s_0 e_\beta^m = 0$$

или

$$\lambda_\alpha^1 \beta(h) e_\beta^m - \lambda_\beta^m \alpha(h) e_\alpha^1 - \sum_{\delta,j} e_\delta^j(\beta, m) s_0 e_\alpha^1 = 0.$$

Если $j < m$, то для любого e_δ^j существует e_α^1 такой, что $e_\delta^j s_0 e_\alpha^1 \neq 0$. Поэтому $e_b^j(\beta, m) = 0$, когда $j < m-1$ и $\lambda_\beta^m = 0$, т.е. $hse_\beta^m \in \mathcal{L}_{m-1}$.

Если уже доказано, что $hse_\beta^j \in \mathcal{L}_{j-1}$, $2 \leq j \leq m$, то из условия $\mathcal{D}(e_\alpha^1, e_\beta^{j-1}, h, s_0, s) = 0$ имеем

$$(e_\beta^{j-1} sh) s_0 e_\alpha^1 + (hse_\alpha^1) s_0 e_\beta^{j-1} \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\, \mathcal{L}_{j-1}).$$

Расписывая по определению внутренние скобки, получим

$$\Big(\lambda_\beta^{j-1} h + \sum_{\delta,k} e_\delta^k(\beta, j-1)\Big)s_0 e_\alpha^1 - \Big(\lambda_\alpha^1 h + \sum_{\delta,k} e_\delta^k(\alpha, 1)\Big)e_0 e_\beta^{j-1} \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\, \mathcal{L}_{j-1})$$

или

$$\lambda_\beta^{j-1} \alpha(h) e_\alpha^1 + \sum_{\delta,k} e_\delta^k(\beta, j-1) s_0 e_\alpha^1 \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\, \mathcal{L}_{j-1}).$$

Используя замечание для случая $j = m$, получаем $\lambda_\beta^{j-1} = 0$ и $e_\delta^k(\beta, j-1) = 0$, $k < j-2$, т.е. $hse_\beta^{j-1} \in \mathcal{L}_{j-2}$. Итак, $hse_\beta^j \in \mathcal{L}_{j-1}$, $2 \leq j \leq m$.

Обозначим через $P' = P(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ поле рациональных функций от $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$. Пусть $L' = P' \underset{P}{\otimes} L$. Если $s_0, s_1, \dots, s_{n-1}$ — некоторый базис пространства S, то рассмотрим отображение $s' = \sum\limits_{i=1}^{n-1} x_i s_i$ из $L' \times L'$ в L', определенное правилом $(f \otimes a)s'(g \otimes \widehat{a}) = \sum\limits_{i=1}^{n-1} fgx_i \otimes (as_i\widehat{a})$, где $f, g \in P'$, $a, \widehat{a} \in L$, $f \otimes a, g \otimes \widehat{a} \in L'$.

Тогда легко проверить, что отображение s' задает на L' структуру алгебры Ли. Очевидно, что алгебра Ли L' имеет разложение $L' = \bigotimes\limits_{i=0}^{m} L_i'$, $L_i' = P' \underset{P}{\otimes} L_i$, $i \geq 1$, $L_0' = \langle h' \rangle$, $h' = 1 \otimes h$. Соответственно получим $\mathcal{L}_i' = \bigoplus\limits_{j \geq i} L_j'$, $i \geq 1$.

Если $\mathcal{L}S\langle h \rangle \subset \mathcal{L}$, то $\mathcal{L}(S)$ — идеал пучка $L(S)$, что противоречит простоте последнего. Следовательно, $L_1' s' h' \not\subset \mathcal{L}'$, т.е. $L_1' = \langle x_1' \rangle \oplus \widetilde{U}_1'$, где $U_1' = \{x' \in \mathcal{L}' \mid x's'h' \in \mathcal{L}'\}$ и $U_1' = \widetilde{U}_1' \oplus \mathcal{L}_2'$, причем $h's'x_1' \equiv \mu_0 h' \ (\mathrm{mod}\, \mathcal{L}')$, $\mu_0 \neq 0$, $\mu_0 \in P'$. Пространство U_1' является идеалом в алгебре $\mathcal{L}'$, а $W_1 = \{x' \in L_1' \mid h's'x_1' \equiv \mu_0 h' \ (\mathrm{mod}\, \mathcal{L}),\ \mu_0 \neq 0\}$ образует открытое в топологии Зарисского множество в L_1'.

Если $\mathcal{L}_2 S\langle h \rangle \subset \mathcal{L}_2$, то $\mathcal{L}_2(S)$ — идеал пучка $L(S)$ и, как и выше, имеем $L_2' s' h' \not\subset \mathcal{L}_2'$. Отсюда $L_2' = \langle x_2' \rangle \oplus \widetilde{U}_2'$, где $U_2' = \{x' \in \mathcal{L}_2' \mid x's'h' \in U_1'\}$, $U_2' = \widetilde{U}_2' \oplus \mathcal{L}_3'$, причем $h's'x_2' \equiv \mu_1' x_1' \ (\mathrm{mod}\, U_1')$, $\mu_1 \neq 0$, $\mu_1 \in P'$, и множество таких x_2' образует открытое в топологии Зарисского множество

W_2 в L'_2. С другой стороны, $\widehat{W}_2 = \{x'_2 \in L'_2 \mid (\operatorname{ad}_{s'} h)x'_2 \in W_1\}$ также образует открытое в L'_2 множество. Следовательно, для элемента $x'_2 \in W_2 \cap \widehat{W}_2$ выполнено сравнение $h's'x'_2 \equiv \mu_1 x'_1 \pmod{U'_1}$, $\mu_1 \neq 0$, причем для элемента x'_1 имеет место $h's'x'_1 \equiv \mu_0 h' \pmod{\mathcal{L}'}$, $\mu_0 \neq 0$ и, кроме того, $x'_1 s' x'_2 \equiv \lambda_2 x'_2 \pmod{U'_2}$. Заметим, что U'_2 является идеалом алгебры $\mathcal{L}'$.

Через m шагов получим последовательность элементов x'_i, $i = 1, \dots, m$, и последовательность идеалов U'_i, $i = 1, \dots, m$, алгебры $\mathcal{L}'$ таких, что $x'_1 s' x'_i \equiv \lambda_i x'_i \pmod{U'_i}$, $\lambda_i \in P'$, $h's'x'_i \equiv \mu_{i-1} x'_{i-1} \pmod{U'_{i-1}}$, $\mu_{i-1} \neq 0$, $\mu_{i-1} \in P'$, $h's'U'_i \subset U'_{i-1}$, $i \geq 2$.

Имеют место соотношения

$$\begin{aligned}
(x'_1 s' x'_i)s'h' &\equiv -\lambda_i \mu_{i-1} x'_{i-1} \pmod{U'_{i-1}},\\
(x'_i s' h')s' x'_1 &\equiv \lambda_{i-1}\mu_{i-1} x'_{i-1} \pmod{U'_{i-1}},\\
(h's'x'_1)s'x'_i &\equiv \mu_0 \mu_{i-1} x'_{i-1} \pmod{U'_{i-1}}.
\end{aligned}$$

Из соотношения $J(x'_1, x'_i, h's', s') = 0$ получаем $\lambda_i = \lambda_{i-1} + \mu_0$, $i > 2$, $\lambda_2 = \mu_0$. Таким образом, $\lambda_i = (i-1)\mu_0$, $i \geq 2$. В частности, $\lambda_m = (m-1)\mu_0$. Но $x's'x'_m = 0$, так как $x'_m \in \mathcal{L}'_m$, т. е. $m = 1$ и поэтому $\mathcal{L} = \mathcal{L}(s_0)$ — абелева алгебра Ли.

Предположим, что $\dim \mathcal{L} > 1$. Пусть y' и y'' — два собственных линейно независимых вектора из $\mathcal{L}$. Тогда имеют место следующие формулы умножения: $hs_0 y' = \alpha' y'$, $hs_0 y'' = \alpha'' y''$, $\alpha', \alpha'' \neq 0$, $hsy' \equiv \mu' h \pmod{\mathcal{L}}$, $hsy'' \equiv \mu'' h \pmod{\mathcal{L}}$. Соотношение $\mathcal{D}(y', y'', h's_0, s) = 0$ дает $\mu'\alpha'' y'' - \mu''\alpha' y' = 0$, т. е. $\mu' = \mu'' = 0$. Следовательно, $\mathcal{L}(S)$ является идеалом пучка $L(S)$.

Таким образом, остается случай, когда $\dim L(S) = 2$. Тогда, как показано в [10], $\dim S = 2$ и в пространствах L и S существуют такие базисы e, f и s_0, s, что формулы умножения имеют вид $es_0 f = f$, $esf = e$, $es_0 e = ese = fs_0 f = fsf = 0$. Пусть $ae + bf$, $\alpha e + \beta f$, $xe + yf$ — три произвольных элемента из $L(S)$. Тогда $\mathcal{D}(ae + bf, \alpha e + \beta f, xe + yf, s_0, s) = \left|\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ a & b \end{smallmatrix}\right| (xe + yf) \neq 0$, если $\left|\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ a & b \end{smallmatrix}\right| \neq 0$, $(x, y) \neq (0, 0)$. Таким образом, и в этом случае операторы левого умножения не являются, вообще говоря, дифференцированиями этого пучка.

II. Пусть среди ненулевых корней $\alpha \in \Sigma$ имеются такие, что $-\alpha \in \Sigma$, но $e_\alpha s_0 e_{-\alpha} = 0$ для любых $e_\alpha \in L_\alpha$ и $e_{-\alpha} \in L_{-\alpha}$. Тогда опять для любого $\beta \in \Sigma$ оператор $\operatorname{ad}_{s_0} e_\beta$ нильпотентен и, следовательно, алгебра Ли $\mathcal{L}(s_0)$ нильпотентна. Для изучения этого случая рассмотрим ситуацию с операторами $\operatorname{ad}_s x$, $s \in S$, $x \in L$.

Пусть $e_1, \dots, e_m$ — базис в L, а $s_1, \dots, s_n$ — базис в S. Тогда любой оператор $\operatorname{ad}_s x$ можно представить в виде $\sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{k=1}^{n} x_i \alpha_k \operatorname{ad}_{s_k} e_i$, если $x = \sum\limits_{i=1}^{m} x_i e_i$, $s = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k s_k$, $x_i, \alpha_k \in P$. Пусть $(\operatorname{ad}_{s_k} e_i)e_j = \sum\limits_{r=1}^{m} A_{ikrj} e_r$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, m$, $k = 1, \dots, n$, $A_{ikrj} \in P$. Тогда $(\operatorname{ad}_s x)e_j = \sum\limits_{r=1}^{m} \sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{k=1}^{n} x_i \alpha_k A_{ikrj} e_r$, $j = 1, \dots, m$, т. е. оператор $\operatorname{ad}_s x$ в базисе $e_1, \dots, e_m$ задается матрицей (B_{jr}), где $B_{jr} = \sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} x_i \alpha_k A_{ikrj}$, $j = 1, \dots, m$, $r = 1, \dots, m$.

Обозначим через W пространство $\langle \operatorname{ad}_s x,\ s \in S,\ x \in L \rangle_P = \langle \operatorname{ad}_{s_k} e_i,\ i = 1, \dots, m,\ k = 1, \dots, n \rangle_P$. Пространство W ненулевое, так как в противном случае $L(S)$ — абелев пучок, что противоречит его простоте. Пусть $\widetilde{W}$ — совокупность всех ненулевых операторов вида $\operatorname{ad}_s x$, $s \in S$, $x \in L$, в алгебре всех линейных операторов $\operatorname{End}_P(L)$. Так как $L(S)$ — простой лиев пучок, то алгебра $\operatorname{Ass} W$ (ассоциативная алгебра, порожденная множеством W) действует неприводимо на пространстве L. В силу алгебраической замкнутости поля P алгебра $\operatorname{Ass} W$ совпадает с полной матричной алгеброй $M_m(P)$.

Обозначим через $a_r = a_r(x_1, \dots, x_m, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ коэффициенты характеристического многочлена матрицы B, элементы которой являются линейными функциями от $x_1, \dots, x_m$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Тогда множество нулей системы уравнений $a_r = (-1)^r \sigma_r(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$, $r = 1, \dots, m$, где $\sigma_r(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ — элементарные симметрические многочлены, определяет аффинное многообразие M в пространстве P^{2m+n}. В [8] показано, что множество полупростых (диагонализируемых) операторов из $\widetilde{W}$ определяет непустое открытое в топологии Зарисского множество N в аффинном многообразии M. Так как один из характеристических корней оператора $\mathrm{ad}_s\, x$ всегда равен нулю, то, полагая $\lambda_1 = 0$ и добавляя условия $\lambda_i \neq 0$, $i = 2, \dots, m$, $\lambda_i + \lambda_j \neq 0$, $2 \leq i < j \leq m$, определяем новое непустое открытое подмножество $\widetilde{N}$, соответствующее полупростым операторам с добавленными условиями в аффинном многообразии M.

С другой стороны, условие, что пространство, натянутое на собственные векторы оператора $\mathrm{ad}_s\, x$, которые отвечают ненулевым собственным значениям, образует нильпотентную подалгебру коразмерности один, задается системой алгебраических уравнений относительно $\{x_i\}$, $\{\alpha_i\}$, $\{\lambda_i\}$. Множество решений этой системы является замкнутым подмножеством $\widetilde{M}$ многообразия M. В силу замечания в начале п. II пересечениие $\widetilde{N} \cap \widetilde{M}$ непусто, т. е. существует пара (h, s_0), для которой у оператора $\mathrm{ad}_{s_0} h$ имеется нильпотентная подалгебра $\mathcal{L}$ коразмерности один в L, натянутая на собственные векторы этого оператора, причем все собственные значения λ_i оператора $\mathrm{ad}_{s_0} = h|_{\mathcal{L}}$ и их суммы $\lambda_i + \lambda_j$ ненулевые.

Таким образом, случай II сводится к случаю I.

III. Далее рассмотрим случай, когда в системе корней Σ существует корень α такой, что $-\alpha \in \Sigma$, причем существуют векторы $e_\alpha \in L_\alpha$ и $e_{-\alpha} \in L_{-\alpha}$ такие, что $e_\alpha s_0 e_{-\alpha} \neq 0$. Так как $e_\alpha s_0 e_{-\alpha} \in L_0 = \{x \in L \mid (ad_{s_0} h)x = 0\} = H = \langle h \rangle$, то в этом случае алгебра Ли $L(s_0)$ содержит простую трехмерную алгебру Ли $sl_2(P)$. Согласно теореме Леви любую алгебру Ли над полем нулевой характеристики можно представить в виде прямой суммы ее радикала и полупростой алгебры. Так как ранг алгебры $L(s_0)$ равен единице, то полупростая компонента алгебры $L(s_0)$ совпадает с простой трехмерной алгеброй Ли $sl_2(P)$. Выберем стандартный базис в $sl_2(P)$ из элементов e, h, f с таблицей умножения $hs_0e = 2e$, $hs_0f = -2f$, $es_0f = h$. Рассматривая алгебру Ли $L(s_0)$ как модуль над $sl_2(P)$ относительно присоединенного действия, в силу его полной приводимости получим $L(s_0) = sl_2(P) \oplus \mathcal{L}$, $\mathcal{L} = \bigoplus\limits_\lambda V_\lambda$, где каждое слагаемое V_λ — неприводимый $sl_2(P)$-модуль с базисом $v_0, v_1, \dots, v_m$, $m = \lambda(h)$, $m + 1 = \dim V_\lambda$, и следующей таблицей действий:

$$\begin{gathered} hs_0v_k = (m - 2k)v_k, \quad k = 0, \dots, m, \\ fs_0v_k = v_{k+1}, \quad k = 0, \dots, m-1, \quad fs_0v_m = 0, \\ es_0v_0 = 0, \quad es_0v_k = k(m - k + 1)v_{k-1}, \quad k = 1, \dots, m. \end{gathered}$$

Если $m = 2t$ четно, то $hs_0v_t = 0$ и $L_0(h) \supset \langle v_t, h \rangle$, что противоречит условию $L_0(h) = \langle h \rangle$. Таким образом, в сумме $\mathcal{L} = \bigoplus\limits_\lambda V_\lambda$ имеются только неприводимые модули четных размерностей. Из условия $V_\lambda s_0 V_\mu \subset V_{\lambda+\mu}$ следует $V_\lambda s_0 V_\mu = 0$, так как $\lambda(h) + \mu(h)$ четно для нечетных $\lambda(h)$ и $\mu(h)$. Это означает, что $\mathcal{L}(s_0)$ — коммутативная алгебра Ли.

Если количество слагаемых в сумме $\bigoplus\limits_\lambda V_\lambda$ больше одного, то рассмотрим соотношение $\mathcal{D}(v^i_\varkappa, v^j_\mu, h, s_0, s) = 0$, где $v^i_{\varkappa'} \in V_\varkappa$, $v^j_\mu \in V_\mu$. Из него следует $\lambda^i_\varkappa(\overline{m} - 2j)v^j_\mu - \lambda^j_\mu(m - 2i)v^i_\varkappa = 0$, $m + 1 = \dim V_\varkappa$, $\overline{m} + 1 = \dim V_\mu$. Так как m и $\overline{m}$ нечетны, то $\lambda^i_\varkappa = \lambda^j_\mu = 0$, т. е. $\mathcal{L}(S)$ — идеал в $L(S)$.

Если $\mathcal{L} = V_\mu$, но $\dim \mathcal{L} > 1$, то, применяя аналогичные вычисления для v_μ^i, v_μ^j, $i \neq j$, опять получим, что $\mathcal{L}(S)$ — идеал в $L(S)$.

Так как случай $\dim \mathcal{L} = 1$ исключен условием о четности размерности неприводимых компонент V_λ, то остается единственная возможность, когда $L(s_0) \cong sl_2(P)$.

Как показано в [10], в этом случае простой лиев пучок ранга один реализуется в виде сэндвичевой алгебры $M_3(U, V)$, где U — пространство всех кососимметрических матриц в $M_3(P)$, а V — любое подпространство в пространстве всех симметрических матриц в $M_3(P)$, содержащее подпространство $\langle E \rangle$ (E — единичная матрица).

Пусть $u = E_{12} - E_{21}$, $u' = E_{13} - E_{31}$, $u'' = E_{23} - E_{32}$ — базис в пространстве кососимметрических матриц порядка три. Обозначим через $v = \sum\limits_{i=1}^{3} a_i E_{ii}$, $v' = \sum\limits_{i=1}^{3} b_i E_{ii}$ произвольные элементы из пространства диагональных матриц $\mathcal{D}$. Тогда

$$\mathcal{D}(u, u', u'', v, v') = u'v'u''vu + uvu''v'u' - uv'u''vu' - \\ - u'v'u''v'u = a_2 b_3 E_{11} - a_2 b_3 E_{11} + a_3 b_2 E_{11} - a_3 b_2 E_{11} = 0.$$

Тот же результат получается при любой перестановке базисных элементов u, u', u''.

С другой стороны, если $v = \sum\limits_{1 \le i < j \le 3} a_{ij} F_{ij}$, $v' = \sum\limits_{1 \le i < j \le 3} b_{ij} F_{ij}$, где $F_{ij} = E_{ij} + E_{ji}$, то

$$\mathcal{D}(u, u', u'', v, v') = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{23} \\ b_{12} & b_{23} \end{vmatrix} E_{13} + \begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} \\ b_{13} & b_{12} \end{vmatrix} E_{31} + \\ + \begin{vmatrix} a_{13} & a_{23} \\ b_{13} & b_{23} \end{vmatrix} (E_{12} + E_{21}) - \left(\begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} \\ b_{13} & b_{12} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12} & a_{23} \\ b_{12} & b_{23} \end{vmatrix} \right) E_{32}.$$

Таким образом, простые лиевы пучки ранга один над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль, у которых операторы левого умножения являются дифференцированиями, имеют вид $M_3(U, \mathcal{D}')$, где U — подпространство всех кососимметрических матриц в $M_3(P)$, а $\mathcal{D}'$ — любое подпространство, содержащее $\langle E \rangle$ в пространстве всех диагональных матриц $\mathcal{D}$ в $M_3(P)$.

□

Литература

[1] Кантор И.Л., Персиц Д.Б. *О замкнутых пучках линейных скобок Пуассона*, IX Всесоюзн. геометрич. конф. (Штиинца, Кишинев, 1988), с. 141.

[2] Олвер П. *Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям* (Мир, М., 1989).

[3] Трофимов В.В., Фоменко А.Т. *Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых дифференциальных уравнений* (“Факториал”, “Проспериус”, Удмуртск. гос. ун-т, Ижевск, 1995).

[4] Корешков Н.А. *О нильпотентности n-кратных алгебр Ли и ассоциативных n-кратных алгебр*, Изв. вузов. Матем., № 2, 33–38 (2010).

[5] Корешков Н.А. *Теоремы Ли и Энгеля для n-кратных алгебр Ли*, Сиб. матем. журн. **54** (3), 601–609 (2013).

[6] Филиппов В.Т. *n-лиевы алгебры*, Сиб. матем. журн. **26** (6), 126–140 (2007).

[7] Доценко В.В., Хорошкин А.С. *Формула характера операды пары согласованных скобок и бигамильтоновой операды*, Функц. анализ и его прилож. **41** (1), 1–22 (2007).

[8] Корешков Н.А. *Торы в простых лиевых пучках*, Изв. вузов. Матем., № 6, 48–53 (2016).

[9] Капланский И. *Алгебры Ли и локально конечные группы* (Мир, М., 1974).

[10] Корешков Н.А. *Простые лиевы пучки малых размерностей*, Сиб. матем. журн. **55** (3), 428–439 (2014).

Н.А. Корешков

Казанский (Приволжский) федеральный университет,
420008, г. Казань, ул. Кремлевская, д. 18, Россия,

e-mail: Nikolai.Koreshkov@kpfu.ru

N.A. Koreshkov

Inner derivations of simple Lie pencils of rank 1

Abstract. We prove that simple Lie pencils of rank 1 over algebraically closed field P of characteristic 0, whose operators of left multiplications have the form of sandwich algebra $M_3(U, \mathcal{D}')$, where U is a subspace of all skew-symmetric matrices in $M_3(P)$, $\mathcal{D}'$ is any subspace containing $\langle E \rangle$ in a space of all diagonal matrices $\mathcal{D}$ in $M_3(P)$.

Keywords: Lie pencil, Cartan subalgebra, torus, inner derivation, sandwich algebra.

N.A. Koreshkov

Kazan (Volga Region) Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,

e-mail: Nikolai.Koreshkov@kpfu.ru