ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2004 МАТЕМАТИКА № 11 (510)

УДК 514.75

У. СИМОН

К АФФИННОЙ ТЕОРИИ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ: КАЛИБРОВОЧНО-ИНВАРИАНТНЫЕ СТРУКТУРЫ

Программа Феликса Клейна в первой половине XX столетия инициировала развитие несколько различных теорий гиперповерхностей, соответствующих различным группам преобразований (проективной, эквиаффинной, центроаффинной и т. д.). Целью исследований в каждом случае было построение инвариантной нормализации гиперповерхности и определение индуцированных этой нормализацией геометрических структур. В этой работе ограничимся рассмотрением невырожденных гиперповерхностей в вещественном аффинном пространстве, но с другой точки зрения. Напомним, что для данной гиперповерхности имеется бесконечно много возможных нормализаций, каждая из которых индуцирует геометрические структуры. Но группа инвариантности как подгруппа полной аффинной группы вычисляется только в относительно незначительном количестве случаев. Это обстоятельство приводит к идее изучения инвариантов и структур, не зависящих от выбора нормализации. В данной работе дается описание геометрии невырожденных гиперповерхностей в аффинном пространстве в терминах таких инвариантов и структур; кроме двух хорошо известных структур, а именно конформной и проективно-плоской, существенно используемым инструментом является структура Вейля вместе с ее калибровочными преобразованиями. Калибровочные преобразования эквивалентны замене нормализации, поэтому калибровочные инварианты являются инвариантами, не зависящими от нормализации. В работе приводится много известных и новых инвариантов такого типа и иллюстрируется эффективность развиваемого подхода с геометрической точки зрения посредством обсуждения калибровочной инвариантности в контексте хорошо известных задач и результатов аффинной теории гиперповерхностей.

1. Введение

За некоторыми исключениями, объектами изучения дифференциальной геометрии в XIX столетии являлись кривые и поверхности в *евклидовом* пространстве. В начале XX столетия, следуя программе Феликса Клейна, Пик, Цицейка и другие исследователи начали изучать поведение кривых и поверхностей по отношению к различным группам преобразований. Систематическое исследование *проективной* дифференциальной геометрии началось в 1907 г., а *унимодулярно-аффинной* дифференциальной геометрии — в 1916 г. Э. Мюллером, в 1921 г. была предложена так называемая *релятивная* дифференциальная геометрия, а монография [1] и серия работ О. Майера 1933–35 гг. явились первым систематическим введением в *центроаффинную* дифференциальную геометрию кривых и поверхностей. Исторические детали и дальнейшие ссылки можно найти в монографиях [2]–[4], обзоре [5] и обширных комментариях издателей в [6].

Работа выполнена при частичной поддержке научного фонда DFG (Deutsche Forschugs Gemeinschaft). Некоторые части этой работы были написаны во время научной командировки в университете Тохоку, Сендай, Япония; результаты работы были доложены на семинаре в университете Мацушимы в марте 2004 г. Автор считает своим приятным долгом поблагодарить Сейки и Акеми Нишикава, а также Мотоко Котани за проявленное гостеприимство.

На начальных этапах развития аффинной теории поверхностей в качестве группы преобразований бралась группа унимодулярных преобразований. Целью систематических исследований являлось нахождение *геометрических инвариантов*, ассоциированных с данной группой, в частности, построение *нормализации* и полуримановой *метрики*. При определении метрики существенным предположением являлась *невырожденность* гиперповерхности. Монографии [7], [1] и, в существенной части, [2] следуют этому подходу. Однако некоторые части монографий [1] и [2] и, в особенности, дополнение к [2], написанное А.П. Норденом, посвящены более общим вопросам, таким как *аффинные связности на многообразиях*, *сопряженные связности* и *релятивные нормализации*. *Релятивная нормализация* представляет собой пару (Y, y), где Y — *конормальное поле*, а y — *релятивная нормаль*, удовлетворяющая условию спаривания (см. § 3). Нормализация индуцирует тройку (∇, h, ∇^*), образованную так называемыми *сопряженными связностями* (∇, ∇^*) по отношению к полуримановой метрике h. Много позже понятие сопряженных связностей снова приобрело большое значение в новой версии фундаментальной теоремы, данной в [8].

Существенным продвижением в развитии структурного подхода явилась лекция К. Номидзу на конференции в Мюнстере в 1982 г., на которой он дал структурную характеризацию аффинной нормали в унимодулярной теории. Как было отмечено Р. Вальтером, эту характеризацию можно найти уже в статье Х. Фландерса [9], опубликованной двумя десятилетиями ранее, однако, к сожалению, статья Фландерса не нашла никакого отражения в последующей литературе. Исследования Номидзу, посвященные структурному подходу, оказали существенное влияние на дальнейшее развитие теории. Большое значение имеет вышеуказанная новая версия фундаментальной теоремы, включающая геометрически прозрачную интерпретацию условий интегрируемости. Монографии [3], [4], а также курс лекций [10], посвященный релятивной теории, следуют структурному подходу Номидзу. В рамках структурного подхода рассматриваются заданные дифференциально-геометрические структуры и условия их совместимости в вещественном аффинном пространстве. На гиперповерхности заданная нормализация индуцирует форму объема и последующие инварианты посредством структурных уравнений. Подход включает систематическое исследование формальных и геометрических свойств инвариантов, появляющихся в структурных уравнениях; в случае, когда условия совместимости для индуцированных структур формально отражают условия совместимости в объемлющем пространстве, нормализация является отмеченной.

Имеется несколько работ, посвященных теории невырожденных гиперповерхностей в аффинном пространстве со структурами, индуцированными произвольными трансверсальными полями. Но пока этот подход является в большей степени техничным и не таким прозрачным с геометрической точки зрения (см., напр., [11]). При отбрасывании условий невырожденности исследования становятся более сложными (см., напр., [12]). В данной работе мы ограничиваемся изучением невырожденных гиперповерхностей с произвольной нормализацией. В качестве мотивации рассматриваем некоторые вопросы и задачи, которые обнаружились уже в случае так называемых релятивных нормализаций.

(i) Для почти всех возможных нормализаций невырожденной гиперповерхности группа инвариантности является неизвестной; исключения указаны в [13] и [14].

(ii) Для гиперповерхности в евклидовом пространстве отклонение единичной нормали отражает интуитивное представление о понятии *внешней кривизны*, а *оператор Вейнгартена* или *оператор формы* затем позволяет в явном виде описать это понятие. Указанное представление аналогичным образом работает в унимодулярной теории. Можно ли в случае произвольной нормализации извлечь какую-либо *геометрическую* информацию об индуцированном операторе и форме связности из *структурного уравнения Вейнгартена*?

(iii) Всякая невырожденная гиперповерхность допускает бесконечное число нормализаций. В частности, имеется бесконечное число релятивных нормализаций. В каком отношении находятся между собой произвольные (релятивные) нормализации, индуцированные инварианты и геометрические свойства гиперповерхности?

(iv) Рассмотрим все возможные нормализации и индуцированные ими инварианты. Какие из этих инвариантов выделяют специальные классы геометрических объектов, отражающие специфические геометрические свойства гиперповерхностей? (Двумя хорошо известными примерами являются конформный класс индуцированных метрик и проективно плоский класс конормальных связностей).

Вышеуказанные вопросы приводят к постановке следующей проблемы. *Для невырожденной гиперповерхности найти инварианты и инвариантные свойства, которые не зависят от выбора какой-либо нормализации*, например, инварианты подобные тензору конформной кривизны или предгеодезикам класса конормальных связностей. Какие геометрические свойства гиперповерхности отражают такие инварианты?

Просматривая литературу, можно найти примеры инвариантов, которые не зависят от какой-либо нормализации; в §§ 6.1, 6.2 и 6.4 представлены давно найденные примеры из работ [7] и [2], а также из [3]. В [15]–[18] нами получены другие результаты такого характера. Поставленные выше вопросы являются отправным пунктом рассуждений в недавно опубликованной работе [19] (в которой однако не дается приложений к аффинной теории гиперповерхностей).

В данной работе продолжается систематическое изучение инвариантов, не зависящих от нормализации невырожденной гиперповерхности. Подготовительная часть работы посвящена обзору теории невырожденных гиперповерхностей и изучению *инвариантов, индуцированных произвольным конормальным полем. Фундаментальная пара* (∇^*, h) в этом случае задается конормальной связностью ∇^* и индуцированной полуримановой метрикой h. В такой форме эта теория аналогична релятивной теории гиперповерхностей. Мы останавливаемся на некоторых простых наблюдениях, касающихся двух типов *классов эквивалентности трансверсальных полей*, которые помогают обосновать нашу точку зрения. При отбрасывании предположения о невырожденности, подход, использующий фундаментальную систему, индуцированную одними конормалями, не годится, поскольку конормальная связность в этом случае не определена, и поэтому приходится использовать фундаментальную систему, индуцированную трансверсальным полем [12]. Но как только мы предполагаем невырожденность гиперповерхности, не делая каких-либо дальнейших предположений, определенно предпочтительным оказывается подход, использующий конормальное поле, а не трансверсальное. Эта точка зрения обсуждается в § 3.

Для нахождения структур, не зависящих от нормализации, в § 5 выясняется, каким образом индуцированные инварианты ведут себя при замене нормализации. Это приводит к основной теме исследования: *отыскание структур и инвариантов, не зависящих от нормализации.*

Помимо уже упомянутых примеров, а именно, *конформных* и *проективно-плоских структур*, рассматриваем также естественную *структуру Вейля* на многообразии вместе с ее *калибровочными преобразованиями.* Калибровочные преобразования эквивалентны замене нормализации. Указанная эквивалентность позволяет унифицировать терминологию и называть геометрические инварианты, не зависящие от нормализации, *калибровочными инвариантами.* В § 6 мы приводим много инвариантов и инвариантные свойства такого типа, а в § 7 приводим калибровочно-инвариантные функционалы. Для иллюстрации эффективности развиваемого подхода с геометрической точки зрения в § 8 калибровочная инвариантность обсуждается в контексте хорошо известных задач и результатов из аффинной теории гиперповерхностей.

Сравнивая различные подходы к *аффинной теории невырожденных гиперповерхностей*, можно утверждать следующее: классический подход Бляшке, структурный подход, а также калибровочно-инвариантная точка зрения, согласованно демонстрируют тот факт, что унимодулярная и центроаффинная теории являются отмеченными среди всех аффинных теорий гиперповерхностей для произвольных нормализаций; Вие ([13], теорема 5.7) нашел релятивную нормализацию, инвариантную относительно конформной группы, действующей на R^{n+1}, однако дальнейшие исследования этой релятивной геометрии пока не проводились.

Обратившись к историческому развитию аффинной дифференциальной геометрии, осознаешь то громадное влияние, которое на ее развитие оказали А.П. Норден и Казанская геометрическая школа. Автор с удовольствием посвящает эту работу памяти А.П. Нордена, родившегося столетие назад.

2. Гиперповерхности в R^{n+1} с произвольной нормализацией

Напомним основные формулы для гиперповерхности в аффинном пространстве R^{n+1}, нормализованной произвольным трансверсальным полем, введем обозначения, а за подробностями отошлем к стандартным монографиям, таким, как [7], [2], [4], [3], [10].

2.1. *Обозначения.* Сопряженность вещественного аффинного пространства R^{n+1} и его дуального пространства $R^{(n+1)*}$ описывается в терминах невырожденного скалярного произведения

$$\langle\ ,\ \rangle : R^{(n+1)*} \times R^{n+1} \to R.$$

Со всяким векторным пространством ассоциируется одномерное векторное пространство детерминантных форм, фиксирующее объемы по модулю масштаба. Символами det и $\det^*$ обозначим произвольную пару дуальных детерминантных форм на R^{n+1} и $R^{(n+1)*}$ соответственно. Одним и тем же символом $\overline{\nabla}$ обозначаются канонические плоские связности на R^{n+1} и $R^{(n+1)*}$. Пусть M — связное, ориентированное дифференцируемое многообразие размерности $n \geq 2$, а $x : M \to R^{n+1}$ — погружение гиперповерхности. *Нормализацией* гиперповерхности x называется такая пара (Y, z), что $\langle Y, z\rangle = 1$, где $z : M \to R^{n+1}$ — произвольное *трансверсальное поле*, а $Y : M \to R^{(n+1)*}$ — *конормальное поле* гиперповерхности x, удовлетворяющее соотношению $\langle Y, dz(v)\rangle = 0$ для всех касательных векторов v на M. Трансверсальное поле z дополняет базис касательного пространства до базиса объемлющего пространства, а конормаль задает касательную плоскость. *Нормализованная гиперповерхность* представляет собой тройку (x, Y, z).

2.2. *Индуцированные формы объема.* Зафиксируем форму объема det для R^{n+1}. Рассмотрим погружение гиперповерхности x и произвольную нормализацию (Y, z). Трансверсальное поле z индуцирует форму объема ω на M:

$$\omega(v_1, \ldots, v_n) := \det(dx(v_1), \ldots, dx(v_n), z),$$

где $(v_1, \ldots, v_n)$ — локальный репер. Очевидно, эта *индуцированная форма объема* зависит от выбора det и z, замена детерминантной формы объемлющего пространства меняет масштаб формы ω. Для $z^\sharp = q \cdot z + dx(w)$, где w — касательный вектор, а q — дифференцируемая, нигде не обращающаяся в нуль функция на M, имеем $\omega^\sharp = q \cdot \omega$. В то время как z всегда индуцирует форму объема, конормальное поле индуцирует форму объема только в случае невырожденной гиперповерхности x (см. § 2.4).

2.3. *Структурные уравнения.* Геометрия тройки (x, Y, z) может быть описана в терминах индуцированной формы объема и других геометрических инвариантов, определяемых с помощью следующих *структурных уравнений*, называемых соответственно *уравнениями Гаусса* и *Вейнгартена*:

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_v dx(w) &= dx(\nabla_v w) + h(v, w)z, \\ dz(v) &= dx(-S(v)) + \tau(v)z. \end{aligned}$$

Здесь и в дальнейшем $u, v, w, \ldots$ означают либо касательные векторы, либо векторные поля в зависимости от контекста. *Индуцированная связность* ∇ не имеет кручения, h — симметричная билинейная форма, S — *оператор формы* или *оператор Вейнгартена*, а τ — 1-форма, являющаяся *формой связности*; выбор знака перед S в уравнениях Вейнгартена соответствует выбору ориентации трансверсального поля z. Все коэффициенты в структурных уравнениях зависят от нормализации, они инвариантны относительно группы аффинных преобразований пространства R^{n+1}.

2.4. *Невырожденные гиперповерхности.* В последующем ограничимся рассмотрением невырожденных гиперповерхностей. Они определяются следующим образом: гиперповерхность x называется *невырожденной*, если билинейная форма h в структурных уравнениях Гаусса не вырождена; хорошо известно, что это свойство не зависит от выбора нормализации, поскольку все такие симметричные билинейные формы находятся в конформном соответствии, определяя *конформный класс* $\mathfrak{C}$. Таким образом, на невырожденной гиперповерхности всякое трансверсальное поле индуцирует полуриманову *метрику* $h \in \mathfrak{C}$ со связностью Леви-Чивита $\nabla(h)$ и формой объема $\omega(h)$; аналогичным образом будем обозначать тензор кривизны этой связности символом $R(h)$, тензор Риччи — символом $\mathrm{Ric}(h)$, нормированную скалярную кривизну — символом $\varkappa(h)$ и т. д.

Невырожденность гиперповерхности x эквивалентна тому, что любое конормальное поле Y само является погружением $Y : M \to R^{(n+1)*}$ с трансверсальным радиус-вектором Y. Ассоциированное *структурное уравнение Гаусса* имеет вид

$$\overline{\nabla}_v dY(w) = dY(\nabla^*_v w) + \frac{1}{n-1}\,\mathrm{Ric}^*(v,w)(-Y),$$

где *конормальная связность* ∇^* не имеет кручения и является *Риччи-симметрической*, т. е. ее тензор Риччи Ric^* симметричен. Симметрия тензора Риччи эквивалентна существованию ∇^*-параллельной формы объема ω^* на M, которая единственна с точностью до ненулевого постоянного множителя. Имеем

$$\omega^*(v_1, \ldots, v_n) := \overset{*}{\det}(dY(v_1), \ldots, dY(v_n), -Y)$$

для любого локального поля репера; выбор другой детерминантной формы $\det^*$ в объемлющем пространстве меняет масштаб формы ω^*. Хорошо известно, что все конормальные связности находятся в проективном соответствии; *класс всех конормальных связностей* обозначается символом $\mathfrak{P}^*$.

Погружение $Y : M \to R^{(n+1)*}$ является невырожденным тогда и только тогда, когда тензор Ric^* имеет максимальный ранг на M.

Следует отметить, что в случае невырожденной гиперповерхности имеется биективное соответствие между классом конормальных полей и конформным классом $\mathfrak{C}$ полуримановых метрик, что позволяет определять метрику посредством задания конормали. Это видно из следующего соотношения:

$$h(v,w) = -\langle dY(v), dx(w)\rangle.$$

2.5. *Условия интегрируемости* для невырожденной гиперповерхности x с произвольной конормалью Y.

(i) Конормальная связность ∇^* является *проективно-плоской*; это означает, что
- (a) *тензор проективной кривизны* P^*, который в терминах тензора кривизны R^* связности ∇^* и ее тензора Риччи Ric^* определяется соотношениями

$$(n-1)P^*(u,v)w := (n-1)R^*(u,v)w - [\mathrm{Ric}^*(v,w)u - Ric^*(u,w)v],$$

обращается в нуль тождественно;
- (b) пара $(\nabla^*, \mathrm{Ric}^*)$ является *парой Кодацци*, т. е. удовлетворяет соотношению полной симметричности

$$\nabla^*_u \mathrm{Ric}^*(v,w) = \nabla^*_v \mathrm{Ric}^*(u,w).$$

Хорошо известно, что условия (a) и (b) зависимы, (см., напр., [20], [2], [3], [10]).

(ii) Пара (∇^*, h) является парой Кодацци.

2.6. *Основная теорема. Первый вариант.* Для невырожденной гиперповерхности x с произвольной конормалью Y пара (∇^*, h) является *фундаментальной системой* в следующем смысле.

(i) *Единственность.* Рассмотрим две пары (x, Y) и $(x^\sharp, Y^\sharp)$, состоящие из невырожденной гиперповерхности и конормального поля. Предположим, что $(\nabla^*, h) = (\nabla^{*\sharp}, h^\sharp)$. Тогда пары (x, Y) и $(x^\sharp, Y^\sharp)$ эквивалентны по модулю действия полной группы аффинных преобразований.

(ii) *Существование.* Для заданной пары (∇^*, h) условия интегрируемости п. 2.5 являются необходимыми и достаточными для существования такой пары (x, Y), что x — невырожденная гиперповерхность, а ∇^* и h являются коэффициентами в структурных уравнениях Гаусса для x и Y.

Доказательство данного варианта фундаментальной теоремы следует из результатов работ [11] и [12], где этот результат сформулирован в отличной, но эквивалентной форме. Следует отметить, что пара (∇^*, h) не определяет тройку (x, Y, z) однозначно по модулю группы аффинных преобразований, но определяет однозначно пару (x, Y). Указанная ситуация будет детально пояснена в § 3, где будет показано, что среди всех возможных троек (x, Y, z) с одной и той же парой (∇^*, h) имеется с точностью до аффииной эквивалентности одна и только одна релятивная гиперповерхность (x, Y, y), для которой пара (∇^*, h) является фундаментальной системой. Это наблюдение приводит к простому доказательству основной теоремы, аналогичному в § 4.11 из [10].

Первый вариант основной теоремы сформулирован в терминах произвольного конормального поля, в то время как формулировка в терминах произвольного трансверсального поля является более техничной, но геометрически менее прозрачной. Это объясняется тем, что в последнем случае условия интегрируемости имеют существенно более сложный вид [11]. Для *вырожденных* гиперповерхностей конормальная связность не определена, и, таким образом, приходится использовать инварианты, определяемые трансверсальным полем [12]. Как уже было отмечено ранее, вырожденные гиперповерхности в данной работе не рассматриваются.

2.7. *Кубическая форма и форма Чебышева.* В дополнение к формам объема, а также инвариантам ∇, ∇^*, h, S и τ, неявно определяемым посредством структурных уравнений невырожденной гиперповерхности x с произвольной нормализацией (Y, z), укажем дальнейшие инварианты и их геометрические свойства. За подробностями отошлем читателя к работе ([10], гл. 3, 4).

2.7.1. *Определения и известные факты. Тензор разности* связностей $C(v, w) := \nabla(h)_v w - \nabla^*_v w$ является симметричным, ассоциированная *кубическая форма*, определяемая соотношением $C^\flat(u, v, w) := h(u, C(v, w))$, является полностью симметричной и удовлетворяет соотношению $\nabla^* h = 2C^\flat$. Следует отметить, что данное определение тензора C отличается от обычно встречающегося в литературе. Как правило в качестве тензора C берется разность между индуцированной и конормальной связностями. В данном нами определении тензора C необходимо знать только пару (x, Y), а не тройку (x, Y, z). Используя пару (x, Y), мы определяем индуцированную конормальную связность ∇^*, а также форму h из соотношения $h(v, w) = -\langle dY(v), dx(w)\rangle$. Это позволяет определить $\nabla(h)$, а затем тензор C. На этом пути мы получаем все хорошие свойства кубической формы $C^\flat$, как и в релятивной теории.

Форма Чебышева $T^\flat$, определяемая соотношением $T^\flat(v) := \mathrm{trace}(w \mapsto C(v, w))$, является замкнутой, поскольку для каждого локального поля реперов имеет место соотношение

$$nT^\flat = d \ln \frac{\omega(h)(v_1, \ldots, v_n)}{\omega^*(v_1, \ldots, v_n)},$$

где формы объема одинаково ориентированы (сравнивая формы объема, всегда будем предполагать, что они одинаково ориентированы). Ассоциированное векторное поле Чебышева T определяется соотношением $h(v, T) := T^\flat(v)$.

Из вышеизложенного вытекает следующая очевидная геометрическая интерпретация формы $T^\flat$ и тензора C: $T^\flat$ измеряет отклонение форм объема, в то время как C измеряет отклонение связностей ∇^* и $\nabla(h)$.

2.7.2. *Опорная функция.* Определим *опорную функцию* пары (x, Y) по отношению к фиксированной точке $x_o \in R^{n+1}$ формулой $\rho(x_o) := \langle Y, x_o - x\rangle$. В случае $x_o = O \in R^{n+1}$ будем использовать обозначение $\rho := \langle Y, -x\rangle$. Хорошо известно, что множество $\{p \in M \mid \rho(x_o) = 0\}$ нигде не плотно на невырожденной гиперповерхности. Всякая опорная функция удовлетворяет следующему уравнению в частных производных:

$$\mathrm{Hess}^* \rho + \frac{1}{n-1} \mathrm{Ric}^* \cdot \rho = h.$$

Это важное уравнение уже изучалось А.П. Норденом (см. [2], § 4 приложения и [10], § 4.13).

2.8. *Гауссово конормальное отображение.* Как указано в п. 2.4, в случае невырожденной гиперповерхности *конормальное отображение* $Y : M \to R^{(n+1)*}$ является погружением. Таким образом, для заданной пары (x, Y) это отображение является естественным аналогом классического *гауссова отображения* и описывает *конормальную индикатрису.* Поскольку радиус-вектор этого погружения трансверсален к $Y(M)$, можно записать структурные уравнения Гаусса для этого погружения как в п. 2.4. (В отличие от конормальных полей, трансверсальные поля не обязательно определяют погружения.) Погружение $Y : M \to R^{(n+1)*}$ само является невырожденным тогда и только тогда, когда тензор Ric^* имеет максимальный ранг на M. В этом случае тензор Ric^* (по модулю положительного постоянного множителя) может быть использован в качестве полуримановой метрики для *сферической конормальной индикатрисы.* А.П. Норден использует *гауссово конормальное отображение* в ([2], § 6 приложения; см. также [4], §§ 0.9-0.15, [3], § 2.5, [10], § 4.6).

3. Релятивные нормализации

3.1. *Классы эквивалентности трансверсальных полей.* Сформулированный в п. 2.6 вариант основной теоремы не использует трансверсальности поля z. Это объясняется следующим образом. Для невырожденной гиперповерхности x конормальное расслоение является линейным расслоением, а всякое конормальное поле является нигде не обращающимся в нуль сечением этого расслоения. Имеется взаимно однозначное соответствие между классом всех конормальных полей, проективным классом конормальных связностей и конформным классом метрик. В случае трансверсальных полей ситуация имеет другой характер. Для прояснения этого факта рассмотрим следующие два возможных отношения эквивалентности на классе всех трансверсальных полей на гиперповерхности x.

3.1.1. *Определение.*

(i) Назовем два трансверсальных поля z и $z^\sharp$ гиперповерхности x *тангенциально эквивалентными*, если для некоторого (а, следовательно, и для любого) конормального поля Y выполняется соотношение

$$\langle Y, z\rangle = \langle Y, z^\sharp\rangle.$$

Это соотношение эквивалентно существованию касательного векторного поля w, удовлетворяющего соотношению

$$z^\sharp = z + dx(w).$$

(ii) Назовем два трансверсальных поля z и $z^\sharp$ гиперповерхности x *трансверсально эквивалентными*, если существует нигде не обращающаяся в нуль дифференцируемая функция q на M такая, что $z^\sharp = qz$.

3.1.2. *Замечания.*

(i) Класс тангенциальной эквивалентности взаимно однозначно соответствует конормальному полю Y, удовлетворяющему соотношению $\langle Y, z\rangle = 1$ для всех z из этого класса, и, таким образом, взаимно однозначно соответствует связности ∇^* в пределах проективного класса $\mathfrak{P}^*$. Два тангенциально эквивалентных трансверсальных поля индуцируют посредством структурных уравнений Гаусса для гиперповерхности x одну и ту же метрику h. Имеются взаимно однозначные соответствия между множеством классов тангенциальной эквивалентности, проективным классом $\mathfrak{P}^*$ и конформным классом $\mathfrak{C}$ метрик таких, что соответствующая пара (∇^*, h) удовлетворяет уравнениям Кодацци.

(ii) Два трансверсально эквивалентных трансверсальных поля индуцируют посредством структурных уравнений Гаусса для гиперповерхности x одну и ту же индуцированную связность ∇. Имеется взаимно однозначное соответствие между множеством классов трансверсальной эквивалентности и классом индуцированных связностей, однако между классами трансверсальной эквивалентности и конормальными полями взаимно однозначного соответствия нет.

3.1.3. *Лемма.* Пусть x — невырожденная гиперповерхность.

(i) В каждом классе тангенциально эквивалентных трансверсальных полей имеется в точности одно трансверсальное поле y, для которого уравнение Вейнгартена принимает вид $dy(v) = dx(-S(v))$. Мы называем такие трансверсальные поля *релятивными нормалями*, а пару (Y, y) с релятивной нормалью y, удовлетворяющую соотношению $\langle Y, y\rangle = 1$, называем *релятивной нормализацией*. Тройку (x, Y, y) называем *релятивной гиперповерхностью*. (В немецком переводе приложения к монографии [2], написанном А.П. Норденом, релятивная нормализация называется *M-нормализацией*, авторы книги [3] называют релятивную нормаль *эквиаффинным трансверсальным полем*.)

(ii) Пара (Y, y) является релятивной нормализацией тогда и только тогда, когда

$$\langle Y, y\rangle = 1, \quad \langle Y, dy\rangle = 0,$$

где, здесь и в дальнейшем, соотношение вида $\langle Y, dy\rangle = 0$ означает, что $\langle Y, dy(v)\rangle = 0$ для всех касательных полей v на M.

(iii) Имеется взаимно однозначное соответствие между конормальными полями Y и релятивными нормалями y такими, что $\langle Y, y\rangle = 1$.

(iv) Для релятивных нормализаций гиперповерхности x имеется взаимно однозначное соответствие между классами объектов ∇^*, h, Y, y, ∇ (см. [10], §§ 5.2–5.4).

(v) В соответствии с пп. 2.2 и 2.3 любое трансверсальное поле y индуцирует связность ∇ и форму объема ω, поэтому y является релятивной нормалью тогда и только тогда, когда $\nabla\omega = 0$.

(vi) **Лемма.** Пара (Y, y), удовлетворяющая соотношению $\langle Y, y\rangle = 1$, является релятивной нормализацией тогда и только тогда, когда тройка (∇, h, ∇^*) является сопряженной, т. е. удовлетворяет соотношению

$$uh(v, w) = h(\nabla_u v, w) + h(v, \nabla^*_u w)$$

для всех касательных полей u, v, w.

Доказательство. Пусть z и $z^\sharp$ — два тангенциально эквивалентных трансверсальных поля, т. е. $z^\sharp = z + dx(w)$ для некоторого касательного поля w. Используя уравнения Вейнгартена, приходим к соотношениям

$$dz^\sharp(v) = dz(v) + \overline{\nabla}_v dx(w) = dx(\nabla_v w - Sv) + (h(v, w) + \tau(v))z.$$

Для данного z можно однозначно определить поле w такое, что $h(v, w) + \tau(v) = 0$ для всех касательных векторов v. Тогда $z^\sharp$ является релятивной нормалью. Остальные утверждения хорошо известны (см., напр., [10], гл. 3–4).

Сопряженность тройки (∇, h, ∇^*) является обобщением хорошо известной *леммы Риччи* в римановой геометрии. Насколько известно автору, важное понятие *сопряженных связностей* (по нашей терминологии, *сопряженные тройки*) было введено А.П. Норденом.

Хорошо известно, что всякая абстрактная пара Кодацци (∇^*, h) на дифференцируемом многообразии, где ∇^* является связностью без кручения, может быть единственным образом продолжена до сопряженной тройки (см. [21] и [10], § 4.4, а также п. 6.6 данной работы).

3.1.4. *Лемма.* Пусть x — невырожденная гиперповерхность, а z — трансверсальное поле. Для структурных уравнений в терминах поля z с индуцированными коэффициентами ∇, h, S и τ следующие утверждения, относящиеся к классу трансверсальной эквивалентности поля z, эквивалентны:

(i) в классе эквивалентности поля z существует релятивная нормаль;
(ii) оператор S является h-самосопряженным;
(iii) индуцированная связность ∇ является риччи-симметрической;
(iv) 1-форма τ замкнута.

В этой форме данная лемма сформулирована Т. Биндером (личное сообщение); в другой терминологии в работе [22] сформулированы некоторые части этой леммы. Простое доказательство этой леммы можно получить, следуя утверждениям и вычислениям работы ([10], §§ 3.5–3.8 и 4.3). Изложение теории релятивных нормализаций можно найти также в ([2], [3] и [10], §§ 3.4–3.6).

Из предыдущего вытекает, что любое трансверсальное поле z индуцирует единственную релятивную нормаль y (с той же ориентацией), принадлежащую тому же классу тангенциальной эквивалентности. Лемма 3.1.3 описывает способ построения y по z. Имеется другая возможность для построения y по z: трансверсальное поле z и гиперповерхность x однозначно определяют конормальное поле Y, удовлетворяющее соотношению $\langle Y, z\rangle = 1$; имеется единственное решение y следующей линейной системы максимального ранга: $\langle Y, y\rangle = 1$, $\langle dY, y\rangle = 0$.

3.2. *Сравнение конормальных и трансверсальных полей.* Первый вариант фундаментальной теоремы в п. 2.6 и предыдущие элементарные свойства классов эквивалентности трансверсальных полей невырожденной гиперповерхности мотивируют указанные ниже точки зрения; следует отметить, что предположение о невырожденности гиперповерхности существенно для дальнейшего.

3.2.1. *Геометрические свойства гиперповерхности, индуцированные конормальными полями.* Пусть x — невырожденная гиперповерхность и (Y, z) — произвольная нормализация гиперповерхности x.

(a) Конормальное поле $Y : M \to R^{(n+1)*}$ всегда является погружением, в то время как трансверсальное поле $z : M \to R^{n+1}$ в общем случае погружением не является, более того, конормальное поле определяет касательные плоскости.
(b) Любая конормальная связность ∇^* не имеет кручения и является риччи-симметрической, в то время как индуцированная связность ∇, являясь связностью без кручения, не является в общем случае риччи-симметрической. Более того, все конормальные связности принадлежат одному и тому же классу проективно-плоских связностей, их предгеодезики обладают замечательным геометрическим свойством: они являются линиями тени по отношению к параллельным пучкам света [2], [23], [24].
(c) Из условий интегрируемости следует, что пара (∇^*, h) удовлетворяет уравнениям Кодацци, в то время как пара (∇, h) в общем случае уравнениям Кодацци не удовлетворяет.
(d) Пара (Y, h) определяет гиперповерхность x однозначно с точностью до параллельных переносов ([3], с. 58).
(e) Пара (∇^*, h), удовлетворяющая условиям интегрируемости Гаусса для тензора кривизны тензора R^*, а также уравнениям Кодацци, всегда образует фундаментальную систему для геометрии пары (x, Y), и, таким образом, пара (∇^*, h) определяет пару (x, Y) с точностью до аффинной эквивалентности. В общем случае аналогичное утверждение для пары (∇, h) по отношению к паре (x, z) места не имеет.

3.2.2. *Релятивные нормализации являются отмеченными.* Класс релятивных нормализаций (Y, y) на невырожденной гиперповерхности x является отмеченным в классе всех нормализаций (Y, z)

(A) спаривание конормалей Y и релятивных нормалей y, удовлетворяющее условию $\langle Y, y\rangle = 1$, является биективным;

(B) по произвольному трансверсальному полю можно построить единственную ассоциированную релятивную нормаль в его классе тангенциальной эквивалентности;
(C) для релятивных нормализаций структурные уравнения Вейнгартена более простые; в случае, когда $y : M \to R^{n+1}$ является погружением, касательные плоскости гиперповерхностей x и y параллельны в соответствующих точках, что по терминологии А.П. Нордена означает, что гиперповерхности находятся в *соответствии Петерсона*;
(D) тройка (∇, h, ∇^*) является сопряженной в точности в случае релятивной нормализации; этот факт имеет далеко идущие следствия (см., напр., [2], дополнение А.П. Нордена; [10], § 4.4, и [21]);
(E) произвольная нормализация (Y, z) и релятивная нормализация (Y, y), удовлетворяющие условиям $\langle Y, y\rangle = 1 = \langle Y, z\rangle$, индуцируют одну и ту же пару (∇^*, h) на M, образующую фундаментальную систему для (x, Y); пара (∇^*, h) позволяет восстановить гиперповерхность x с точностью до аффинной эквивалентности.

3.2.3. *Геометрические следствия.* Суммируя вышеизложенные точки зрения, для невырожденных гиперповерхностей можно утверждать следующее:

(i) рассматривая произвольные нормализации, можно заключить, что геометрическая информация, вытекающая из инвариантов, индуцированных парой (x, Y), в общем значительно лучше отражает геометрические свойства гиперповерхности x, чем информация, вытекающая из инвариантов, индуцированных парой (x, z); в дополнении А.П.Нордена к монографии [2] подчеркивается важность структур, индуцируемых конормальными полями, однако не вызывает сомнения тот факт, что в специальных случаях таких как геометрия Бляшке и центроаффинная геометрия, ассоциированные нормали имеют важное геометрическое значение (см. п. 3.4);
(ii) рассматривая два вышеуказанных способа введения классов эквивалентности для трансверсальных полей, можно заключить следующее: тангенциальная эквивалентность важна тем, что в классах эквивалентности существуют единственные (и, таким образом, представляющие эти классы) релятивные нормали; имеется естественное взаимно однозначное соответствие между классами тангенциальной эквивалентности и конормальными полями, устанавливаемое соотношением $\langle Y, z\rangle = 1$ для любого z из класса эквивалентности; между классами трансверсальной эквивалентности и конормальными полями взаимно однозначного соответствия нет;
(iii) релятивные нормализации являются отмеченными также со структурной точки зрения: параллельность индуцированных форм объема отражает соответствующее свойство объемлющего пространства (см. выше лемму 3.1.3(v), [3], §§ II.1-II.3, а также [10], § 3.6 и гл. 8);
(iv) изучая геометрию, индуцированную нормализацией, можно ограничиться рассмотрением релятивных нормализаций.

В случае вырожденной гиперповерхности конормальные поля более не определяют погружения и, таким образом, не индуцируют формы объема и конормальные связности. В этом случае приходится изучать инварианты, индуцированные парами (x, z) (см., напр., [12]).

3.3. *Кубическая форма и форма Чебышева.* К п. 2.7 добавим некоторые соотношения в случае *релятивной нормализации.*

Тензор разности C и связности ∇, ∇^* и $\nabla(h)$ удовлетворяют соотношениям

$$C(v, w) = \frac{1}{2}(\nabla_v w - \nabla^*_v w), \quad \nabla(h) = \frac{1}{2}(\nabla + \nabla^*),$$
$$\nabla = \nabla(h) + C, \quad \nabla^* = \nabla(h) - C,$$
$$\nabla^* h = 2C^\flat = -\nabla h.$$

Форма Чебышева удовлетворяет сотношениям

$$nT^\flat = \frac{1}{2} d \ln \frac{\omega(v_1, \ldots, v_n)}{\omega^*(v_1, \ldots, v_n)} = d \ln \frac{\omega(v_1, \ldots, v_n)}{\omega(h)(v_1, \ldots, v_n)} = d \ln \frac{\omega(h)(v_1, \ldots, v_n)}{\omega^*(v_1, \ldots, v_n)}$$

для любого локального репера, где предполагается, что формы объема имеют одну и ту же ориентацию. Более того, фиксируя постоянные множители подходящим образом, имеем

$$\omega(v_1, \ldots, v_n) \cdot \omega^*(v_1, \ldots, v_n) = (\omega(h)(v_1, \ldots, v_n))^2.$$

3.4. *Примеры релятивных нормализаций.* Перечислим известные примеры релятивных нормализаций (детали можно найти в [10], гл. 6).

3.4.1. *Евклидова нормализация.* Пусть пространство R^{n+1} снабжено скалярным произведением, тогда R^{n+1} может быть отождествлено со своим дуальным пространством. Пусть μ означает единичное нормальное векторное поле гиперповерхности x, которое невырождено, если индуцированная билинейная форма $h(E) = \mathrm{II}$ является невырожденной (знак "E" используется для обозначения *евклидовых* инвариантов, знаки I, II, III — соответственно для обозначения трех *фундаментальных форм*). В евклидовом случае μ является одновременно и нормальным и конормальным полем, поэтому $(Y(E), y(E)) = (\mu, \mu)$ является релятивной нормализацией. Индуцированная связность $\nabla(E)$ совпадает со связностью Леви-Чивита $\nabla(\mathrm{I})$ первой фундаментальной формы I, в то время как $\nabla^*(E) = \nabla(\mathrm{III})$. Имеем соотношение

$$2C^\flat(E) = \nabla^*(\mathrm{III})\mathrm{II} = -\nabla(\mathrm{I})\mathrm{II}$$

для ковариантных производных второй фундаментальной формы, из которого для формы Чебышева вытекает следующее соотношение:

$$T^\flat(E) = -\frac{1}{2n} d \ln |H_n(E)|;$$

здесь $S(E)$ означает *евклидов оператор Вейнгартена*, а $H_n(E) = \det S(E)$ — *евклидову кривизну Гаусса–Кронекера.* Геометрия, индуцируемая евклидовой нормализацией, является инвариантной относительно движений. Релятивная точка зрения помогает унифицировать методы доказательств, в частности, в теории внешней кривизны (см., напр., [10], §§ 6.1 и 6.4.2, также п. 9.1 данной работы).

3.4.2. *Эквиаффинная нормализация* (*нормализация Бляшке*). Имеется единственная (с точностью до знака) нормализация среди релятивных нормализаций, характеризуемая обращением в нуль ее чебышевского поля: $T(e) = 0$ (*условие аполярности*); знак "e" указывает здесь на индуцированную *эквиаффинную* геометрию. Трансверсальное поле $y = y(e)$ в этой нормализации исторически принято называть *полем аффинной нормали.* Уравнение $T(e) = 0$ эквивалентно соотношению $\omega^* = \omega(h)$. Это соотношение характеризует единственную пару Кодацци (∇^*, h) в декартовом произведении $\mathfrak{P}^* \times \mathfrak{C}$. В настоящее время унимодулярная геометрия часто называется *геометрией Бляшке*; эта терминология отмечает большой вклад Бляшке в разработку этой геометрии (не игнорируя существенный вклад, сделанный другими авторами). Геометрия, индуцированная нормализацией Бляшке, инвариантна относительно группы унимодулярных преобразований (включая параллельные переносы).

В [3] поле аффинной нормали вводится как такое поле релятивной нормали, что $\omega(h) = \omega$. Этот структурный подход появился впервые в [9]; однако только позднее, в 1982 г., когда Номидзу независимо использовал указанный подход в лекции в Мюнстере, он оказал существенное влияние на дальнейшее развитие аффинной теории гиперповерхностей. Наша незначительная модификация, использующая уравнение $\omega(h) = \omega^*$ вместо уравнения $\omega(h) = \omega$, основывается на точке зрения, изложенной в п. 3.2.1. Мы предпочитаем использовать инварианты, индуцированные конормальными полями. (Напомним отмеченный в пп. 2.2 и 2.4 факт, что формы объема на M единственны только с точностью до ненулевых постоянных множителей; но не будем в дальнейшем постоянно указывать на это).

3.4.3. *Центроаффинная нормализация.* Хорошо известно, что для невырожденной гиперповерхности множество $\{p \in M \mid x(p)$ касается $M\}$ нигде не плотно. Таким образом, радиус-вектор x почти всюду трансверсален. Гиперповерхность со всюду трансверсальным радиус-вектором мы называем *центроаффинной*, при этом для радиус-вектора также используется обозначение x (см. [3], сс. 15, 37–39). Для такой гиперповерхности можно выбрать $y(c) := \varepsilon x$ в качестве релятивной нормали, где $\varepsilon = +1$ или $\varepsilon = -1$ выбирается подходящим образом (см. ниже); по аналогии с предыдущим используем "c" как знак, указывающий на *центроаффинную нормализацию* $(Y(c), y(c))$, где $Y(c)$ ориентировано таким образом, что

$$1 = \langle Y(c), y(c) \rangle.$$

Напомним следующие определения.

Локально сильно выпуклая центроаффинная гиперповерхность называется гиперповерхностью

(i) *гиперболического типа*, если для любой точки $x(p) \in R^{n+1}$ начало координат в R^{n+1} и гиперповерхность расположены по разные стороны от аффинной касательной гиперплоскости $dx(T_pM)$; *центроаффинное нормальное векторное поле* задается уравнением $y(c) = x$ (примерами являются гиперболические аффинные гиперсферы в R^{n+1} с центром в начале координат $O \in R^{n+1}$); в этом случае мы модифицируем определение опорной функции и полагаем $\rho := \langle Y, x \rangle$.

(ii) *эллиптического типа*, если для любой точки $x(p) \in R^{n+1}$ начало координат в R^{n+1} и гиперповерхность расположены по одну сторону от аффинной касательной гиперплоскости $dx(T_pM)$; *центроаффинное нормальное векторное поле* задается уравнением $y(c) = x$ (примерами являются эллиптические аффинные гиперсферы в R^{n+1} с центром в начале координат $O \in R^{n+1}$).

При подходящем выборе ориентации нормализации в (i) и (ii) центроаффинная метрика оказывается положительно определенной. В обоих случаях имеем $\rho(c) = 1$, и это соотношение характеризует центроаффинную нормализацию в классе всех нормализаций невырожденных центроаффинных гиперповерхностей. Другая характеризация в классе всех *релятивных* нормализаций следует из структурных уравнений Вейнгартена в терминах соотношения $S(c) = -\varepsilon \cdot \mathrm{id}$. Из этого соотношения очевидно, что понятие *внешней центроаффинной кривизны* не имеет смысла. Вместо него важную роль играет *центроаффинный оператор Чебышева* $\mathfrak{T}$, определенный формулой $\mathfrak{T}(c)(v) := \nabla(h(c))_v T(c)$. Геометрия, индуцированная центроаффинной нормализацией, инвариантна при действии группы $GL(n+1, R)$, которое оставляет начало координат на месте.

3.4.4. *Однопараметрическое семейство релятивных нормализаций Манхарта.* Снабдим R^{n+1} евклидовым скалярным произведением. Эта структура позволяет определить единичное нормальное поле μ гиперповерхности x и евклидову кривизну Гаусса–Кронекера $H_n(E) = \det S(E)$. На невырожденных гиперповерхностях Манхартом было определено однопараметрическое семейство релятивных нормализаций посредством конормалей

$$Y(\alpha) := |H_n(E)|^{-\alpha} \cdot \mu, \quad \alpha \in R.$$

При $\alpha = 0$ получается евклидова нормализация, а при $\alpha = \frac{1}{n+2}$ — нормализация Бляшке (см. [7], гл. 64; [10], § 6.4, а также [13]).

3.4.5. *Двупараметрическое семейство релятивных нормализаций Биндера–Вие.* В работах [13] и [14] авторы расширили конструкцию Манхарта, определив следующим образом двупараметрическое семейство релятивных нормализаций:

$$Y(\alpha, \beta) := |H_n(E)|^{-\alpha} \cdot \rho(E)^{-\beta} \cdot \mu, \quad \alpha, \beta \in R.$$

Это семейство содержит семейство Манхарта, но также и центроаффинную нормализацию (с точностью до знака) при $(\alpha, \beta) = (0, 1)$. Для всех нормализаций этого семейства в работе [14] были найдены группы инвариантности.

4. Примеры. Специальные классы гиперповерхностей

В этом параграфе x является невырожденной гиперповерхностью с произвольной конормалью Y.

4.1. *Квадрики.* Для любого конормального поля Y гиперповерхности x можно определить пару (∇^*, h) и, таким образом, определить тензор C; из соотношения $C = 0$ следует, что x — квадрика. Однако в общем случае соотношение $C = 0$ не характеризует квадрики (исключением является геометрия Бляшке, в которой уравнение $C = 0$ характеризует квадрики).

4.2. *Релятивные сферы.* Релятивная гиперповерхность (x, Y, y) называется *собственной релятивной сферой*, если для некоторого $x_0 \in R^{n+1}$ имеем $y = \lambda(x - x_0)$ для подходящей нигде не обращающейся в нуль дифференцируемой функции λ; релятивная гиперповерхность (x, Y, y) называется *несобственной релятивной сферой*, если y — постоянное трансверсальное поле. В соответствии с этим определением любая центроаффинная гиперповерхность с центроаффинной нормализацией является собственной релятивной сферой, и, таким образом, в центроаффинной геометрии понятие "релятивные сферы" не имеет смысла. В геометрии Бляшке релятивные сферы называются *аффинными сферами.* На собственных аффинных сферах нормализация Бляшке и центроаффинная нормализация совпадают (с точностью до ненулевого постоянного множителя), и, таким образом, уравнение $T(c) = 0$ характеризует собственные аффинные сферы в рамках центроаффинной геометрии. Класс аффинных сфер настолько велик, что о какой-либо локальной классификации речь пока не идет. Имеются частичные локальные и глобальные классификации при некоторых дополнительных предположениях (см., [4], гл. 2; [25]).

4.3. *Экстремальные гиперповерхности.* Для любой невырожденной гиперповерхности x с данной конормалью Y ареальный функционал ее полуримановой формы объема $\omega(h)$ по области D с компактным носителем задается следующим образом:

$$\mathfrak{A} := \int_D \omega(h).$$

Если гиперповерхность является критической точкой этого функционала, она удовлетворяет уравнению Эйлера–Лагранжа; в этом случае гиперповерхность называется *экстремальной гиперповерхностью.*

4.3.1. *Эквиаффинные экстремальные гиперповерхности.* Уравнение Эйлера–Лагранжа в геометрии Бляшке имеет вид $nH(e) := \operatorname{trace} S(e) = 0$, оно является уравнением в частных производных четвертого порядка. Выражение для второй вариации ареального функционала очень сложное. В [26] доказано, что на локально сильно выпуклых экстремальных гиперповерхностях любое из следующих условий (i) и (ii) влечет отрицательность второй вариации:

(i) $n = 2$,

(ii) $n \geq 2$ и гиперповерхность x может быть представлена как график функции.

В этом случае аффинные экстремальные гиперповерхности называются *аффинными максимальными* гиперповерхностями. В случае неопределенной метрики Бляшке известно, что знак второй вариации может быть как положительным, так и отрицательным (см. примеры в [27]).

4.3.2. *Центроаффинные экстремальные гиперповерхности.* В [28] выведено уравнение Эйлера–Лагранжа для центроаффинного ареального функционала

$$\operatorname{trace} \mathfrak{T}(c) = \operatorname{trace} \nabla(h(c))T(c) = 0.$$

Все собственные аффинные сферы принадлежат рассматриваемому классу. Имеются другие большие классы полных некомпактных локально сильно выпуклых центроаффинных экстремальных гиперповерхностей [29]. Одним из примеров такого класса является так называемое *семейство Ли–Вана*, определяемое следующим образом: x центроаффинно эквивалентна (см., напр., [28] или [29]) гиперповерхности

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_{n+1}^{\alpha_{n+1}} = 1, \quad \alpha_1 > 0, \ldots, \alpha_{n+1} > 0;$$

здесь $x_1, \dots, x_{n+1}$ — положительные канонические координаты в R^{n+1}.

В [30] изучались примеры гиперповерхностей, которые являются одновременно центроаффинными экстремальными и эквиаффинными экстремальными.

Имеется только незначительное количество результатов, касающихся второй вариации центроаффинного ареального функционала [28].

4.4. *Центроаффинные гиперповерхности Чебышева.* Этот класс гиперповерхностей определяется соотношением $\mathfrak{T}(c) = \lambda \cdot \mathrm{id}$, где λ — дифференцируемая функция. Этот класс также очень обширен, он содержит все собственные аффинные сферы, примеры и результаты, относящиеся к этому классу гиперповерхностей, можно найти в [31], [32]. Особый интерес гиперповерхности Чебышева представляют с точки зрения конформной геометрии; они могут быть охарактеризованы хорошо известной системой уравнений в частных производных [33].

4.4.1. **Теорема.** Центроаффинная гиперповерхность является центроаффинной гиперповерхностью Чебышева тогда и только тогда, когда эквиаффинная опорная функция $\rho(e)$ удовлетворяет системе уравнений в частных производных

$$\mathrm{Hess}(h(c))(\ln|\rho(e)|) - \frac{1}{n}\Delta(h(c))(\ln|\rho(e)|) \cdot h(c) = 0;$$

здесь $\mathrm{Hess}(h(c))$ означает *ковариантный гессиан*, а $\Delta(h(c))$ — *оператор Лапласа* по отношению к центроаффинной метрике $h(c)$.

5. Замена нормализации

В дальнейшем ограничимся рассмотрением невырожденных центроаффинных гиперповерхностей. Поскольку радиус-вектор трансверсален, то все опорные функции нигде не обращаются в нуль. Как указано выше, для гиперповерхности x с конормальными полями Y имеется взаимно однозначное соответствие между инвариантами, индуцированными такими нормализациями. Нетрудно выяснить, как изменяются инварианты при замене конормального поля; для релятивных нормализаций см. ([10], гл. 5). Эти изменения устанавливаются в случае произвольной нормализации и затем в специальном случае релятивной нормализации.

5.1. **Лемма.** Пусть x — невырожденная центроаффинная гиперповерхность, а Y и $Y^\sharp$ — два произвольных конормальных поля. Тогда

(i) замена конормалей с сохранением ориентации может быть описана с помощью положительной функции $q = \frac{\rho^\sharp}{\rho}$, называемой *функцией перехода*; при этом $Y^\sharp = qY$. Эта замена индуцирует следующее изменение инвариантов;

(ii) метрики преобразуются конформно $h^\sharp = qh$;

(iii) конормальные связности преобразуются проективно

$$\nabla_v^{*\sharp} w = \nabla_v^* w + (d\ln q)(v)w + (d\ln q)(w)v,$$
$$\omega^{*\sharp} = q^{n+1}\omega^*;$$

(iv)

$$C^\sharp(v,w) = C(v,w) - \frac{1}{2}[(d\ln q)(v)w + (d\ln q)(w)v + h(v,w)\,\mathrm{grad}_h(\ln q)],$$
$$T^{\flat\sharp} = T^\flat - \frac{n+2}{2n} d\ln q.$$

5.2. **Лемма.** Пусть x — невырожденная центроаффинная гиперповерхность, а (Y, y) и $(Y^\sharp, y^\sharp)$ — релятивные нормализации. В дополнение к предыдущей лемме имеем

(i) релятивные нормали удовлетворяют соотношению $y^\sharp = q^{-1}[y + dx(\mathrm{grad}_h \ln q)]$;

(ii) преобразование индуцированных связностей имеет вид

$$\nabla_v^\sharp w = \nabla_v w - h(v,w)\,\mathrm{grad}_h \ln q;$$

(iii) в соответствии с предыдущим, сопряженная тройка (∇, h, ∇^*) преобразуется в сопряженную тройку $(\nabla^\sharp, h^\sharp, \nabla^{*\sharp})$, включая преобразование пар Кодацци (∇, h) и (∇^*, h) в пары Кодацци $(\nabla^\sharp, h^\sharp)$ и $(\nabla^{*\sharp}, h^\sharp)$ соответственно.

Глава 5 в [10] содержит дальнейшие формулы преобразования, соответствующие замене релятивной нормализации.

6. Калибровочные инварианты и калибровочно-инвариантные структуры

Список формул преобразования из § 5 позволяет установить следующий список п. 6.1–6.13 геометрических структур, свойств и инвариантов, которые являются *независимыми от нормализации* и зависят, таким образом, только от гиперповерхности x; они не изменяются при действии группы $GL(n+1, R)$ на R^{n+1}. Некоторые части этого списка хорошо известны, но другие являются новыми. Как и прежде, мы рассматриваем невырожденные центроаффинные гиперповерхности, и, таким образом, все опорные функции нигде не обращаются в нуль.

6.1. *Линейное расслоение аффинных нормалей.* Если детерминантная форма объемлющего пространства зафиксирована, то ассоциированные объемы сохраняются при действии унимодулярной группы, и постоянный множитель для индуцированных форм объема на x также является фиксированным. Бляшке в монографии [7] ввел унимодулярно-аффинно инвариантную метрику в конформном классе метрик и затем аффинное нормальное поле посредством векторнозначного лапласиана радиус-вектора x. Кроме того, указанная монография содержит изложение геометрических построений аффинных нормалей в размерности $n = 2$, осуществленные Бляшке для определенных метрик и Демуленом для неопределенных метрик ([7], гл. 43). Если детерминантная форма не зафиксирована, эти построения дают только *линейное расслоение, порождаемое аффинным нормальным полем*; это расслоение инвариантно по отношению к общей группе аффинных преобразований. Насколько известно, указанные конструкции являются исторически первыми среди конструкций, рассматриваемых в рамках нашего подхода. В [34] обобщена конструкция Бляшке для локально сильно выпуклых гиперповерхностей на случай произвольной размерности.

В п. 3.4.2 уже отмечен структурный подход Номидзу для введения аффинной нормали. В работе ([3], с. 45) был намечен другой способ введения аффинной нормали, который также соответствуют нашему подходу: исходя из произвольного (первоначального) трансверсального поля, авторы строят линейное расслоение аффинных нормалей (и затем, фиксируя детерминантную форму det в объемлющем пространстве, строят аффинное нормальное поле). В п. 6.10.1(iii) будет рассмотрено другое построение этого линейного расслоения с использованием других инвариантов, которые также являются не зависимыми от конкретной нормализации.

6.2. *Конформные свойства и инварианты.* Класс всех нормализаций индуцирует конформный класс $\mathfrak{C}$ полуримановых метрик. Напомним, что метрика h может быть определена в терминах пары (x, Y) формулой $h(v, w) = -\langle dY(v), dx(w)\rangle$ без использования трансверсального поля. Инвариантами этой конформной структуры являются

(i) сигнатура метрики h,

(ii) тензор конформной кривизны в размерности $n \geq 3$.

Хорошо известно, что конформный класс $\mathfrak{C}$ состоит из определенных метрик тогда и только тогда, когда x является локально сильно выпуклым. В этом случае, выбирая подходящим образом ориентацию нормализации, можно считать, что $\mathfrak{C}$ состоит из положительно определенных метрик.

6.2.1. *Проблема.* До сих пор не найдена характеризация невырожденных гиперповерхностей, имеющих *конформно плоскую* структуру в качестве класса $\mathfrak{C}$. Является известным то, что гиперповерхности вращения, а также их образы при действии группы $GL(n+1, R)$, имеют конформно плоский класс метрик [35]. Кроме того, известно, что замкнутые центроаффинные гиперповерхности Чебышева являются конформно плоскими ([33], следствие 5.1) (см. также пп. 4.4 и 8.6 данной работы).

6.2.2. *Конформная спектральная геометрия.* Интерес к изучению конформных свойств аффинных гиперповерхностей стимулирует исследования спектра тензора конформной кривизны Вейля [19]. Особый интерес в рамках наших рассмотрений представляет характеризация нечетномерной конформно плоской структуры в терминах спектра ее тензора конформной кривизны ([19], теорема 2.2).

6.3. *Построение отмеченной метрики.* Из п. 5.1 следует, что любые две метрики h, $h^\sharp$ в классе $\mathfrak{C}$ удовлетворяют соотношению

$$\rho^{\sharp-1}h^\sharp = \rho^{-1}h =: \widetilde{h};$$

соотношение $\rho(c) = 1$ влечет $\widetilde{h} = h(c)$. По x и произвольной конормали Y можно построить $\widetilde{h}$. Эта метрика играет особую роль, и, следовательно, особое значение имеют все внутренние инварианты метрики $\widetilde{h}$, такие как связность Леви-Чивита $\nabla(\widetilde{h}) = \nabla(h(c))$, инварианты, связанные с кривизной

$$R(\widetilde{h}) = R(h(c)), \quad \mathrm{Ric}(\widetilde{h}) = \mathrm{Ric}(h(c)), \quad \varkappa(\widetilde{h}) = \varkappa(h(c)),$$

и ориентированная форма объема $\omega(\widetilde{h}) = \omega(h(c))$. Для нормы произвольного тензорного поля B по отношению к произвольной метрике h, указанной в контексте, будет использоваться обозначение $\|B\|$, в то время как обозначение $|B|$ будет означать норму по отношению к отмеченной метрике $\widetilde{h}$.

6.4. *Конормальные поля и проективная структура.* Конормальное расслоение является линейным расслоением, любые два конормальные поля удовлетворяют соотношению $\rho^{-1}Y = \rho^{\sharp-1}Y^\sharp$. Поскольку центроаффинная опорная функция удовлетворяет соотношению $\rho(c) = 1$, для любого конормального поля Y имеем $\widetilde{Y} := \rho^{-1}Y = Y(c)$. В классической теории гиперповерхностей конструкция $\widetilde{Y} = \rho(E)^{-1}Y(E) = \rho(E)^{-1} \cdot \mu$ называется *полярной гиперповерхностью* гиперповерхности x, а отображение $x \mapsto \widetilde{Y}$ называется *инверсией относительно единичной сферы.*

Для проективного класса связностей Вейлем был определен *тензор проективной кривизны*; для класса $\mathfrak{P}^*$ конормальных связностей он удовлетворяет соотношению

$$(n-1)P^*(u,v)w = (n-1)R^*(u,v)w - (\mathrm{Ric}^*(v,w)u - \mathrm{Ric}^*(u,w)v),$$

записанному в терминах любой конормальной связности ∇^*. Тот факт, что связность является *проективно плоской* эквивалентен следующим двум (зависимым) условиям (см., напр., [20], [2] или [10]):

(i) $P^* = 0$ на M,
(ii) $(\nabla^*, \mathrm{Ric}^*)$ — пара Кодацци.

В проективном классе все связности имеют одни и те же непараметризованные геодезики. В п. 3.2.1(b) было отмечено следующее их геометрическое свойство: они являются линиями тени. В согласии с изложенным выше проективный класс $\mathfrak{P}^*$ является плоским. В соответствии с п. 2.8, касающимся гауссова конормального отображения, а также ситуации для евклидова гауссова отображения, для евклидовой невырожденной гиперповерхности как и в аффинном случае гауссово отображение является погружением. Более того, оно само является невырожденным, поскольку евклидов оператор Вейнгартена имеет максимальный ранг тогда и только тогда, когда третья фундаментальная форма (которая с точностью до постоянного положительного множителя совпадает с тензором Риччи конормальной связности) является римановой метрикой. Таким образом, евклидово гауссово отображение индуцирует структуру пространства постоянной кривизны на M. Проективно плоская структура $\mathfrak{P}^*$ невырожденных аффинных гиперповерхностей является естественным обобщением этой структуры постоянной кривизны, и $\mathfrak{P}^*$ не зависит от выбранной нормализации.

6.5. *Структуры Вейля.* Рассмотрим конформный класс $\mathfrak{C} = \{h\}$ полуримановых метрик и класс 1-форм $\mathfrak{F} := \{\theta^\flat\}$, находящиеся во взаимно однозначном соответствии, так что конформное преобразование $h^\sharp = q \cdot h$ соответствует преобразованию 1-форм $\theta^{\flat\sharp} = \theta^\flat - a \cdot d\ln q$ для некоторого фиксированного вещественного числа $a \in R$. Тогда существует единственная связность $\widetilde{\nabla}$, которая в терминах любой пары $(h, \theta^\flat)$ может быть определена формулой

$$\widetilde{\nabla}_v w := \nabla(h)_v w + \frac{a}{2}[\theta^\flat(v)w + \theta^\flat(w)v - h(v,w)\cdot\theta],$$

где θ — ассоциированное векторное поле в неявном виде, определенное соотношением $h(v,\theta) := \theta^\flat(v)$; более того, для любой пары $(h, \theta^\flat)$ выполняется соотношение $\widetilde{\nabla} h = a \cdot \theta^\flat \otimes h$. Тройка $(\widetilde{\nabla}, \mathfrak{C}, \mathfrak{F})$ называется *геометрией Вейля* или *структурой Вейля* на M, связность $\widetilde{\nabla}$ называется *связностью Вейля* пары $(\mathfrak{C}, \mathfrak{F})$. Одновременное преобразование метрики и 1-формы называется *калибровочным преобразованием*; связность $\widetilde{\nabla}$ является инвариантной относительно калибровочных преобразований и поэтому называется *калибровочно-инвариантной* ([36], [17]). Обозначим тензор кривизны этой связности символом $\widetilde{R}$, ее тензор Риччи — символом $\widetilde{\mathrm{Ric}}$; оба эти тензора являются калибровочными инвариантами.

Рассматривая невырожденную гиперповерхность x в R^{n+1}, конформный класс метрик $\mathfrak{C}$ и класс форм Чебышева $\{T^\flat\}$, определим геометрию Вейля на M для $a = \frac{2n}{n+2}$. Замена конормалей индуцирует калибровочное преобразование и наоборот. По этой причине мы используем терминологию геометрии Вейля и называем замену конормалей *калибровочным преобразованием.* Поскольку любой класс тангенциально эквивалентных трансверсальных полей взаимно однозначно соответствует релятивной нормализации, калибровочное преобразование описывает биективное преобразование таких классов эквивалентности и относительных нормализаций соответственно.

Среди всех релятивных нормализаций геометрия Бляшке может быть охарактеризована соотношением $T^\flat = 0$. Отсюда непосредственно вытекают следующие факты.

6.5.1. *Лемма.*

(i) Связность Вейля $\widetilde{\nabla}$ и связность Леви-Чивита $\nabla(h(e))$ метрики Бляшке совпадают: $\widetilde{\nabla} = \nabla(h(e))$; таким образом, $\nabla(h(e))$ может быть построена по любой паре $(h, T^\flat)$, как указано выше, и это построение инвариантно относительно калибровочных преобразований, т. е. независимо от замены кономальных полей.

(ii) Калибровочная инвариантность связности $\nabla(h(e))$ влечет калибровочную инвариантность следующих внутренних инвариантов геометрии Бляшке:
  - (a) тензора кривизны метрики Бляшке $R(e) = \widetilde{R}$;
  - (b) тензора Риччи метрики Бляшке $\mathrm{Ric}(e) = \widetilde{\mathrm{Ric}}$;
  - (c) формы объема метрики Бляшке (с точностью до ненулевой константы) $\omega(h(e)) = \widetilde{\omega}$.

6.5.2. *Структуры Эйнштейна–Вейля.* Структура Вейля называется *структурой Эйнштейна–Вейля*, если тензор Риччи $\widetilde{\mathrm{Ric}}$ связности $\widetilde{\nabla}$ является элементом конформного класса $\widetilde{\mathrm{Ric}} = \lambda_h \cdot h$ для любой метрики $h \in \mathfrak{C}$. Из предыдущей леммы следует, что структура Вейля на невырожденной гиперповерхности является структурой Эйнштейна–Вейля тогда и только тогда, когда метрика Бляшке является метрикой Эйнштейна. Это свойство также является калибровочно-инвариантным в вышеуказанном смысле.

6.6. *Сопряженные тройки.* Следующие элементарные результаты, касающиеся сопряженных троек, рассматриваемых абстрактно, можно найти в [21]; [10], § 4.4; [37]; а также в [17].

6.6.1. *Лемма.* Для полуримановой метрики h и связности без кручения ∇^* имеют место следующие утверждения:

(a) пара (∇^*, h), удовлетворяющая уравнениям Кодацци, может быть единственным образом продолжена до сопряженной тройки (∇, h, ∇^*), при этом (∇, h) также является парой Кодацци [21];

(b) связность ∇^* является риччи-симметрической тогда и только тогда, когда связность ∇ является риччи-симметрической (см. [10], § 4.4.7).

6.6.2. *Лемма.* Рассмотрим метрику h и риччи-симметрическую связность ∇^* без кручения. Пусть q — положительная дифференцируемая функция на M. Метрика порождает конформную структуру, а связность порождает проективный класс риччи-симметрических связностей без кручения. Функция q индуцирует одновременное преобразование обеих структур:

(i) конформное преобразование $h^\sharp = q \cdot h$,

(ii) проективное преобразование

$$\nabla_v^{*\sharp} w - \nabla_v^* w = (d \ln q)(v) w + (d \ln q)(w) v.$$

Отсюда вытекает

Лемма.

(a) Преобразуем пару (∇^*, h) одновременно в конформном и проективном классах соответственно, как указано выше. Тогда (∇^*, h) является парой Кодацци в том и только том случае, когда $(\nabla^{*\sharp}, h^\sharp)$ является парой Кодацци ([38], [10]).

(b) При проективном преобразовании связность $\nabla^{*\sharp}$ снова оказывается риччи-симметрической [38].

(c) При рассмотренных выше преобразованиях сопряженная тройка, полученная продолжением (a), преобразуется в сопряженную тройку [17], [37].

(d) Если исходить из пары Кодацци (∇^*, h), вышеуказанные продолжение и преобразования приводят к сопряженной тройке $(\nabla^\sharp, h^\sharp, \nabla^{*\sharp})$ с риччи-симметрическими связностями без кручения.

6.6.3. *Терминология.* В [17] вышеуказанные одновременные преобразования пар Кодацци и сопряженных троек назывались *преобразованиями Кодацци*. По другой терминологии (см. [41], [39] и др.) многообразие M с парой Кодацци (∇^*, h) называется *статистическим многообразием*, а вышеуказанное одновременное преобразование называется *конформно-проективным преобразованием*; в этой теории некоторые авторы рассматривают также более общие одновременные преобразования, их исследования оказали влияние на работу [40]. Поскольку в аффинной теории гиперповерхностей класс конормальных связностей является проективно плоским, тензор проективной кривизны необходимо обращается в нуль, и общие проективно-конформные конструкции из [41], [39] и др. сводятся к вышеизложенной ситуации. Наконец, в [17] мы изучали сопряженные тройки и их отношение к структурам Вейля и доказали, что *преобразования Кодацци для сопряженных троек эквивалентны калибровочным преобразованиям в ассоциированной геометрии Вейля.*

В аффинной теории гиперповерхностей сопряженные тройки и структуры Вейля появляются естественным образом. На невырожденной гиперповерхности любое конормальное поле определяет единственную пару (∇^*, h), и каждая такая пара может быть единственным образом продолжена до сопряженной тройки (∇, h, ∇^*) (см. п. 6.6.1). Преобразование конормального поля биективно соответствует преобразованию пары (∇^*, h) и индуцирует преобразования Кодацци сопряженных троек и калибровочные преобразования структуры Вейля; такие преобразования находятся в биективном соответствии. Для унификации терминологии мы используем понятие *калибровочного преобразования* из геометрии Вейля также по отношению к одновременным конформному и проективному преобразованиям в предыдущих леммах. Поскольку такие преобразования биективно соответствуют замене конормального поля, используем эту терминологию для замен конормальных полей; напомним, что в § 3 было показано, что такое преобразование поля Y биективно соответствует преобразованию релятивных нормалей, в то время как замена произвольных трансверсальных полей описывается посредством классов тангенциальной эквивалентности.

6.6.4. *Список калибровочных инвариантов.* Все калибровочные инварианты и калибровочно-инвариантные свойства не зависят от выбора нормализации гиперповерхности x.

(i) Все конформные инварианты являются калибровочными инвариантами.

(ii) Метрика $\widetilde{h}$ калибровочно-инвариантна и, следовательно, (полу)риманова геометрия этой метрики калибровочно-инвариантна; назовем $\widetilde{h}$ *калибровочно-инвариантной метрикой.* Напомним, что $\widetilde{h} = h(c)$.

(iii) Конструкция $\widetilde{Y} := \rho^{-1}Y = Y(c)$ калибровочно-инвариантна, таким образом, инверсия относительно единичной сферы является калибровочно-инвариантной конструкцией (см. п. 6.4).

(iv) Тензор проективной кривизны является нулевым. Тот факт, что любая пара $(\nabla^*, \mathrm{Ric}^*)$ является парой Кодацци, является инвариантным относительно калибровочных преобразований.

(v) Инварианты геометрии Вейля, перечисленные в лемме 6.5.1 (инварианты, связанные с кривизной и формы объема), являются калибровочными инвариантами. В случае структуры Эйнштейна–Вейля это свойство не зависит от выбора нормализации.

(vi) Свойства, перечисленные в пп. 6.6.1–6.6.2 могут рассматриваться в контексте калибровочной инвариантности.

В [39] и [42] изучалась другая структура Вейля в аффинной теории гиперповерхностей, индуцированная конформным классом метрик и классом форм связности. Для наших целей подходит структура Вейля, рассмотренная в п. 6.5.

6.7. *Калибровочно инвариантная кубическая форма.* Напомним, в п. 4.1 был отмечен тот факт, что для любого конормального поля Y из соотношения $C = 0$ следует, что гиперповерхность x является квадрикой, но в общем случае соотношение $C = 0$ не характеризует квадрики. Характеризация квадрик была дана в [24] и [43]: гиперповерхность x является квадрикой тогда и только тогда, когда обращается в нуль бесследовая часть тензора C. Вторым наблюдением, сделанным в [15], является тот факт, что эта бесследовая часть совпадает для всех релятивных нормализаций (см. также [10], § 7.1 и соответствующее дополнительное замечание в [44]). Это наблюдение верно для всех произвольных нормализаций, поскольку тензор C можно определить, используя только пару (x, Y), а не тройку (x, Y, z).

6.7.1. *Предложение.* Пусть Y — произвольное конормальное поле на невырожденной гиперповерхности. Как установлено в п. 2.7, исходя из Y можно определить соответствующую метрику h и проективно плоскую связность ∇^*, а затем C и T. Определим симметрический тензор $\widetilde{C}$ типа $(1, 2)$ как бесследовую часть тензора C:

$$\widetilde{C}(v, w) := C(v, w) - \frac{n}{n+2}(T^\flat(v)w + T^\flat(w)v + h(v, w)T).$$

Тогда

(i) $\widetilde{C}$ — калибровочный инвариант;

(ii) $\widetilde{C} = C(e)$;

(iii) используя калибровочные инварианты $\widetilde{C}$ и $\widetilde{h}$, можно определить *калибровочно-инвариантную бесследовую кубическую форму* $\widetilde{C}^\flat$ формулой $\widetilde{C}^\flat(u, v, w) := \widetilde{h}(u, \widetilde{C}(v, w))$.

Доказательство использует лемму 5.1(iv) и п. 3.4.2.

6.8. *Калибровочно инвариантная форма Чебышева.* Замена нормализации индуцирует калибровочное преобразование формы Чебышева в соответствии с леммой 5.1. Используя калибровочно-инвариантную метрику $\widetilde{h}$ из п. 6.3, отсюда получаем калибровочно-инвариантную 1-форму и ассоциированное с ней калибровочно-инвариантное поле. Определим *калибровочно-инвариантную форму Чебышева* формулой

$$\widetilde{T}^\flat := T^\flat + \frac{n+2}{2n} d \ln \rho$$

и (в неявном виде) форму $\widetilde{T}$ соотношением $\widetilde{h}(\widetilde{T}, v) := \widetilde{T}^\flat(v)$. Напомним, что каждое из соотношений $T(e) = 0$ и $\rho(e) = \mathrm{const}$ характеризует собственные аффинные сферы; отсюда и из предыдущего мы можем следующим образом охарактеризовать собственные аффинные сферы в калибровочно-инвариантных терминах.

6.8.1. *Наблюдение.* Рассмотрим невырожденную центроаффинную гиперповерхность x.

(i) $\widetilde{T} = 0$ тогда и только тогда, когда x является собственной аффинной сферой.

(ii) Имеет место соотношение

$$\widetilde{T} = T(c) = \frac{n+2}{2n} \operatorname{grad}_{h(c)} \ln \rho(e).$$

(iii) Имеют место следующие соотношения, где используется соглашение, касающееся обозначения норм из п. 6.3:

$$|\widetilde{T}|^2 = |\widetilde{T}^\flat|^2 = \|T(c)\|^2_{h(c)} = \frac{n^2}{(n+2)^2} \|d \ln \rho(e)\|^2_{h(c)} = \frac{n^2}{(n+2)^2} \| \operatorname{grad}_{h(c)} \rho(e)\|^2_{h(c)}.$$

6.9. *Калибровочная инвариантность и центроаффинная геометрия.* Основываясь на предыдущем, можно строить дальнейшие калибровочные инварианты в центроаффинной теории гиперповерхностей.

6.9.1. *Лемма.* Определим симметрический тензор $\widetilde{t}$ типа $(1,2)$ формулой

$$\widetilde{t}(v,w) := \frac{n}{(n+2)} (\widetilde{T}^\flat(v) w + \widetilde{T}^\flat(w) v + \widetilde{h}(v,w)\widetilde{T}).$$

Тогда следующие центроаффинные инварианты являются калибровочными инвариантами:

(i) $C(c)(v,w) = \widetilde{C}(v,w) + \widetilde{t}(v,w)$;

(ii) $C^\flat(c)(u,v,w) = h(c)(C(c)(u,v),w) = \widetilde{h}(\widetilde{C}(u,v),w) + \widetilde{h}(u,\widetilde{t}(v,w))$;

(iii) $\nabla(c) = \nabla(h(c)) + C(c) = \nabla(\widetilde{h}) + \widetilde{C} + \widetilde{t}$;

(iv) $\nabla^*(c) = \nabla(h(c)) - C(c) = \nabla(\widetilde{h}) - \widetilde{C} - \widetilde{t}$;

(v) центроаффинный оператор Чебышева калибровочно-инвариантен

$$\mathfrak{T}(c) := \nabla(h(c)) T(c) = \nabla(\widetilde{h})\widetilde{T} =: \widetilde{\mathfrak{T}}.$$

6.9.2. *Геометрические следствия.*

(a) Хорошо известно, что связность $\nabla(c)$ является проективно плоской и ее предгеодезики описывают пересечения гиперповерхности $x(M)$ с 2-плоскостями, содержащими начало координат [2], [24]. В размерности $n \geq 3$ индуцированная связность ∇ данной релятивной нормализации является проективно плоской тогда и только тогда, когда нормализация является центроаффинной ([10], п. 6.3.5). Из утверждения (iii) леммы 6.9.1 следует, что индуцированная центроаффинная связность может быть описана в калибровочно-инвариантных терминах.

(b) Имеется прозрачная геометрическая интерпретация проективной плоскости индуцированной центроаффинной связности в терминах подходящего отображения центроаффинной гиперповерхности в гиперплоскость пространства R^{n+1} ([21], § 9).

(c) Предгеодезики связности $\nabla^*(c)$, которые являются предгеодезиками класса $\mathfrak{P}^*$, описывают линии тени по отношению к подходящему параллельному пучку света (см. п. 6.4). Пункт (iv) леммы показывает, что это свойство может быть сформулировано в калибровочно-инвариантных терминах.

(d) Характеризация собственных аффинных сфер в калибровочно-инвариантных терминах содержится в п. 6.8.1.

6.10. *Калибровочная инвариантность и геометрия Бляшке.* Выразим инварианты Бляшке через калибровочные инварианты и опишем результаты, известные из геометрии Бляшке, в терминах калибровочно-инвариантных свойств

(i) $\nabla(h(e)) = \widetilde{\nabla}$;

(ii) следующие классы форм объема калибровочно-инвариантны:

$$\{c \cdot \widetilde{\omega} \mid 0 \neq c \in R\} = \{c \cdot \omega(h(e)) \mid 0 \neq c \in R\} = \\ = \{c \cdot \omega^*(e) \mid 0 \neq c \in R\} = \{c \cdot \omega(e) \mid 0 \neq c \in R\};$$

(iii) класс $\{c \cdot h(e) \mid 0 \neq c \in R\}$ калибровочно-инвариантен;

(iv) $C(e) = \widetilde{C}$;

(v) $\nabla(e) = \nabla(h(e)) + C(e) = \widetilde{\nabla} + \widetilde{C}$, $\nabla^*(e) = \nabla(h(e)) - C(e) = \widetilde{\nabla} - \widetilde{C}$;

(vi) класс $\{c \cdot \rho(e) \mid 0 \neq c \in R\}$ калибровочно-инвариантен;

(vii) оператор $\widetilde{S} := \rho(e)S(e)$ может быть построен калибровочно-инвариантным способом, таким образом, класс $\{c \cdot S(e) \mid 0 \neq c \in R\}$ калибровочно-инвариантен;

(viii) следующие функции калибровочно-инвариантны:

$$\widetilde{\varkappa} := \rho(e)\varkappa(e), \quad \widetilde{H} := \rho(e)H(e), \quad \widetilde{J} := \rho(e)J(e),$$

аналогично п. (vii) ассоциированные классы $\{c \cdot \varkappa(e) \mid 0 \neq c \in R\}$ и т. д. калибровочно-инвариантны;

(ix) функция $\widetilde{J}$ удовлетворяет соотношению

$$n(n-1)\widetilde{J} = |\widetilde{C}|^2 = |C|^2 - \frac{3n^2}{n+2}|T|^2,$$

где C, T в правой части равенства можно вычислить при использовании произвольной нормализации, в то время как нормы берутся по отношению к метрике $\widetilde{h}$. Назовем функцию $\widetilde{J}$ *калибровочно-инвариантной функцией Пика.*

Доказательства пп. (i)–(vi), (ix) очевидны. Пункт (vii) следует из соотношения (iv) предложения 5.1.3 из [10] и рассмотренных выше калибровочно-инвариантных конструкций в центроаффинной геометрии. Пункт (viii) доказывается следующим образом:

$$n(n-1)\rho(e)\varkappa(e) = \mathrm{trace}_{\widetilde{h}}\,\widetilde{\mathrm{Ric}} =: n(n-1)\widetilde{\varkappa}, \\ |\widetilde{C}|^2 = \rho(e)J(e) = \widetilde{J}.$$

6.10.1. *Геометрические следствия.*

(i) Гиперповерхность x является квадрикой тогда и только тогда, когда $\widetilde{C} = 0$.

(ii) Локально сильно выпуклая гиперповерхность является квадрикой тогда и только тогда, когда $\widetilde{J} = 0$.

(iii) Калибровочно инвариантная конструкция связности $\nabla(e) = \widetilde{\nabla} + \widetilde{C}$ определяет калибровочно-инвариантное трансверсальное линейное расслоение посредством разложения в структурных уравнениях Гаусса; это линейное расслоение является в точности линейным расслоением, порождаемым аффинными нормалями в геометрии Бляшке (см. п. 6.1).

(iv) Из п. 6.10(vii) получаем калибровочно-инвариантную характеризацию несобственных аффинных сфер.

(iv) Из п. 6.10(vii) следует, что унимодулярно-аффинные омбилики можно описать в калибровочно-инвариантных терминах.

6.11. *Полнота.* В аффинной теории гиперповерхностей используются различные понятия полноты [4], [45], [29]. Рассмотрим их смысл с точки зрения калибровочной инвариантности.

6.11.1. *Глобальные графики.* Пусть $x : R^n \to R^{n+1}$ — невырожденный глобальный график. Это свойство не зависит от выбора нормализации и соответствующей индуцированной геометрии. В стандартной терминологии это понятие полноты гиперповерхности x называется *евклидовой полнотой.*

6.11.2. *Полнота метрики Бляшке.* Ограничимся рассмотрением локально сильно выпуклых гиперповерхностей. Полнота метрики Бляшке эквивалентна геодезической полноте ее связности Леви-Чивита ([46], теорема Хопфа–Ринова), которая эквивалентна геодезической полноте связности Вейля $\widetilde{\nabla}$. Таким образом, это свойство является калибровочно-инвариантным для локально сильно выпуклых гиперповерхностей.

6.11.3. *Полнота центроаффинной метрики.* Поскольку центроаффинная метрика и калибровочно-инвариантная метрика совпадают, $h(c) = \widetilde{h}$, полнота $h(c)$ является калибровочно-инвариантным свойством.

6.12. *Фундаментальная теорема — калибровочно-инвариантный вариант.* Пусть M — связное многообразие. Рассмотрим на M две структуры: конформный класс $\mathfrak{C}$ полуримановых метрик и проективный класс $\mathfrak{P}^*$ риччи-симметрических связностей без кручения. Структуру $\mathfrak{P}^* \times \mathfrak{C}$ назовем *структурой Кодацци*, если найдется элемент (∇^*, h), удовлетворяющий уравнениям Кодацци. Легко доказать, что это влечет взаимно однозначное соответствие между $\mathfrak{P}^*$ и $\mathfrak{C}$ такое, что любая биективно соответствующая пара удовлетворяет уравнениям Кодацци (см., напр., [37]; [5], § 2.6).

6.12.1. *Фундаментальная теорема.* Пусть M — связное, односвязное и ориентируемое многообразие. Пусть $\mathfrak{P}^* \times \mathfrak{C}$ — структура Кодацци на M. Тогда существует невырожденное погружение $x : M \to R^{n+1}$ такое, что $\mathfrak{C}$ является индуцируемым конформным классом полуримановых метрик и $\mathfrak{P}^*$ является индуцированным классом конормальных связностей в том и только том случае, когда класс $\mathfrak{P}^*$ является проективно плоским. Погружение x единственно с точностью до аффинной эквивалентности.

6.13. *Операторы типа Лапласа.* Для гиперповерхности x рассмотрим пару $(\nabla^*, h) \in \mathfrak{P}^* \times \mathfrak{C}$ и в терминах этой пары следующим образом определим оператор D^*. Пусть Hess^* обозначает ∇^**-ковариантный гессиан.* Для дифференцируемой функции f положим

$$H^*(f) := \mathrm{Hess}^*(f) + \frac{1}{n-1}\,\mathrm{Ric}^* \cdot f.$$

Оператор $D^* := D(\nabla^*, h) := \mathrm{trace}_h\, H^*$ является оператором второго порядка типа Лапласа. Следующее простое наблюдение представляет интерес с точки зрения калибровочной инвариантности. При проективном преобразовании с функцией перехода q выполняется

$$H^{*\sharp}(q \cdot f) = q \cdot H^*(f).$$

Калибровочное преобразование дает $D^{*\sharp}(q \cdot f) = D^*(f)$.

6.13.1. *Асимптотики уравнения теплопроводности.* В [16] изучались асимптотики для оператора типа D^*; коэффициенты $a_m(D)$, $m \in \mathbb{N}$, в асимптотическом ряде являются локально вычислимыми спектральными инвариантами, зависящими от пары (∇^*, h). Нами была доказана теорема [16], которая в терминологии данной статьи может быть сформулирована следующим образом: *на гиперовалоидах размерности n коэффициенты $a_n(D^*)$ инвариантны при калибровочных преобразованиях.* Аналогичный результат имеет место для компактных гиперповерхностей при подходящих граничных условиях [16].

6.13.2. *Обобщенные сферические гармоники.* Среди первых глобальных результатов в аффинной теории гиперповерхностей, полученных Бляшке, следующие два характеризуют эллипсоиды:

(i) *овалоид, являющийся аффинной сферой, является эллипсоидом,*
(ii) *овалоид постоянной аффинной средней кривизны $H(e) = \mathrm{const}$ является эллипсоидом.*

Одно из доказательств Бляшке [7] использовало идею Гильберта, касающуюся изучения сферических гармоник первого порядка и их дифференциальных уравнений в частных производных в аффинной теории гиперповерхностей. Р. Шнайдер [47] успешно распространил глобальные исследования Бляшке на релятивную геометрию; его результаты тесно связаны с исследованиями А.П. Нордена дифференциальных уравнений в частных производных для релятивных опорных функций (см. п. 2.7.2 и [10], § 4.13). Имеются недавние систематические исследования обобщений сферических гармоник первого и второго порядка от пространств постоянной кривизны до проективно плоских пространств ([48], [49]–[51], а также [5]). Эти исследования служат фундаментом для определенной техники преобразования соответствующих дифференциальных уравнений в частных производных типа уравнений Монжа–Ампера и Кодацци. В контексте калибровочной инвариантности следующий результат может служить примером; он зависит от топологии многообразия M (см. [48]).

Теорема. Пусть многообразие M диффеоморфно S^n и пусть $\mathfrak{P}^*$ — проективно плоский класс риччи-симметрических связностей без кручения.

(i) Для $\nabla^* \in \mathfrak{P}^*$ всякое решение дифференциального уравнения в частных производных второго порядка $H^*(f) = 0$ будем называть *обобщенной сферической гармоникой первого порядка* по отношению к ∇^*. Тогда векторное пространство $\mathfrak{H}^*$ решений этого уравнения имеет размерность $(n+1)$ независимо от выбора $\nabla^* \in \mathfrak{P}^*$.

(ii) Пусть $\mathfrak{P}^* \times \mathfrak{C}$ — структура Кодацци. Тогда f является решением уравнения второго порядка $D(\nabla^*, h)f = 0$ для $(\nabla^*, h) \in \mathfrak{P}^* \times \mathfrak{C}$ в том и только том случае, когда $f \in \mathfrak{H}^*$. Таким образом, размерность пространства решений опять равна $(n+1)$.

7. Калибровочно инвариантные функционалы

Многие из хорошо известных глобальных результатов в аффинной теории гиперповерхностей основываются на вариационных задачах и их уравнениях Эйлера–Лагранжа. Проверим соответствующие функционалы на калибровочную инвариантность. Как и прежде, рассмотрим невырожденные центроаффинные гиперповерхности; таким образом, все релятивные опорные функции являются нигде не обращающимися в нуль.

7.1. *Ареальный функционал для гиперповерхностей Бляшке.* Рассмотрим гиперповерхность Бляшке. Ареальный функционал определяется формулой

$$\mathfrak{A}(e) := \int_D \omega(h(e))$$

для области $D \in M$ с компактным носителем. По лемме 6.5.1 имеем

$$\widetilde{\omega} = \omega(\nabla(h(e))).$$

В соответствии с п. 6.10 класс $\{c \cdot \omega(h(e)) \mid 0 \neq c \in R\}$ является калибровочно-инвариантным. Таким образом, выражение

$$\mathfrak{A}(e) := \int_D \widetilde{\omega}$$

является калибровочно-инвариантным функционалом (с точностью до ненулевой константы). Уравнение Эйлера–Лагранжа имеет вид $nH(e) := \operatorname{trace} S(e) = 0$, это уравнение эквивалентно уравнению $\operatorname{trace}(\rho(e)S(e)) = 0$, поскольку $\rho(e)$ нигде не обращается в нуль. В соответствии с п. 6.10(vii) это уравнение Эйлера–Лагранжа может быть выражено в калибровочно-инвариантных терминах.

7.2. *Центроаффинный ареальный функционал.* По аналогии с предыдущим пунктом центроаффинный ареальный функционал имеет вид

$$\mathfrak{A}(c) := \int_D \omega(h(c)) = \int_D \omega(\widetilde{h}).$$

Уравнение Эйлера–Лагранжа получается при обращении в нуль следа центроаффинного оператора Чебышева [28]:

$$\operatorname{trace} \widetilde{\mathfrak{T}} = \operatorname{trace} \mathfrak{T}(c) = 0.$$

Здесь ареальный функционал и уравнение Эйлера–Лагранжа выражены в калибровочно-инвариантных терминах.

7.3. *Функционал Пика.* В размерности $n = 2$ функционал Пика определяется следующим образом ([7], сс. 174, 248):

$$\mathfrak{J}(e) := \int_D J(e) \cdot \omega(h(e)).$$

Можно ли выразить этот функционал в калибровочно-инвариантных терминах? Обсудим две возможности:

(i) $J(e) \cdot \omega(h(e)) = (\rho(e))^{-1} \widetilde{J} \cdot \widetilde{\omega}$,

что представляет собой в соответствии с п. 6.10(vi) калибровочно-инвариантное выражение (с точностью до ненулевой константы);

(ii) $J(e)\omega(e) = (\rho(e))^{-1} \widetilde{J} \cdot (\rho(e))^{\frac{n}{2}} \cdot \omega(h(c)) = (\rho(e))^{\frac{n-2}{2}} \cdot \widetilde{J} \cdot \omega(\widetilde{h})$;

это выражение также является калибровочно-инвариантным (с точностью до ненулевой константы).

Такой результат уже был доказан нами в ([16], § 6.5), где использовались асимптотики уравнения теплопроводности (см. п. 6.13 выше) для доказательства калибровочной инвариантности функционала Пика в размерности два.

В размерности $n = 2$ уравнение Эйлера-Лагранжа для функционала $\mathfrak{J}(e)$ имеет вид $3\Delta(e)H(e) + 4(H(e)^2 - \det(S(e))) = 0$. Очевидно, аффинные сферы являются решениями уравнения Эйлера–Лагранжа. Предыдущие наблюдения в (i) и (ii) наводят на мысль рассмотреть калибровочно-инвариантный функционал

$$\int_D \widetilde{J}\omega(\widetilde{h})$$

и представить уравнение Эйлера-Лагранжа в терминах центроаффинной геометрии. В работе [52] изучался проективный ареальный функционал

$$\int_D J(e)^{\frac{n}{2}} \omega(h(e)),$$

который совпадает с классическим функционалом Пика в размерности $n = 2$.

8. Классификации и результаты о единственности в терминах калибровочной инвариантности

В качестве геометрического теста нашего подхода обсудим в контексте калибровочной инвариантности предположения, появляющиеся в хорошо известных классификациях и результатах о единственности. Покажем, что все результаты, перечисляемые ниже, соответствуют указанному контексту.

8.1. *Глобальная классификация аффинных сфер.* Глобальная классификация полных локально сильно выпуклых аффинных сфер может быть найдена в монографии ([4], гл. 2). В соответствии с п. 6.11 предположения полноты в этой классификации могут быть выражены в калибровочно-инвариантных терминах. В п. 6.8.1 имеется калибровочно-инвариантная характеризация собственных аффинных сфер, в п. 6.10.1 — калибровочно-инвариантная характеризация несобственных аффинных сфер.

8.2. *Аффинные сферы с метрикой Бляшке постоянной кривизны.* Локальная классификация локально сильно выпуклых аффинных сфер с метрикой Бляшке постоянной кривизны может быть найдена в ([4], гл. 2). В случае неопределенных метрик Л. Вранкен получил ответ на предположение Маджида-Райана [25]. В соответствии с леммой 6.5.1 тензор кривизны метрики Бляшке может быть выражен в калибровочно-инвариантных терминах. Характеризацию аффинных сфер в калибровочно-инвариантных терминах см. в п. 8.1.

8.3. *Унимодулярно-аффинные проблемы Бернштейна.* В течение десятилетий оставались открытыми две знаменитых *аффинных гипотезы Бернштейна*, сформулированные Калаби и Черном соответственно: *локально сильно выпуклая аффинная максимальная поверхность, удовлетворяющая соответственно одному из условий полноты п. 6.11.1 или п. 6.11.2, является эллиптическим параболоидом.* Недавно ответы на эти предположения получены в [53], [54]. Оба условия полноты, также как и унимодулярное уравнение Эйлера–Лагранжа для максимальных поверхностей в п. 4.3.1, соответствуют контексту калибровочной инвариантности.

8.4. *Центроаффинные проблемы Бернштейна.* В [29] исследуется проблема Бернштейна для локально сильно выпуклых гиперповерхностей в центроаффинной теории. Согласно п. 7.2 центроаффинное уравнение Эйлера–Лагранжа для центроаффинных экстремальных гиперповерхностей может быть выражено в калибровочно-инвариантных терминах. В соответствии с п. 6.11.1 и п. 6.11.3 это же верно для двух условий полноты, которые предполагаются в исследованиях работы [29]. В отличие от евклидова и унимодулярного случаев, имеются большие семейства полных локально сильно выпуклых центроаффинных экстремальных гиперповерхностей. Авторы работы [29] дают частичные подклассификации, используя предположения, касающиеся внутренней кривизны центроаффинных метрик и нормы центроаффинной формы Чебышева. Согласно пп. 6.3 и 6.8.1(ii) все такие предположения могут быть выражены в калибровочно-инвариантных терминах. В качестве примера приведем типичный результат из [29].

Теорема. Пусть $x : M \to R^3$ — полная некомпактная гиперболическая центроаффинная экстремальная поверхность. Если внутренняя гауссова кривизна $\varkappa$ центроаффинной метрики и длина $|T(c)|$ векторного поля Чебышева удовлетворяют соотношениям

(i) $\varkappa \geq 0$,

(ii) $|T(c)| < \infty$,

то x центроаффинно эквивалентна одной из следующих поверхностей:

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3} = 1, \quad x_i > 0, \quad \alpha_i > 0.$$

8.5. *Структуры Эйнштейна-Вейля и конформно плоские гиперповерхности.* В [55] доказан следующий результат: *гиперовалоид с эквиаффинной метрикой Эйнштейна является гиперэллипсоидом.* Согласно п. 6.5.2 предположения этого утверждения являются калибровочно-инвариантными условиями: *гиперовалоид с аффинной структурой Эйнштейна–Вейля является гиперэллипсоидом.* Недавно авторы работы [56] исследовали более общую проблему и доказали следующее утверждение: *гиперовалоид с конформно плоским классом метрик и метрикой Бляшке постоянной скалярной кривизны является гиперэллипсоидом.* Из п. 6.10(iii) следует, что предположение о постоянстве скалярной кривизны является калибровочно-инвариантным условием.

8.6. *Конформная классификация гиперповерхностей Чебышева.* Следствием теоремы п. 4.4.1 является возможность дать конформную классификацию полных центроаффинных гиперповерхностей Чебышева ([33], теорема 4.6). В частности, следствием этой классификации является то, что замкнутые центроаффинные гиперповерхности Чебышева являются конформно плоскими. Снова все формулировки могут быть даны в калибровочно-инвариантных терминах.

8.7. *Конгруэнтность и единственность для гиперовалоидов.* Р. Шнайдер [47] доказал серию утверждений следующего типа. *Рассмотрим два центроаффинных гиперовалоида с одной и той же центроаффинной метрикой и с одной и той же центроаффинной формой Чебышева. Тогда эти гиперовалоиды центроаффинно эквивалентны.* Из пп. 6.3, 6.8 следует, что предположения в теореме Шнайдера могут быть выражены в калибровочно-инвариантных терминах.

8.8. *Аффинная проблема Минковского.* В [26] поставлена задача исследования *аффинной проблемы Минковского.* Эта проблема существования и единственности была решена в [57] (см.

также [5], § 7.7). В калибровочно-инвариантных терминах можем переформулировать этот результат следующим образом. *Пусть M диффеоморфно S^n и пусть $\mathfrak{P}^*$ — проективно плоский класс риччи-симметрических связностей без кручения на M. Тогда существует гипероваловид в аффинном пространстве R^{n+1} такой, что $\mathfrak{P}^*$ индуцируется конормальным линейным расслоением, и этот гипероваловид единственен с точностью до аффинной эквивалентности.*

9. Заключение

Рассмотрим невырожденную центроаффинную гиперповерхность $x : M \to R^{n+1}$ в вещественном аффинном пространстве. Подведем итог нашим исследованиям калибровочных инвариантов относительно группы аффинных преобразований.

9.1. *Нормализации.*

- (i) Обращаемся к § 3 и обсуждению геометрических структур, индуцированных произвольной нормализацией, в частности напоминаем п. 3.2.
- (ii) В классе всех нормализаций релятивные нормализации являются отмеченными. Со структурной точки зрения имеется несколько характеризаций. Исходя из первоначальной нормализации, мы можем построить ассоциированную релятивную нормализацию в пределах класса тангенциальной эквивалентности. Простые наблюдения показывают, что естественно ограничить интерес изучением релятивных нормализаций.
- (iii) Преимуществом при изучении релятивной геометрии является унификация точек зрения и методов доказательства. Но при *аффинной* точке зрения, и, таким образом, исключая евклидову геометрию, изучаются только две соответствующие релятивные нормализации для невырожденных гиперповерхностей: центроаффинная нормализация и нормализация Бляшке. Исходя из произвольной нормализации, можно построить нормализацию Бляшке. Как установлено в пп. 6.9, 6.10, все соответствующие инварианты обеих геометрий являются калибровочными инвариантами (некоторые из них с точностью до ненулевой константы).
- (iv) Недавно обнаружилось интересное влияние со стороны релятивной геометрии на исследование невырожденных гиперповерхностей в пространственных формах. Приведем два примера:
  - (a) любая релятивная нормализация индуцирует сопряженную тройку, аналогичная ситуация возникает на невырожденных гиперповерхностях при рассмотрении сопряженной тройки $(\nabla(\mathrm{I}), \mathrm{II}, \nabla(\mathrm{III}))$, где I, II, III означают три фундаментальные формы подобно случаю евклидовой теории гиперповерхностей, и форма II используется как полуриманова метрика (см., напр., [58], [59]);
  - (b) изучение бесследовых кубических форм в дифференциальной геометрии гиперповерхностей (см., напр., [60]).

9.2. *Структуры.* Такие структуры, как конформная, проективная, структура Вейля и другие имеют важное значение в дифференциальной геометрии. Аффинная теория гиперповерхностей является таким разделом геометрии, где можно изучать указанные структуры в специальных ситуациях и взаимоотношениях. Изучение калибровочной инвариантности в аффинной теории гиперповерхностей привело при абстрактной точке зрения к изучению таких тем, как конформная спектральная геометрия (п. 6.2.2) и асимптотики уравнения теплопроводности некоторых операторов типа Лапласа (п. 6.13).

9.3. *Дифференциальные уравнения в частных производных в аффинной геометрии.* Дифференциальные уравнения в частных производных появляются в аффинной геометрии как методы доказательства и при решении специфических геометрических задач.

9.3.1. *Техника преобразований дифференциальных уравнений в частных производных.* Систематическое изучение структур Кодацци привело к появлению новой техники преобразований дифференциальных уравнений в частных производных типа Кодацци и Монжа–Ампера;

в нашем контексте такие преобразования эквивалентны калибровочным преобразованиям. В качестве примеров приведем сформулированную Калаби аффинную проблему Минковского в пп. 8.8 и 6.13.2, касающуюся сферических гармоник.

9.3.2. *Вариационные задачи.* Изучение многих глобальных проблем в аффинной дифференциальной геометрии связано с дифференциальными уравнениями в частных производных высшего порядка; известными примерами являются уравнения Эйлера-Лагранжа, перечисленные в пп. 7.1, 7.2. Как уже указано в пп. 8.3–8.4, все такие проблемы могут быть сформулированы в контексте калибровочной инвариантности.

Данное заключение показывает важность калибровочной инвариантности в аффинной теории гиперповерхностей. Таким образом, при изучении новых структур и инвариантов калибровочная инвариантность может использоваться как тест геометрической значимости этих инвариантов. Обращаясь к истории развития аффинной теории гиперповерхностей, можно утверждать, что существенный вклад в эту теорию внес А.П. Норден, проложивший путь для развития и нашего подхода.

Литература

1. Salkowski E. *Affine Differentialgeometrie.* – Berlin: Walter de Gruyter, 1934.
2. Schirokow P.A., Schirokow A.P. *Affine Differentialgeometrie.* – Leipzig: Teubner Verlag, 1962.
3. Nomizu K., Sasaki T. *Affine differential geometry.* – Cambridge Univ. Press, 1993.
4. Li A.M., Simon U., Zhao G. *Global affine differential geometry of hypersurfaces.* – Berlin–New York: De Gruyter, 1993.
5. Simon U. *Affine differential geometry* // In: Handbook of Differential Geometry, V. I, Elsevier Science, 2000. – P. 905–961.
6. Blaschke W. *Gesammelte Werke* 4, *Affine Differentialgeometrie, Differentialgeometrie der Kreis- und Kugelgruppen* (eds.: W. Burau et al.), Thales Verlag Essen, 1985.
7. Blaschke W. *Vorlesungen über Differentialgeometrie* II. *Affine Differentialgeometrie.* – Berlin: Springer, 1923.
8. Dillen F., Nomizu K., Vrancken L. *Conjugate connections and Radon's theorem in affine differential geometry* // Monatsh. Math. – 1990. – V. 109. – P. 221–235.
9. Flanders H. *Local theory of affine hypersurfaces* // J. Analyse Math. – 1965. – V. 15. – P. 353–387.
10. Simon U., Schwenk-Schellschmidt A., Viesel H. *Introduction to the affine differential geometry of hypersurfaces.* – Lecture Notes, Science University Tokyo, 1991, ISBN 3798315299.
11. Ivanov St. *On dual-projectively flat affine connections* // J. Geom. – 1995. – V. 53. – P. 89–99.
12. Opozda B. *Some extensions of Radon's theorem* // Lect. Notes Math., Springer. – 1991. – V. 1481. – P. 185–191.
13. Wiehe M. *Deformations in affine hypersurface theory.* – Dissertation FB Mathematik TU Berlin, Shaker Aachen, 1999.
14. Binder Th., Wiehe M. *Invariance groups of relative normals.* – Preprint TU Berlin, Inst. Math., 2004.
15. Simon U. *Connections and conformal structure in affine differential geometry* // Differential geometry and its applications, Proc. Conf. Diff. Geometry, 1986, Brno, Czechoslovakia. – 1987. – P. 315–327.
16. Bokan N., Gilkey P., Simon U. *Applications of spectral geometry to affine and projective geometry* // Beiträge Algebra und Geometrie. – 1994. – Bd. 35. – S. 283–314.
17. Bokan N., Gilkey P., Simon U. *Geometry of differential operators on Weyl manifolds* // Phil. Trans. Proc. Royal Soc. London, Serie A. – 1997. – V. 453. – P. 2527–2536.
18. Bokan N., Gilkey P., Simon U. *Spectral invariants of affine hypersurfaces* // Publications de l' Institut Mathématique Nouvelle Série. – 1998. – V. 64. – P. 133–145.
19. Blazic N., Gilkey P., Nikcevic S., Simon U. *The spectral geometry of the Weyl conformal curvature tensor.* – http://arXiv.org/abs/math.DG/0310226, 2003.

20. Eisenhart L.P. *Non-Riemannian geometry.* – AMS Colloquium Publications, 1927.
21. Nomizu K., Simon U. *Notes on conjugate connections.* – Geometry and Topology of Submanifolds IV (eds.: F. Dillen et al.), World Scientific Singapore, 1992. – P. 152–172.
22. Tabachnikov S. *Remarks on the geometry of exact transverse line field.* – In: Differential topology, Infinite-dimensional Lie algebras and applications (eds. A. Astashkevich et al.), Providence, RI, AMS Transl., Ser. 2. – 1999. – 194(44). – P. 247–260.
23. Laugwitz D. *Differentialgeometrie in Vektorräumen unter besonderer Berücksichtigung der unendlichdimensionalen Räume.* – Bibliographisches Institut, Mannheim, 1965.
24. Simon U. *Zur Relativgeometrie*: *Symmetrische Zusammenhänge auf Hyperflächen* // Math. Z. – 1968. – Bd. 101. – S. 26–46.
25. Vrancken L. *The Magid–Ryan conjecture for equiaffine hyperspheres with constant sectional curvature* // J. Differential Geometry. – 2000. – V. 54. – P. 99–138.
26. Calabi E. *Hypersurfaces with maximal affinely invariant area* // Amer. J. Math. – 1982. – V. 104. P. 91–126.
27. Verstraelen L., Vrancken L. *Affine variation formulas and affine minimal surface* // Mich. Math. J. – 1989. – V. 36. – P. 77–93.
28. Wang C.P. *Centroaffine minimal hypersurfaces in* R^{n+1} // Geometriae Dedicata. – 1994. – V. 51. – P. 63–74.
29. Li A.M., Li H., Simon U. *Centroaffine Bernstein problems* // Differential Geom. and Appl. – 2004. – V. 20. – P. 331–356.
30. Liu H.L. *Classification of surfaces in* R^3 *which are centroaffine-minimal and equiaffine-minimal* // Bull. Belg. Math. Soc. – Simon Stevin. – 1996. – V. 3. – P. 577–583.
31. Liu H.L., Wang C.P. *The centroaffine Tchebychev operator* // Results Mathematics. – 1995. – V. 27. – P. 77–92.
32. Liu H.L., Wang C.P. *Relative Tchebychev surfaces in* R^3 // Kyushu J. Math. – 1996. – V. 50. – P. 533–540.
33. Liu H.L., Simon U., Wang C.P. *Conformal structure in affine geometry*: *complete Tchebychev hypersurfaces* // Abh. Math. Semin. Univ. Hamb. – 1996. – V. 66. – P. 249–262.
34. Leichtweiss K. *On the infinitesimal affine rigidity of ellipsoids in the* n*-space* // Arch. Math. – 1999. – V. 72. – P. 315–320.
35. Scharlach Ch. *Affin-konforme Geometrie regulärer Hyperflächen.* – Diploma Thesis, FB Mathematik, TU Berlin, 1989.
36. Folland G.B. *Weyl manifolds* // J. Differerential Geometry. – 1970. – V. 4. – P. 145–153.
37. Simon U. *Codazzi transformations.* – Geometry and Topology of Submanifolds VII, (eds.: F. Dillen et al.), World Scientific Singapore, 1995. – P. 248–252.
38. Simon U. *Transformation techniques for partial differential equations on projectively flat manifolds* // Results Mathematics. – 1995. – V. 27. – P. 160–187.
39. Matsuzoe H. *On realization of conformally-projectively flat statistical manifolds and the divergences* // Hokkaido Math. J. – 1998. – V. 27. – P. 409–421.
40. Steglich Ch. *Invariants of conformal and projective structures* // Results Mathematics. – 1995. – V. 27. – P. 188–190.
41. Kurose T. *Conformal-projective geometry of statistical manifolds* // Interdiscip. Inform. Sci. – 2002. – V. 8. – P. 89–100.
42. Peikert M. *Examples of Weyl geometries in affine differential geometry.* – Geometry and Topology of Submanifolds IX (eds.: F. Defever et al.) World Scientific Singapore, 1999. – P. 208–220.
43. Nomizu K., Pinkall U. *Cubic form theorem for affine immersions* // Results Mathematics. – 1988. – V. 13. – P. 338–362.
44. Li A.M., Liu H.L., Schwenk-Schellschmidt A., Simon U., Wang C.P. *Cubic form methods and relative Tchebychev hypersurfaces* // Geometriae Dedicata. – 1997. – V. 66. – P. 203-221.
45. Li A.M., Simon U., Zhao G. *Hypersurfaces with prescribed affine Gauss–Kronecker curvature* // Geometriae Dedicata. – 2000. – V. 81. – P. 141–166.

46. O'Neill B. *Semi-Riemannian geometry.* – Academic Press, 1983.
47. Schneider R. *Zur affinen Differentialgeometrie im Grossen*, I // Math. Z. – 1967. – Bd. 101. – S. 375–406.
48. Gardner R.B., Kriele M., Simon U. *Generalized spherical functions on projectively flat manifolds* // Results in Mathematics. – 1995. – V. 27. – P. 41–50.
49. Leder J. *Generation of Codazzi tensors by functions.* – Dissertation FB Mathematik TU Berlin, 1999.
50. Leder J. *Cubic forms generated by functions on projectively flat spaces.* – Geometry and Topology of Submanifolds IX (eds.: F. Defever et al.), World Scientific Singapore, 1999. – P. 160–173.
51. Leder J., Schwenk-Schellschmidt A., Simon U., Wiehe M. *Generating higher order Codazzi tensors by functions.* – Geometry and Topology of Submanifolds IX (eds.: F. Defever et al.), World Scientific Singapore, 1999. – P. 174–191.
52. Sasaki T. *On a projectively minimal hypersurface in the unimodular affine space* // Geometriae Dedicata. – 1987. – V. 23. – P. 237–251.
53. Trudinger N., Wang X.J. *The Bernstein problem for affine maximal hypersurfaces* // Invent. Math. – 2000. – V. 140. – P. 399–422.
54. Li A.M., Jia F. *The Calabi conjecture on affine maximal surfaces* // Results Mathematics. – 2001. – V. 40. – P. 265–272.
55. Kozlowski M., Simon U. *Hyperflächen mit äquiaffiner Einsteinmetrik* // Mathematica, Festschrift E. Mohr zum 75. Geburtstag, TU Berlin. – 1985. – S. 179–190.
56. Hu Z., Zhao G. *Some remarks on the Kozlowski–Simon conjecture for affine ovaloids.* – Preprint Zhengzhou Univ, 2004.
57. Pinkall U., Schwenk-Schellschmidt A., Simon U. *Geometric methods for solving Codazzi and Monge–Ampère equations* // Math. Ann. – 1994. – V. 298. – P. 89–100.
58. Lusala T. *Non-degenerate hypersurface immersions in spheres.* – Dissertation TU Berlin, Shaker Verlag Aachen, 2001.
59. Lusala T. *Cubic form geometry for surfaces in* $S^3(1)$ // Contributions Algebra Geometry. – 2002. – V. 43. – P. 275–296.
60. Dillen F., Verbouwe G., Vrancken L. *Cubic form geometry for immersions in centro-affine and graph hypersurfaces* // Results Mathematics. – 2003. – V. 43. – P. 88–95.
61. Calabi E. *Géométrie différentielle affine des hypersurfaces* // Lect. Notes Math. – Springer, 1981. – V. 901. – P. 189–204.
62. Simon U., Wang C.P. *Local theory of affine* 2*-spheres* // Proceedings of Symposia in Pure Mathematics. – 1993. – V. 54. – P. 585–598.

Технический университет
(*г. Берлин, Германия*)

Поступила
29.06.2004