ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1997 МАТЕМАТИКА № 11 (426)

УДК 512.544

Ю.Б. ЕРМОЛАЕВ

УНИВЕРСАЛЬНОЕ КАРТАНОВСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ

В статье изучается универсальная градуированная алгебра Ли И.Л. Кантора [2], которую мы обозначаем через R и рассматриваем как полное картановское продолжение свободной алгебры Ли $L = L(X)$, порожденной пространством X, $\dim X = r$. Построен гомоморфизм алгебры кустов (см. [5]) на положительную часть градуировки R, что дает возможность реализовать произвольную градуированную транзитивную алгебру Ли как фактор-алгебру кустов. Приведена без доказательства классификация алгебр Ли $L(r;q) = L/L^{q+1}$,которые имеют нетривиальное картановское продолжение. Основное поле k произвольно.

1. Операция "$*$". Пусть X — r-мерное линейное пространство над полем k. На тензорной алгебре $T = T(X)$ определим билинейную операцию перемешивания "$*$" (см. [1]) формулой

$$x_1 \cdots x_m * y_1 \cdots y_n = \sum_{\sigma \in S_{mn}} \sigma(x_1, \dots, x_m; y_1, \dots, y_n),$$

где $x_\alpha, y_\alpha \in X, S_{mn}$ обозначает множество всех взаимных проникновений двух упорядоченных наборов (в данном случае $x_1, \dots, x_m$ и $y_1, \dots, y_n$), т. е. множество всех таких подстановок $\sigma \in S_{i+j}$ степени $m+n$, действующих на объединении наборов $\{x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n\}$, которые сохраняют порядок в каждом отдельном наборе (очевидно, что $\operatorname{card} S_{mn} = \binom{m+n}{m}$), а $\sigma(x_1, \dots, x_m; y_1, \dots, y_n)$ обозначает тензорное произведение указанных элементов в порядке, определенном данным $\sigma \in S_{mn}$. Единица алгебры T играет роль единицы также и для операции "$*$".

Операция "$*$" является коммутативной, ассоциативной и связана с тензорным умножением равенством

$$x_1 \cdots x_m * y_1 \cdots y_n = x_1(x_2 \cdots x_m * y_1 \cdots y_n) + y_1(x_1 \cdots x_m * y_2 \cdots y_n). \tag{1}$$

Алгебра T относительно операции $*$ допускает разделенные степени и изоморфна $O(P)$, где P — бесконечномерное подпространство, в частности, подпространство $S(X)$ симметрических тензоров в T есть подалгебра относительно $*$, изоморфная $O(X)$. В данной статье это замечание не используется и приведено для того, чтобы отметить определенную близость алгебры R с общей алгеброй картановского типа.

2. Операция "$\circ$". Пусть $F = F(X) = T^0(X) \otimes X^*$, где T^0 — максимальный идеал в T, т. е. $T^0 = \bigoplus\limits_{i=1}^{\infty} T_i, T_i$ — i-я тензорная степень X. Операция "$\circ$" определяется на F формулой $(k, l \geq 1)$

$$x_1 \cdots x_k \lambda \circ y_1 \cdots y_l \mu = \sum_{i=1}^{l} \lambda(y_i)(x_1 \cdots x_{k-1} * y_1 \cdots y_{i-1}) x_k y_{i+1} \cdots y_l \mu, \tag{2}$$

где $x_\alpha, y_\alpha \in X$, $\lambda, \mu \in X^*$. Нетрудно видеть, что (2) позволяет ввести на F градуировку $F = \bigoplus\limits_{i=0}^{\infty} R_i$, где $R_i = T_{i+1}(X) \otimes X^*$. Определим также действие элементов f из F на X^*, полагая

$$\lambda \circ x_1 \cdots x_m \mu = \lambda(x_1) x_2 \cdots x_m \mu \quad \text{и} \quad f \circ \lambda = 0, \tag{3}$$

где $x_i \in X$, $\lambda, \mu \in X^*$ и $f \in F$. Кроме того, естественным образом можно рассматривать F как левый T-модуль. В силу (1) имеет место формула

$$x_1 \cdots x_k \lambda \circ y_1 \cdots y_l \mu = x_1(x_2 \cdots x_k \lambda \circ y_1 \cdots y_l \mu) + y_1(x_1 \cdots x_k \lambda \circ y_2 \cdots y_l \mu). \tag{4}$$

Нетрудно убедиться в справедливости следующих двух лемм.

Лемма 1. *Пусть $(f_1, \ldots, f_n)$ — некоторое "$\circ$"-слово с буквами f_i, которые представляются в виде $f_i = x_i f_i'$,с любой, имеющей смысл, расстановкой скобок. Тогда*

$$(f_1, \ldots, f_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i (f_1, \ldots, f_i', \ldots, f_n), \tag{5}$$

где каждое $(f_1, \ldots, f_i', \ldots, f_n)$, есть "$\circ$"-слово с буквами $f_1, \ldots, f_i', \ldots, f_n$ и с той же расстановкой скобок, что и в $(f_1, \ldots, f_n)$.

Лемма 2. *Для произвольных $\lambda \in X^*$, $f, g \in F$ имеет место*

$$\lambda \circ (f \circ g) = (\lambda \circ f) \circ g + f \circ (\lambda \circ g). \tag{6}$$

Будем обозначать через $A(f, g, h) = f \circ (g \circ h) - (f \circ g) \circ h$ ассоциатор относительно "$\circ$".

Лемма 3. *Для любых f, g, h из F имеет место тождество*

$$A(f, g, h) - A(g, f, h) = 0. \tag{7}$$

Доказательство. Докажем (7) для однородных элементов $f \in R_i$, $g \in R_j$, $h \in R_k$ индукцией по $m = i + j + k$. Сначала заметим, что если степень одного из элементов f, g, h равна -1 для $R_{-1} = X^*$,то (7) справедливо. Если $k = -1$ $(i, j \geq 0)$, т.е. $h \in X^*$, то (7) следует из второго равенства (3). Если $j = -1$ $(i, k \geq 0)$, то (7) совпадает с (6). Случай $i = -1$ не отличается от $j = -1$, т.к. (7) кососимметрично относительно f и g. Кроме того, как следует непосредственно из (2), $A(f, g, h) = 0$ для любых f, g из F, если $h \in R_0$. Поэтому (7) справедливо при $i = j = k = 0$. Это дает базис индукции. Рассмотрим теперь $m > 0$. Достаточно взять элементы вида $f = x f_1$, $g = y g_1$, $h = z h_1$, где $x, y, z \in X$, а $f_1 \in R_{i-1}$, $g_1 \in R_{j-1}$, $h_1 \in R_{k-1}$, $i, j, k \geq 1$. В силу леммы 1 имеем $A(f, g, h) - A(g, f, h) = x[A(f_1, g, h) - A(g, f_1, h)] + y[A(f, g_1, h) - A(g_1, f, h)] + z[A(f, g, h_1) - A(g, f, h_1)] = 0$ по предположению индукции. $\square$

Следствие 1. Алгебра F является лиевой относительно операции

$$[f, g] = f \circ g - g \circ f (f, g \in F). \tag{8}$$

3. Картановское продолжение. Напомним понятие картановского продолжения. Пусть $G = \overset{\infty}{\underset{i=-q}{\oplus}} G_i$ — градуированная транзитивная (т.е. $[x, G_i] \neq 0$ $\forall x \neq 0$, $x \in G_{-1}$ $\forall i \geq 0$) алгебра Ли. Максимальная градуированная транзитивная алгебра Ли $R = \overset{\infty}{\underset{i=-q}{\oplus}} R_i$ такая, что существует однородный гомоморфизм алгебр Ли $\rho : G \to R$ такой, что ограничение $\rho : G_i \to R_i$ есть линейный изоморфизм, когда $i \leq m$, и мономорфизм, когда $i > m$, называется полным картановским продолжением алгебры G (после степени $m = -1, 0$). При этом для алгебры G и ее подалгебры $E = \overset{m}{\underset{i=-q}{\oplus}} G_i$ картановское продолжение, очевидно, одно и то же. Для алгебры E картановское продолжение строится индуктивно следующим образом: $R_i = G_i$, когда $i \leq m$, и R_i есть множество всех однородных степени i дифференциальных операторов из E в $R^{(i-1)} = \overset{i-1}{\underset{j=-q}{\oplus}} R_j$, когда $i > m$. Лиева операция между положительной и отрицательной частями определяется дифференциальным действием R_i на E $(i \geq 0)$ (справа), а в положительной части R определяется также индуктивно (по $i + j$) формулой

$$x[f, g] = [xf, g] + [f, xg], \quad x \in E, \quad f \in R_i, \quad g \in R_j. \tag{9}$$

Мы будем рассматривать продолжения только после степени $m = -1$.

Теорема 1. *Пусть $L = L(X^*) = \overset{\infty}{\underset{i=1}{\oplus}} L_i$ — свободная алгебра Ли, порожденная пространством X^*, с обычной градуировкой по длине слов. Определим действие элемента f из F на L, как дифференциального оператора $L \to L \oplus F$, продолжающего (3). Тогда $R = \overset{\infty}{\underset{i=-\infty}{\oplus}} R_i$, где $\overset{-1}{\underset{i=-\infty}{\oplus}} R_i = L$ ($R_i = L_{-i}$) и $\overset{\infty}{\underset{i=0}{\oplus}} R_i = F$, как алгебра Ли (с операцией (8) в F) есть полное картановское продолжение алгебры L и изоморфна универсальной градуированной алгебре Кантора* [2].

Доказательство. Пусть $\tilde{R} = \overset{\infty}{\underset{i=-\infty}{\oplus}} \tilde{R}_i$ — полное картановское продолжение алгебры L, $\tilde{R}_i = L_{-i}$ для $i < 0$. Поскольку L — свободная алгебра Ли, то каждый однородный дифференциальный оператор L в $\tilde{R}^{(i-1)}$, $i = 1, 2, \dots$, однозначно определяется своим действием на $R_{-1} = X^*$, т. е. линейным оператором $X^* \to \tilde{R}_{i-1}$. Так как $\mathrm{Hom}(X^*, R_{i-1}) \cong X \otimes R_{i-1}$, то отсюда следует линейный изоморфизм $\tilde{R}_i \cong R_i$, а значит, $\tilde{R} \cong R$.

Действие элемента $f \in R_i \cong Hom(X^*, R_{i-1}) \cong X \otimes R_{i-1}$ на X^* совпадает с правым "$\circ$"-умножением (см. (3)). В силу (6) имеем $\lambda \circ [f, g] = [\lambda \circ f, g] + [f, \lambda \circ g]$. Это совпадает с определяющей лиеву операцию на $\tilde{R}$ формулой (9). Поэтому линейный изоморфизм $\tilde{R} \cong R$ является изоморфизмом алгебр.

Изоморфность алгебры R с универсальной градуированной алгеброй Кантора нетрудно установить, сопоставляя размерности однородных компонент ($\dim R_i = r^{i+2}$ при $i \geq 0$) и соответствующие структурные формулы. Можно также воспользоваться теоремой 2 [2], или, наконец, алгебру Кантора, как однородное продолжение L, можно вложить в R в силу максимальности последней. $\square$

Универсальную градуированную алгебру R можно рассматривать и как универсальное картановское продолжение в смысле следующей леммы.

Лемма 4. *Пусть $E = \overset{-1}{\underset{i=-q}{\oplus}} G_i$ — градуированная алгебра Ли такая, что $G_{i-1} = [G_i, G_{-1}]$, $i = -1, -2, \dots$, и $G_{-1} \cong X^*$, пусть $\alpha : L(X^*) \to E$ — гомоморфизм алгебр, продолжающий этот линейный изоморфизм и $I = \operatorname{Ker} \alpha$; рассматриваем I как подалгебру в R. Если Q — нормализатор I в R, то Q/I есть полное картановское продолжение алгебры E.*

Доказательство. Если $G = \overset{\infty}{\underset{i=-q}{\oplus}} G_i$ — транзитивная градуированная алгебра Ли, у которой отрицательная часть $E = E(G)$ удовлетворяет условиям леммы,то существуют два однородных гомоморфизма алгебр Ли: эпиморфизм $\alpha : L(X^*) \to E$ и мономорфизм $\beta : F(G) = \overset{\infty}{\underset{i=0}{\oplus}} G_i \to F(R)$, где α продолжает соответствие $G_{-1} \cong X^*$, а β — естественное вложение, поскольку каждый элемент из G_i ($i \geq 0$) определяет оператор из $\mathrm{Hom}(X^*, G_{i-1})$ путем правого умножения. Если $I = \operatorname{Ker} \alpha$, то $\operatorname{Im} \beta$ лежит в нормализаторе I в R. Действительно, каждый элемент $F(R)$ можно рассматривать как дифференциальный оператор на $E(R)$ и для того, чтобы он был определен на факторе $E(R)/I$, необходимо, чтобы он переводил I в себя. Отсюда следует утверждение леммы ввиду максимальности картановского продолжения. $\square$

Возможна также обратная постановка вопроса (см. аналогичный подход в [2]). Пусть I — произвольный однородный идеал в $L(X^*)$ и Q — его нормализатор в R, тогда Q/I есть полное картановское продолжение алгебры L/I. Спрашивается, можно ли описать однородные идеалы в L (хотя бы с разумными дополнительными условиями), которым соответствует нетривиальное полное картановское продолжение с $Q \cap R_1 \neq 0$?

4. Пример. Приведем без доказательства описание полных картановских продолжений алгебр $L(r;q) = \bigoplus_{i=-q}^{-1} L_{-i}$, где $L = \bigoplus_{i=1}^{\infty} L_i$ — свободная алгебра Ли над полем k, порожденная пространством X, $r = \dim X$, $L^{q+1} = \bigoplus_{i=q+1}^{\infty} L_i$. Сохраним обозначения L, L_i и R_i за алгеброй $L(r;q)$, ее компонентами и компонентами ее картановского продолжения соответственно.

Теорема 2. *Пусть $L = L(r;q)$ и p — характеристика основного поля k; $R(L) = \bigoplus_{i=-q}^{\infty} R_i(L)$ — полное картановское продолжение. Во всех следующих случаях, когда*

1^0. *$r \geq 3$, $q \geq 3$, p произвольно,*

2^0. *$r = 2$, $q \geq 5$, p произвольно,*

3^0. *$r = 2$, $q = 4$, $p \neq 5$,*

имеем $R_1(L) = 0$ (а значит, и $R_i = 0$ при $i \geq 1$). В остальных случаях $R_1(L) \neq 0$.

Коротко остановимся на случаях, когда $R_1(L) \neq 0$. Частично они рассмотрены в [2]. Подчеркнем, что мы рассматриваем только полные продолжения.

1) При $q = 1$ и произвольных r и p $R(L) = \bigoplus_{i=-1}^{\infty} R_i^W \cong W_r^{\infty}$ (бесконечномерная общая алгебра картановского типа, однородный изоморфизм).

2) При $q = 2$, $r \geq 3$, произвольном p, но при $r = 3$, $p \neq 3$, $R_3(L) = 0$ и $R(L) = R_{-2} \oplus R_{-1} \oplus R_0 \oplus R_1 \oplus R_2$; если $p \neq 2$, то это простая классическая алгебра Ли типа B_r; если $p = 2$, то $\dim R_2 = \binom{r+1}{2}$ (вместо $\binom{r}{2}$ при $p \neq 2$).

3) При $q = 2$, $r = 3$ и $p = 3$ картановское продолжение $R(L)$ бесконечно. Эта алгебра изучена среди других с $p = 3$ С.М. Скрябиным в [4].

4) При $q = 2$, $r = 2$ и произвольном p имеем $R(L) = \bigoplus_{i=-2}^{\infty} R_i^K \cong K_1^{\infty}$ (контактная бесконечномерная алгебра Ли картановского типа).

5) При $q = 3$, $r = 2$ и $p > 5$ имеем $R(L) = R_{-3} \oplus \cdots \oplus R_3$ (размерности 2, 1, 2, 4, 2, 1, 2); это простая алгебра Ли типа G_2. Если $p = 5$, то $R(L)$ — бесконечномерная алгебра Ли Меликяна с градуировкой, с которой она рассмотрена в работе М.И. Кузнецова [3]. Если $p = 3$, то имеем бесконечномерную алгебру Ли с периодической градуировкой периода 2. Наконец, если $p = 2$, то $R(L)$ бесконечномерна.

6) При $q = 4$, $r = 2$ и $p = 5$ имеем $R_1 \neq 0$, но $R_2 = 0, R(L) = R_{-4} \oplus \cdots \oplus R_1$ (размерности: 3, 2, 1, 2, 4, 2) с $R_{-4} \oplus R_{-3} \oplus R_{-2}$ в качестве радикала.

5. Алгебра кустов. Приведем необходимые сведения из [5]. Пусть Γ — некоторое множество, кустом (с данным Γ) мы называем класс изоморфности корневых деревьев u вместе с отображением $\alpha : V(u) \to \Gamma$, где $V(u)$ — множество вершин u. Имеются в виду изоморфизмы графов-корневых деревьев, перестановочных с α. Ниже часто будем под кустом понимать просто представителя класса. Заметим еще, что корневые деревья предполагаем однозначно ориентированными так, что число исходящих дуг $\mathrm{out}(a) \leq 1$ для всякой вершины a, и только для корня $\mathrm{out}(a_0) = 0$. Пусть $K = K(\Gamma)$ — линейное пространство, порожденное множеством всех кустов с данным Γ над полем k. Пусть u и v — два куста, через $u(b)v$ обозначим куст, который получается соединением корня a_0 куста u с вершиной b куста v дугой (a_0, b); определим на K билинейную операцию умножения

$$u \circ v = \sum_b u(b)v,$$

где суммирование проведено по всему множеству $V(v)$.

В [5] доказано, что "$\circ$"-алгебра K обладает тождеством

$$A(u,v,w) - A(v,u,w) = 0 \tag{10}$$

для любых $u, v, w \in K$, где A — ассоциатор, порождается кустами порядка 1 (порядок — число вершин куста, которые мы отождествляем с соответствующими элементами из Γ с помощью α) и является свободной как алгебра порожденная Γ относительно тождества (10).

Если E — пространство над k и $\Gamma = \{e_i\}$ — базис E, то $K(\Gamma)$ можно рассматривать как алгебру, порожденную E (т. е. абсолютно свободную алгебру, порожденную E), факторизованную по минимальному идеалу, определяющему (10). Будем писать в этом случае $K(\Gamma) = K(E)$.

В силу леммы 3 существует гомоморфизм $\varphi : K(R_1) \to F^0(X) = \overset{\infty}{\underset{i=1}{\oplus}} R_i$. Наша дальнейшая цель — найти $N = \operatorname{Ker}\varphi$, т. е. основные соотношения, которые выполняются в F, кроме тождества (7).

Пусть u — куст с корнем a_0, число $i(u) = \operatorname{into}(a_0)$ (число входящих в a_0 дуг) назовем степенью разветвленности u, а кусты $u_1, \ldots, u_k$ назовем ветвями u при $i(u) = k$, если $u = u_1(a_0)u_2 \cdots (a_0)u_k(a_0)a_0$; таким образом, если все дуги (a_j, a_0) входящие в a_0, удалить, то u распадется на кусты $u_1, \ldots, u_k$ с корнями $a_1, \ldots, a_k$ соответственно и куст первого порядка a_0.

Лемма 5. *Пусть u — куст с $i(u) = 2$, a — его корень, u_1, u_2 — его ветви. Тогда*

$$u = u_1 \circ (u_2 \circ a) - (u_1 \circ u_2) \circ a. \tag{11}$$

Доказательство. По определению операции “$\circ$” в K имеем

$$u_1 \circ (u_2 \circ a) = \sum_c u_1(c)(u_2 \circ a) + u_1(a)u_2(a)a + u,$$
$$(u_1 \circ u_2) \circ a = \sum_c u_1(c)(u_2 \circ a) = \sum_c u_1(c)u_2(a)a,$$

где все суммы берутся по множеству вершин $c \in V(u_2)$ куста u_2. Отсюда следует (11). $\square$

Введем обозначение для следующего выражения:

$$C(a_1, a_2, a_3, a_4) = a_1 \circ (a_2 \circ (a_3 \circ a_4)) + ((a_1 \circ a_2) \circ a_3) \circ a_4 + ((a_1 \circ a_3) \circ a_2) \circ a_4 -$$
$$- a_1 \circ ((a_2 \circ a_3) \circ a_4) - (a_1 \circ a_2) \circ (a_3 \circ a_4) - (a_1 \circ a_3) \circ (a_2 \circ a_4).$$

Так же, как и предыдущая лемма, доказывается

Лемма 6. *Пусть u – куст с $i(u) = 3$, a – его корень и u_i – его ветви, $i = 1, 2, 3$. Тогда $u = C(u_1, u_2, u_3, a)$.* $\square$

Цепь с вершинами $a_1, \ldots, a_n$, среди которых a_n — корень, будем обозначать через $(a_1, \ldots, a_n)$. Здесь $(a_i, a_{i+1}), i = 1, \ldots, n-1$, – все дуги цепи. Заметим, что

$$(a_1, \ldots, a_n) = (\cdots (a_1 \circ a_2) \circ \cdots a_{n-1}) \circ a_n. \tag{12}$$

Пусть u и v — кусты, будем говорить, что v — подкуст u, если v можно получить из u удалением части вершин. Подкуст v назовем корневым, если u и v имеют общий корень. Ниже нам понадобится следующая

Лемма 7. *Пусть N — идеал в алгебре K, v — некоторый куст. Если все кусты u, для которых v — корневой подкуст такой, что $i(u) = i(v)$, лежат в N, то в N лежат все кусты, содержащее подкуст v.*

Доказательство. Индукция по порядку и степени разветвленности кустов. Пусть u — куст, содержащий v своим подкустом. Если порядок u равен порядку v, то $u = v$ и лежит в N по условию. Если одна из ветвей u_1 куста u содержит подкуст v, то, отрезая эту ветвь, получим два куста u_1 и u_2 (корень u останется корнем u_2), первый из которых по предположению индукции лежит в N. Имеем

$$u_1 \circ u_2 = \sum_b u_1(b)u_2 + u, \tag{13}$$

где суммирование берется по всем вершинам b куста u_2 кроме корня. Так как $i(u_1(b)u_2) = i(u_2) = i(u) - 1$, то по предположению второй индукции все кусты под знаком суммы в (13) лежат в N. Следовательно, и $u \in N$.

Если ни одна из ветвей куста u не содержит подкуст v, то v корневой. Если, кроме того, $i(u) = i(v)$, то $u \in N$ по условию. Если же $i(u) > i(v)$, то найдется ветвь u_1, после удаления которой останется куст u_2, содержащий v корневым подкустом и потому лежащий в N по предположению первой индукции . Опять из равенства (13) имеем $u \in N$. □

6. Соотношения в F.

Предложение 1. *Для любых $f_1, f_2, f_3 \in F$ и $f_4 \in R_1$ (или $f_4 \in R_0$) имеет место равенство*

$$C(f_1, f_2, f_3, f_4) = 0. \tag{14}$$

Будем обозначать $B(f, g, h) = A(f, g, h) - A(f, g, h)$.

Лемма 8. *Если в алгебре имеет место $B(f, g, h) = 0$ для любых элементов f, g, h, то выражение $C(f_1, f_2, f_3, f_4)$ симметрично относительно f_1, f_2, f_3.*

Доказательство. Действительно, имеем

$$C(f_1, f_2, f_3, f_4) - C(f_2, f_1, f_3, f_4) =$$
$$= B(f_1, f_2, f_3 \circ f_4) - B(f_1 \circ f_3, f_2, f_4) + B(f_2, f_1, f_3) \circ f_4 - B(f_1, f_2 \circ f_3, f_4) = 0,$$
$$C(f_1, f_2, f_3, f_4) - C(f_1, f_3, f_2, f_4) = f_1 \circ B(f_2, f_3, f_4) = 0.$$

Конечно, утверждение этой леммы есть алгебраическая констатация очевидного свойства кустов — равноправие ветвей (см. лемму 6). □

Доказательство предложения 1. 1) Равенство (14) справедливо для любых $f_1, f_2, f_3 \in F$ и $f_4 = h \in R_0$. Пусть $f_i' = f_i \circ h$, $i = 2, 3$. Так как

$$A(f, g, h) = 0 \quad \text{для} \quad f, g \in F \quad \text{и} \quad h \in R_0, \tag{15}$$

то

$$C(f_1, f_2, f_3, h) = f_1 \circ (f_2 \circ f_3') + (f_1 \circ f_2) \circ f_3' + (f_1 \circ f_3) \circ f_2' -$$
$$- f_1 \circ (f_2 \circ f_3') - (f_1 \circ f_2) \circ f_3' - (f_1 \circ f_3) \circ f_2' = 0$$

в силу (7).

2) Для любых $f_1, f_2 \in F$, $f_3 = \lambda \in X^* = R_{-1}$ и $f_4 \in R_1$ равенство (14) справедливо. Действительно, т. к. $f \circ \lambda = 0$ для $f \in F$, то

$$C(f_1, f_2, \lambda, f_4) = f_1 \circ (f_2 \circ f_4') - (f_1 \circ f_2) \circ f_4' = 0$$

в силу (15), поскольку $f_4' = \lambda \circ f_4 \in R_0$.

3) Если $f_i = h_i \in R_0$, $i = 1, 2, 3$, и $f_4 \in R_1$, то (14) справедливо. В самом деле, пусть $f = C(h_1, h_2, h_3, f_4)$; тогда $\deg f = 1$. Рассмотрим $\lambda \circ f$ для любого $\lambda \in X^*$. Имеем $\lambda \circ f = C(h_1', h_2, h_3, f_4) + C(h_1, h_2', h_3, f_4) + C(h_1, h_2, h_3', f_4) + C(h_1, h_2, h_3, f_4')$, где $h_i' = \lambda \circ h_i$, $i = 1, 2, 3$, и $f_4' = \lambda \circ f_4$ в силу леммы 2. Отсюда $\lambda \circ f = 0$, т. к. $C(h_1', h_2, h_3, f_4) = C(h_1, h_2', h_3, f_4) = C(h_1, h_2, h_3', f_4) = 0$ в силу леммы 8 и п. 1, а $C(h_1, h_2, h_3, f_4') = 0$ в силу п. 1. Поскольку $f \in R_1$ и $\lambda \circ f = 0$ для любого $\lambda \in X^*$, то $f = 0$.

4) Завершение доказательства. Пусть $n_i = \deg f_i$; индукция по $n = n_1 + n_2 + n_3$, $n_i \geq 0$, $i = 1, 2, 3$. Начало индукции дает п. 3. Пусть $n \geq 1$ и $f = C(f_1, f_2, f_3, f_4)$. Для $\lambda \in X^*$ имеем $\lambda \circ f = C(f_1', f_2, f_3, f_4) + C(f_1, f_2', f_3, f_4) + C(f_1, f_2, f_3', f_4) + C(f_1, f_2, f_3, f_4')$, где $f_i' = \lambda \circ f_i$, $i = 1, 2, 3, 4$. Отсюда $\lambda \circ f = 0$, т. к. три первых слагаемых равны нулю либо по индуктивному предположению (когда все $\deg f_i > 0$), либо в силу п. 2 и леммы 8 (если соответствующее $f_i' \in X^*$), а последнее слагаемое равно нулю в силу п. 1. Поэтому, как и в п. 3, $f = 0$. □

Предложение 2. *Пусть* $f = x_1 \cdots x_k\lambda = x_1 u x_k \lambda$, $g = y_1 \cdots y_l \mu = y_1 v y_l \mu$, $h = z_1 z_2 \nu$. *Для* $k + l \geq 1$ $(k, l \geq 0)$ *имеет место формула*

$$A(f, g, h) = \lambda(z_1)\mu(z_2)(x_1 u x_k * y_1 v)y_l\nu + \lambda(z_2)\mu(z_1)(x_1 u * y_1 v y_l)x_k\nu, \tag{16}$$

где $x_i, y_i, z_i \in X$; $\lambda, \mu, \nu \in X^*$.

Доказательство. Индукция по $k + l$. Сначала рассмотрим случай, когда одно из k, l равно 0, а другое ≥ 1. При $k = 0$, $l \geq 1$ в силу леммы 2 и (3) имеем $A(\lambda, g, h) = \lambda \circ (g \circ h) - (\lambda \circ g) \circ h = \lambda(y_1)vy_l \circ h + \lambda(z_1)g \circ z_2\nu - \lambda(y_1)vy_l\mu \circ h = \lambda(z_1)\mu(z_2)y_1vy_l\nu$. Это совпадает с (16) при $k = 0$, $l \geq 1$.

При $k \geq 1$, $l = 0$ аналогично имеем $A(f, \mu, h) = f \circ (\mu \circ h) - (f \circ \mu) \circ h = \mu(z_1)\lambda(z_2)\nu$; это опять совпадает с (16) при $k \geq 1$, $l = 0$. Таким образом, (16), в частности, верно для $k + l = 1$.

Пусть теперь $k + l > 1$ и $k, l \geq 1$. В силу леммы 1 имеем $A(f, g, h) = x_1 A(ux_k\lambda, g, h) + y_1 A(f, vy_l\mu, h) + z_1 A(f, g, z_2\nu)$. Так как $z_2\nu \in R_0$, то $A(f, g, z_2\nu) = 0$. Поэтому, используя предположение индукции, имеем

$$\begin{aligned} A(f, g, h) = x_1[\lambda(z_1)\mu(z_2)(ux_k * y_1v)y_l\nu + \lambda(z_2)\mu(z_1)(u * y_1vy_l)x_k\nu] + \\ +y_1[\lambda(z_1)\mu(z_2)(x_1ux_k * v)y_l\nu + \lambda(z_2)\mu(z_1)(x_1u * vy_l)x_k\nu] = \\ = \lambda(z_1)\mu(z_2)(x_1(ux_k * y_1v) + y_l(x_1ux_k * v))y_l\nu + \\ +\lambda(z_2)\mu(z_1)(x_1(u * y_1vy_l) + y_1(x_1u * vy_l))x_k\nu. \end{aligned}$$

Отсюда ввиду (1) следует (16). □

7. Описание идеала N**. Случай** $r \geq 2$. В этом разделе $K = K(R_1)$ — алгебра кустов, порожденная пространством R_1 алгебры $F^0 = \overset{\infty}{\underset{i=1}{\oplus}} R_i$. Конкретизируем отображение φ. Выберем в X некоторый базис $x_1, \ldots, x_r$ и сопряженный базис $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ в X^*. Тогда множество элементов $\{x_ix_j\lambda_k; i, j, k = 1, \ldots, r\}$ составляет базис R_1 и может быть взято за образующую систему Γ. Однако удобно положить $K = K(\Gamma)$, где $\Gamma = \{(i, j, k);\ i, j, k = 1, \ldots, r\}$. Вершины кустов из K будем обозначать через (i, j, k), дуги — через $(ijk; stl)$ (с началом в (ijk) и концом в (stl)), цепи — через $(i_1j_1k_1; \ldots; i_mj_mk_m)$. Под φ понимаем гомоморфизм ("$\circ$"-алгебр) $\varphi : K \to F$, продолжающий соответствие $(ijk) \mapsto x_ix_j\lambda_k$, $i, j, k = 1, \ldots, r$.

Лемма 9. *При* $r \geq 2$ *каждый базисный элемент* $x_{i_1} \cdots x_{i_m}\lambda_k$ *из* R_{m-1} *может быть представлен в виде произведения*

$$x_{i_1} \cdots x_{i_m}\lambda_k = ((\cdots(x_{i_1}x_{i_2}\lambda_{t_1} \circ x_{t_1}x_{i_3}\lambda_{t_2}) \circ x_{t_2}x_{i_4}\lambda_{t_3}) \circ \cdots) \circ x_{t_{m-2}}x_{i_m}\lambda_k,$$

где t_α — *произвольные из* $\{1, \ldots, r\}$, *но* $t_\alpha \neq i_{\alpha+2}$, $\alpha = 1, \ldots, m - 2$.

Доказательство. По формуле (2) имеем

$$x_{i_1} \cdots x_{i_{m-1}}\lambda_t \circ x_sx_{i_m}\lambda_k = \delta_{st}x_{i_1} \cdots x_{i_{m-1}}x_{i_m}\lambda_k + \delta_{ti_m}\sum_{\alpha=1}^{m-1}(x_{i_1} \cdots x_{i_{m-2}} * x_s)x_{i_{m-1}}\lambda_k. \tag{17}$$

Отсюда $x_{i_1} \cdots x_{i_{m-1}}\lambda_t \circ x_tx_{i_m}\lambda_k = x_{i_1} \cdots x_{i_m}\lambda_k$, если $t \neq i_m$. Это позволяет применить индукцию по m. □

Следствие 2. Имеем $R_m = R_{m-1} \circ R_1, m = 2, 3, \ldots$, и φ есть эпиморфизм.

Следствие 3. Всякая цепь вида

$$(i_1i_2t_1; t_1i_3t_2; \ldots; t_{m-3}i_{m-1}t_{m-2}; t_{m-2}i_mk), \tag{18}$$

где $t_\alpha \in \{1, \ldots, r\}$, но $t_\alpha \neq i_{\alpha+2}$ $(\alpha = 1, \ldots, m - 2)$, отображается гомоморфизмом φ в базисный элемент $x_{i_1} \cdots x_{i_m}\lambda_k$ в R_{m-1} (ввиду (12)).

Цепь вида (18) с условиями следствия 3 будем называть базисной и весь класс базисных цепей, переходящих под действием φ в один элемент $x_{i_1}\cdots x_{i_m}\lambda_k$, будем обозначать через $(i_1, i_2, \ldots, i_m; k)$. Иногда так же будем обозначать и отдельных представителей этого класса, которые отличаются друг от друга набором индексов $t_1, \ldots, t_{m-2}$, с условием $t_\alpha \neq i_{\alpha+2}$. При $r = 2$ класс содержит один элемент.

Следствие 4. Классы базисных цепей $(i_1, i_2, \ldots, i_m; k)$ образуют базис фактор-алгебры K/N.

Лемма 10. *При $r \geq 2$ в K имеем*

$$(ijk; stl) \equiv \delta_{ks}(ijt_1; t_1tl) + \delta_{kt}(sit_2; t_2jl) + \delta_{kt}(ist_3; t_3jl) \pmod N, \tag{19}$$

где все индексы из $\{1, \ldots, r\}$, но $t_1 \neq t$, $t_2 \neq j$, $t_3 \neq j$. В частности,

$$(ijk; stl) \equiv 0 \pmod N, \text{ если } k \neq s, t.$$

Доказательство. По определению операции в $K : (ijk; stl) = (ijk)\circ(stl)$.Поэтому $\varphi(ijk; stl) = x_ix_j\lambda_k \circ x_sx_t\lambda_l = \delta_{ks}x_ix_jx_t\lambda_l + \delta_{kt}(x_sx_ix_j\lambda_l + x_ix_sx_j\lambda_l)$ по (17). В силу леммы 9 отсюда следует (19). □

Лемма 11. *При $r \geq 2$ имеем*

$$(i_1, \ldots, i_m; k) \circ (stl) \equiv \delta_{ks}(i_1, \ldots, i_m, t; l) + \delta_{kt}\sum_{\alpha=1}^{m}(i_1, \ldots, i_{\alpha-1}, s, i_\alpha, \ldots, i_m; l) \pmod N,$$

где $(j_1, \ldots, j_n; k)$ — любая базисная цепь соответствующего класса, (stl) — куст порядка 1.

Доказательство следует непосредственно из (17) в силу леммы 9.

Лемма 12. *Всякий куст с корнем (ijk) сравним с линейной комбинацией базисных цепей, каждая из которых имеет корень вида (stk) по модулю N.*

Доказательство. Каждый куст есть линейная комбинация слов, буквами которых служат вершины этого куста и последняя буква совпадает с корнем. Поэтому достаточно доказать утверждение леммы для слов с последней буквой (ijk). Пусть u — слово в K (с образующими в качестве букв) с последней буквой (ijk) и пусть $\overline{u} = \varphi(u)$; тогда $\overline{u}$ — слово в F (с буквами — базисными элементами R_1), последняя буква которого есть $\varphi(ijk) = x_ix_j\lambda_k$. Формула (2) показывает, что $\overline{u} = (\sum \alpha_{i_1,\ldots,i_m}x_{i_1}\cdots x_{i_m})\lambda_k$, $\alpha_{i_1,\ldots,i_m} \in k$. Поэтому $u \equiv \sum \alpha_{i_1,\ldots,i_m}(i_1, \ldots, i_m; k)$ $\pmod N$. □

Следствие 5. Пусть u — куст в K с $i(u) = 1$, содержащий в качестве коренного подкуста дугу $(ijk; stl)$, где $k \neq s, t$. Тогда $u \in N$.

Доказательство. Условия следствия равносильны тому, что $u = u_1 \circ (stl)$, где u_1 — произвольный куст с корнем (ijk). Лемма 12 сводит доказательство утверждения следствия к случаю, когда u_1 — цепь с корнем $(i'j'k)$. Если же u_1 — цепь, то утверждение следует из леммы 11. □

Пусть P — линейная оболочка над k, порожденная множеством всех классов $(i_1, \ldots, i_m; k)$ базисных цепей в K. Определим линейное отображение $\psi : F \to P$, полагая $\psi(x_{i_1}\cdots x_{i_m}\lambda_k) = (i_1, \ldots, i_m; k)$. Очевидно, что $\varphi\psi = 1$ на F в силу следствия 3.

Теорема 3. *Идеал N порождается следующими множествами элементов*:
1^0. *кусты, содержащие хотя бы одну вершину b с* $\mathrm{into}(b) \geq 3$;
2^0. *кусты, содержащие хотя бы одну дугу $(ijk; stl)$, в которой $k \neq s, t$;*
3^0. *разности базисных цепей одного класса;*
4^0. *линейные комбинации кустов вида*

$$u - \delta_{si}\delta_{tj}\psi((x_{i_1}\cdots x_{i_k} * x_{j_1}\cdots x_{j_{l-1}})x_{j_l}\lambda_m) - \delta_{sj}\delta_{ti}\psi((x_{i_1}\cdots x_{i_{k-1}} * x_{j_1}\cdots x_{j_l})x_{i_k}\lambda_m),$$

где u — куст с $i(u) = 2$, корнем (ijm) и ветвями, которые являются базисными цепями из классов $(i_1, \ldots, i_k; s)$ и $(j_1, \ldots, j_l; t)$;

5^0. *линейные комбинации кустов вида*

$$(i_1, \ldots, i_m; k) \circ (stl) - \delta_{ks}(i_1, \ldots, i_m, t; l) - \delta_{kt} \sum_{\alpha=1}^{m} (i_1, \ldots, i_{\alpha-1}, s, i_\alpha, \ldots, i_m; l).$$

Доказательство. Пусть $\tilde{N}$ — идеал в K, порожденный всеми элементами 1^0–5^0.

1) $\tilde{N} \subseteq N$. Элементы множества 1^0 лежат в N в силу лемм 6, 7 и предложения 1. Элементы 2^0 лежат в N по лемме 7 и следствию 5. Элементы 3^0 — по следствию 3. По предложению 2 имеем

$$f \circ (g \circ h) - (f \circ g) \circ h = \\ = \delta_{si}\delta_{tj}(x_{i_1} \cdots x_{i_k} * x_{j_1} \cdots x_{j_{l-1}})x_{j_l}\lambda_m + \delta_{sj}\delta_{ti}\psi((x_{i_1} \cdots x_{i_{k-1}} * x_{j_1} \cdots x_{j_l})x_{i_k}\lambda_m),$$

где $f = x_{i_1} \cdots x_{i_k}\lambda_s$, $g = x_{j_1} \cdots x_{j_l}\lambda_t$ и $h = x_i x_j \lambda_m$. Если u — куст из 4^0, то по лемме 5 $\varphi(u)$ совпадает с левой частью этого равенства. Поэтому применение φ к линейной комбинации из 4^0 дает 0 по модулю N (т.к. $\varphi\psi = 1$), т.е. множество 4^0 тоже лежит в N. Наконец, 5^0 лежит в N по лемме 11. Таким образом, $\tilde{N} \subseteq N$.

2) Всякий куст u из K сравним с линейной комбинацией базисных цепей по модулю $\tilde{N}$.

Пусть сначала u — цепь с корнем (ijk). Докажем для нее утверждение индукцией по длине. Если u — базисная цепь, то нечего доказывать. В противном случае представим ее в виде $u = v \circ (ijk)$, где v — тоже цепь, но меньшей длины. По предположению индукции v представляется в виде линейной комбинации базисных цепей, что сводит дело к слагаемым этой комбинации. Следовательно, достаточно рассмотреть случай, когда v — базисная цепь. Но в этом случае утверждение следует из того, что в $\tilde{N}$ лежит множество 5^0.

Пусть теперь u — произвольный куст и (ijk) — его корень. Опять применим индукцию по числу вершин. Если $i(u) = 1$, то $u = v \circ (ijk)$. Так как v по предположению индукции выражается линейной комбинацией базисных цепей по модулю $\tilde{N}$, то отсюда следует, что и u имеет такое выражение в силу уже доказанного. Пусть $i(u) = 2$. Тогда

$$u = u_1 \circ (u_2 \circ (ijk)) - (u_1 \circ u_2) \circ (ijk), \tag{20}$$

где (ijk) — корень u, а u_1, u_2 — его ветви (см. лемму 5). Элементы u_1, $u_2 \circ (ijk)$ и $u_1 \circ u_2$ имеют порядки меньшие, чем u, поэтому их можно по индуктивному предположению представить линейной комбинацией базисных цепей по $\tilde{N}$. Следовательно, в силу (20) (и определения операции "$\circ$" в K) u представляется линейной комбинацией кустов, каждый из которых либо цепь (и потому имеет нужное представление по доказанному выше), либо куст, у которого имеется только одна вершина b с $\mathrm{into}(b) = 2$, причем с базисными цепями в качестве ветвей. Если b — не корень (и, значит, соответствующий куст u' имеет $i(u') = 1$), то u' тоже имеет нужное разложение по уже доказанному; если же b — корень, то соответствующий куст удовлетворяет условиям множества 4^0, а потому также может быть представлен нужной комбинацией.

Так как при $i(u) \geq 3$ куст u лежит в 1^0, т.е. $u \equiv 0 \pmod{\tilde{N}}$, то утверждение доказано.

3) $N \subseteq \tilde{N}$. Пусть $u \in N$, т.е. $\varphi(u) = 0$. По доказанному $u \equiv u_0 \pmod{\tilde{N}}$, где u_0 — линейная комбинация базисных цепей. Поэтому достаточно доказать, что если $\varphi(u_0) = 0$, то $u_0 \in \tilde{N}$. Так как φ однородно, то можно считать, что все цепи, входящие в выражение u_0, имеют один и тот же порядок, а т.к. все базисные цепи, входящие в класс $(i_1, \ldots, i_m; k)$, (и только они) переходят в один базисный элемент $x_{i_1} \cdots x_{i_m}\lambda_k$ алгебры F, то можно считать, что все цепи из u_0 принадлежат одному классу. Итак, пусть $u_0 = \sum \alpha_i u_i$, где $\alpha_i \in k$, а все $u_i \in (i_1, \ldots, i_m; k)$. Тогда $\varphi(u_0) = (\sum \alpha_i) x_{i_1} \cdots x_{i_m}\lambda_k = 0$, т.е. $\sum \alpha_i = 0$. Это означает, что $u_0 = \sum \beta_i(u_i - u_{i-1})$ лежит в 3^0 ($\beta_i \in k$), т.е. $u_0 \in \tilde{N}$. $\square$

8. Случай $r = 1$. В этом случае $F = \bigoplus_{i=0}^{\infty} R_i$, где $R_i = \langle f_i = x_1^{i+1}\lambda_1 \rangle$, $X = \langle x_1 \rangle$, $X^* = \langle \lambda_1 \rangle$ $(\lambda_1(x_1) = 1)$, $f_i \circ f_j = \binom{i+j+1}{j} f_{i+j}$.

Пусть K — алгебра кустов с одним образующим элементом a (т. е. алгебра корневых деревьев, у которых все вершины помечены единственным элементом). Если характеристика p основного поля k отлична от нуля, то при $r = 1$ алгебра F не порождается R_1, и потому гомоморфизм, продолжающий соответствие $a \mapsto f_1$, не является эпиморфизмом. Но в K существует идеал, фактор-алгебра по которому изоморфна F (при $p \neq 2$).

Лемма 13. *Для того чтобы подпространство N было двусторонним идеалом в K, необходимо и достаточно, чтобы для всякого $u \in N$ выполнялись условия:*

$$u \circ a \in N, \quad v \circ u \in N,$$

где a — образующий элемент (куст порядка 1), а v — произвольный куст.

Доказательство. Необходимость условия очевидна, левая достаточность тоже. Правая доказывается индукцией по порядку правого множителя: пусть v — некоторое слово в K порядка > 1, тогда $v = v_1 \circ v_2$, где порядки слов v_1 и v_2, естественно, ниже порядка v. В силу основного тождества в K имеем для всякого $u \in N$

$$u \circ v = u \circ (v_1 \circ v_2) = (u \circ v_1) \circ v_2 + v_1 \circ (u \circ v_2) - (v_1 \circ u) \circ v_2 \in N,$$

т. к. $u \circ v_1$, $u \circ v_2$ и $v_1 \circ u$ лежат в N по предположению индукции. □

Введем обозначения: пусть u — куст из K, $n(u)$ — его порядок, $m(u) = \max\{\mathrm{into}(c) | c \in V(u)\}$, $k(u)$ — число вершин b с $\mathrm{into}(b) = 2$, $l(u)$ — число вершин b с $\mathrm{into}(b) = 0$. Если $m(u) \leq 2$, то $l(u) = k(u) + 1$. Через v_i будем обозначать цепь порядка i.

Предложение 3. *Пусть характеристика поля k не равна 2. Обозначим через N подпространство в K $(r = 1)$, порожденное элементами*

1^0. *кустами u с $m(u) \geq 3$,*

2^0. *$v_i - 2^k u$, где u — куст порядка i с $m(u) \leq 2$ и $k = k(u)$.*

Тогда

1) *N есть идеал в K,*

2) *$K/N = \bigoplus_{i=1}^{\infty} k\overline{v}_i$, где $\overline{v}_i$ — класс смежности v_i по N,*

3) *$\overline{v}_i \circ \overline{v}_j = \frac{j+1}{2}\overline{v}_{i+j}$, $i, j = 1, 2, \ldots$.*

Доказательство. Пусть u, v — два куста из K и b — вершина в v. Очевидно, что $m(u(b)v) \geq \max\{m(u), m(v)\}$. Поэтому, если u — куст с $m(u) \geq 3$, то $f \circ u$ и $u \circ f$ принадлежат N для любого $f \in K$. Затем имеем $(v_j - 2^k u) \circ a = v_{j+1} - 2^k u' \in N$, т. к. $u' = u \circ a$ — куст, для которого $n(u') = n(u) + 1 = j + 1$, $m(u') = m(u) \leq 2$ и $k(u') = k(u) = k$ по определению "$\circ$" для K.

Пусть u, v — два куста, для которых $n(v) = i$, $n(u) = j$; $m(v), m(u) \leq 2$ и $k(v) = k_1$, $k(u) = k$. Докажем, что

$$v \circ u \equiv \frac{j+1}{2^{k_1+k+1}} v_{i+j} \pmod{N}. \tag{21}$$

Действительно, для $c \in V(u)$ имеем $k(v(c)u) = k_1 + k$, если $\mathrm{into}(c) = 0$, $k(v(c)u) = k_1 + k + 1$, если $\mathrm{into}(c) = 1$. Поэтому $v(c)u \equiv \frac{1}{2^{k_1+k}} v_{i+j} \pmod{N}$, если $\mathrm{into}(c) = 0$, $v(c)u \equiv \frac{1}{2^{k_1+k+1}} v_{i+j} \pmod{N}$, если $\mathrm{into}(c) = 1$ и $v(c)u \equiv 0 \pmod{N}$, если $\mathrm{into}(c) = 2$. Отсюда $v \circ u = \sum_c v(c)u \equiv \frac{j+1}{2^{k_1+k+1}} v_{i+j}$ $\pmod{N}$, где суммирование по всем $c \in V(u)$, $l = l(u) = k + 1$. В частности, $v \circ v_j \equiv \frac{j+1}{2^{k_1+1}} v_{i+j}$ $\pmod{N}$. Отсюда и (21) имеем $v \circ (v_j - 2^k u) \equiv 0 \pmod{N}$. В силу леммы 13 N — идеал. Первое утверждение доказано. Второе очевидно, а третье следует из (21). □

Литература

1. Ree R. *Lie elements and an algebra associated with shuffeles* // Ann. Math. – 1958. – T. 68. – P. 210–220.
2. Кантор И.Л. *Градуированные алгебры Ли* // Тр. семин. по векторн. и тензорн. анализу. – Вып. XV. Московский университет, 1970. – С. 227–266.
3. Kuznetsov M.I. *The Melikyan algebras as Lie algebras of the type* G_2. Commun. Algebra. – 1991. – T. 19. – № 4. – P. 1281–1312.
4. Скрябин С.М. *Новые серии простых алгебр Ли характеристики* 3 // Матем. сб. – 1992. – Т. 183. – № 8. – С. 3–22.
5. Ермолаев Ю.Б. *Об одной алгебре на множестве графов* // Сиб. матем. журн. – 1994. – Т. 35. – № 4. – С. 793–800.

Казанский государственный университет

Поступила
24.03.1995