Известия вузов. Математика *http://old.kpfu.ru/journals/izv_vuz/*
2015, №4, с. 17–25 *e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru*

А. ЙААКБАРИЕХ, В.Ж. САКБАЕВ

КОРРЕКТНОСТЬ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ СО СДВИГАМИ ВРЕМЕННОГО АРГУМЕНТА

Аннотация. Исследуется задача с начальными условиями на полупрямой для дифференциально-разностного уравнения параболического типа с отклонениями временнóго аргумента. Установлены достаточные условия корректной разрешимости задачи в пространствах Соболева с экспоненциальным весом. В терминах спектра оператора задачи получены необходимые условия корректной разрешимости задачи, достаточные условия отсутствия решения задачи и достаточные условия неединственности решения.

Ключевые слова: дифференциально-разностное уравнение, пространство Соболева с весом, корректная разрешимость.

УДК: 517.98

1. Введение. В данной работе исследуются вопросы постановки и корректной разрешимости задачи с начальными условиями для модельного параболического дифференциально-разностного уравнения вида

$$u_t(t,x) = \mathcal{L}u(t,x) + f(t,x), \quad t > 0, \quad x \in R^d, \tag{1}$$

где

$$\mathcal{L}u(t,x) = \Delta u(t,x) + \sum_{k=1}^{N} \{[a_k(u(t+h_k,x))] + i[(\mathbf{b}_k, \nabla u(t+h_k,x))] + \\ + [c_k \Delta u(t+h_k,x)]\} - \gamma_0 u(t,x), \quad (t,x) \in (0,+\infty) \times R^d. \tag{2}$$

Здесь Δ (оператор Лапласа на R^d) — линейный самосопряженный оператор в пространстве $H = L_2(R^d)$, действующий из области определения $D(\Delta) = W_2^2(R^d) \subset H$ в пространство H; коэффициенты a_k, c_k, h_k, $k = \overline{1,N}$, — вещественные числа, $h = h_1 < h_2 < \cdots < h_N$, причем $h < 0$, но h_N может быть положительным. Коэффициенты $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_N$ представляют собой векторы евклидова пространства R^d. В равенстве (1) f — заданная числовая функция на области $(0,+\infty) \times R^d$, а u — неизвестная числовая функция, заданная на множестве $(h,+\infty) \times R^d$. Ставится задача определить функцию $u:\ (h,+\infty) \times R^d \to R$, которая в области $(0,+\infty) \times R^d$ удовлетворяет уравнению (1) , а на множестве $(h,0] \times R^d$ удовлетворяет начальному условию

$$u|_{(h,0]\times R^d} = \varphi, \tag{3}$$

Поступила 28.10.2013

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-11-00687) в Математическом институте им. В.А. Стеклова РАН.

где $\varphi(t,x)$ — начальная функция, заданная на множестве $(h,0]\times R^d$.

Подчеркнем, что поскольку величина h_N может быть положительна, то будет исследована задача не только с запаздывающим, но и с опережающим аргументом, корректность которой установить более затруднительно.

Корректная разрешимость начально-краевых задач для эволюционных уравнений с запаздыванием временного аргумента и с отклонениями пространственных переменных является актуальной проблемой теории дифференциальных уравнений ([1]–[3]). В работах [4], [5] исследованы корректная разрешимость и свойства решений задачи с начальными данными для параболического уравнения с отклоняющимся аргументом нейтрального типа, а в статье [3] — аналогичные вопросы для гиперболических уравнений с отклоняющимся временным аргументом. В работе [6] для полугрупп, порождаемых дифференциально-разностным уравнением параболического типа, получена аппроксимация с помощью формул Фейнмана.

В данной работе, являющейся продолжением исследований статьи [7], получены достаточные условия корректной разрешимости задачи (1)–(3): указаны условия на весовую функцию шкалы весовых пространств Соболева, при которых задача (1)–(3) имеет единственное решение в весовом пространстве, причем норма решения допускает оценку через норму неоднородного слагаемого уравнения (1) и норму начального условия (3). В работе показано, к каким нарушениям корректности задачи (1)–(3) приводит нарушение условия на вес. В терминах спектра оператора задачи показано, что в случае весовых пространств Соболева со слишком быстро убывающим весом задача (1)–(3) имеет в пространстве Соболева более одного решения. Наоборот, если весовая функция убывает слишком медленно, то в соответствующем пространстве Соболева может не найтись решения задачи (1)–(3). В этом полученный результат аналогичен результату работы А.Н. Тихонова [8], в которой для шкалы функциональных пространств найдена граница корректной разрешимости задачи Коши для уравнения теплопроводности и установлено нарушение единственности решения задачи Коши в более широких пространствах шкалы.

2. Достаточные условия корректной разрешимости задачи (1)–(3). Если функция $u:(a,b)\times R^d$ при каждом $t\in(a,b)\subset R$ принимает значение $u(t,\cdot)\in W_p^l(R^d)$ при некоторых $p\ge 1$, $l\ge 0$, причем отображение $t\to u(t,\cdot)$ интервала (a,b) в банахово пространство $W_p^l(R^d)$ непрерывно на интервале (a,b), то говорят, что эта функция принадлежит пространству $C((a,b),W_p^l(R^d))$.

Пусть $\mathcal{H}$ — сепарабельное гильбертово пространство, $\mathbf{A}$ — самосопряженный неотрицательный оператор в гильбертовом пространстве, действующий в пространстве $\mathcal{H}=L_2(R^d)$, I — единичный оператор в пространстве $\mathcal{H}$. Превратим область определения $\mathrm{Dom}(\mathbf{A}^\beta)$ неотрицательного оператора $\mathbf{A}^\beta(\beta>0)$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}^\beta$, введя на $\mathrm{Dom}(\mathbf{A}^\beta)$ норму $\|\cdot\|_{\mathbf{A}^\beta}=\|\mathbf{A}^\beta\cdot\|$.

Обозначим через $L_{2,\gamma}((a,b),\mathcal{H})$ $(-\infty\le a<b\le+\infty)$ пространство вектор-функций со значениями в $\mathcal{H}$, снабженное нормой

$$\|f\|_{L_{2,\gamma}((a,b),\mathcal{H})}=\left(\int_a^b\exp(-2\gamma t)\|f(t)\|^2_{\mathcal{H}}dt\right)^{1/2},\quad \gamma\ge 0.$$

Через $W^l_{2,\gamma}((a,b),\mathbf{A}^l)$ при каждом $l\in\mathbf{N}$ обозначим пространство таких вектор-функций на интервале (a,b) со значениями в $\mathcal{H}$, что $\mathbf{A}^j u^{(1-j)}(t)\in L_{2,\gamma}((a,b),\mathcal{H})$, $j=0,1,\dots,l$, с нормой

$$\|u\|_{W^l_{2,\gamma}((a,b),\mathbf{A}^l)}=(\|u^{(l)}\|^2_{L_{2,\gamma}((a,b),\mathcal{H})}+\|\mathbf{A}^l u\|^2_{L_{2,\gamma}((a,b),\mathcal{H})})^{1/2},\quad \gamma\ge 0.$$

Для исследования модельной задачи с начальными условиями (1)–(3) можно предположить, что $\mathbf{A} = -\Delta$.

Определение. Решением задачи Коши (1), (2) будем называть функцию $u \in W^1_{2,\gamma}((h,+\infty),\mathbf{A})$, которая удовлетворяет уравнению (1) на интервале $(0,+\infty)$ и начальному условию (2) на интервале $(h,0)$.

Согласно теореме о следах ([9], гл. I, а также [5]) справедлива

Лемма 1. *Если $l \in \mathbf{N}$ и $u \in W^l_{2,\gamma}((a,b),\mathbf{A}^l)$, то существует $u(a+0,\cdot) \in D(\mathbf{A}^{l-1/2})$ такое, что $\lim\limits_{t\to a+0} \|u(t,\cdot) - u(a+0,\cdot)\|_{\mathbf{A}^{l-1/2}} = 0$. Наоборот, если $u_0 \in D(\mathbf{A}^{l-1/2})$ при некотором $l \in \mathbf{N}$, то существует функция $u \in W^l_{2,\gamma}((a,b),\mathbf{A}^l)$ такая, что $\lim\limits_{t\to a+0} \|u(t,\cdot) - u_0(\cdot)\|_{\mathbf{A}^{l-1/2}} = 0$. При этом справедливо неравенство $\|u_0(\cdot)\|_{\mathbf{A}^{l-1/2}} \le C\|u\|_{W^l_{2,\gamma}((a,b),\mathbf{A}^l)}$, в котором постоянная C не зависит от $u \in W^l_{2,\gamma}((a,b),\mathbf{A}^l)$.*

Лемма 2. *Если функция $u \in W^1_{2,\gamma}((h,+\infty),\mathbf{A})$ является решением задачи Коши (1)–(3), то существует предел $u(+0,\cdot) \in H^{1/2}$ функции $u(t,\cdot)$ при $t \to +0$; функция $\varphi(t,x)$, $(t,x) \in (h,0)\times R^d$, имеет предел $\varphi(-0,\cdot) \in H^{1/2}$ при $t \to -0$ и справедливо равенство $u(+0,\cdot) = \varphi(-0,\cdot)$.*

Лемма 3. *Функция $u \in W^1_{2,\gamma}((h,+\infty),\mathbf{A})$ является решением задачи Коши (1)–(3) тогда и только тогда, когда функция*

$$v(t,x) = \exp(-\gamma t)u(t,x), \quad (t,x) \in (h,+\infty)\times R^d,$$

принадлежит пространству $W^1_2((h,+\infty),\mathbf{A})$ и является решением функционально-дифференциального уравнения

$$v_t(t,x) + \gamma v(t,x) = \mathcal{L}_\gamma v(t,x) + f_\gamma(t,x), \quad t > 0, \quad x \in R^d, \tag{4}$$

где $f_\gamma = e^{-\gamma t} f$ и

$$\mathcal{L}_\gamma v(t,x) = \Delta v(t,x) + \sum_{k=1}^{N} \{[a_k e^{\gamma h_k}(u(t+h_k,x))] + i[e^{\gamma h_k}(\mathbf{b}_k, \nabla u(t+h_k,x))] + \\ + [e^{\gamma h_k} c_k \Delta u(t+h_k,x)]\} - \gamma_0 u(t,x), \quad (t,x) \in (0,+\infty)\times R^d, \tag{5}$$

удовлетворяющим начальному условию

$$v|_{[h,0]\times R^d} = e^{-\gamma t}\varphi, \quad (t,x) \in (h,0)\times R^d. \tag{6}$$

Заметим, что $f \in L_{2,\gamma}(R_+,H)$ тогда и только тогда, когда $f_\gamma \in L_2(R_+,H)$, причем $\|f_\gamma\|_{L_2(R_+,H)} = \|f\|_{L_{2,\gamma}(R_+,H)}$.

Положим $v(t,x) = w(t,x) + g(t,x)$, где $g(t,x) = \varphi(t,x)$ при $(t,x) \in (h,0)\times R^d$ и $g(t,x) = e^{-t^2(\mathbf{A}^2)/2}/\varphi(-0,x)$. Тогда $g(t,x) \in W^1_2((h,+\infty),\mathbf{A})$, справедлива оценка

$$\|g\|_{W^1_2((h,+\infty),\mathbf{A})} \le C\|\varphi\|_{W^1_2((h,0),\mathbf{A})}. \tag{7}$$

Нетрудно проверяется с помощью непосредственной подстановки

Лемма 4. *Функция $v \in W^1_2((h,+\infty),\mathbf{A})$ является решением задачи Коши (3)–(6) тогда и только тогда, когда функция $w(t,x) = v(t,x) - g(t,x)$, $(t,x) \in (h,+\infty)\times R^d$, удовлетворяет* *условию* $w(t,x)=0$, $(t,x)\in(h,0)\times R^d$, *а ее сужение* $w|_{R_+\times R^d}$ *принадлежит пространству* $W_2^1(R_+,\mathbf{A})$ *и является решением задачи Коши*

$$\frac{\partial}{\partial t}w(t,x)+\gamma w(t,x)=\mathcal{L}_\gamma w(t,x)+F_\gamma(t,x),\quad (t,x)\in(0,+\infty)\times R^d, \tag{8}$$

$$\lim_{t\to+0}\|w(t,\cdot)\|_{H^{\frac{1}{2}}}=0, \tag{9}$$

где функция

$$F_\gamma=\left(f_\gamma+\mathcal{L}_\gamma g-\gamma g-\frac{\partial}{\partial t}g\right)\Big|_{R_+\times R^d}$$

принадлежит пространству $L_2(R_+,H)$ *и допускает оценку*

$$\|F_\gamma\|_{L_2(R_+,H)}\le C(\|\varphi\|_{W_2^1((h,0),\mathbf{A})}+\|f\|_{L_{2,\gamma}(R_+,H)}). \tag{10}$$

Доказательство. Равенство (8) следует из равенства (4) и подстановки $v=w+g$. Из определения функции g следует равенство $w(t,x)=0$, $(t,x)\in(h,0)\times R^d$, и поэтому в силу леммы 1 справедливо (9). Поскольку $f_\gamma\in L_2((h,+\infty),H)$ и $g\in W_2^1((h,+\infty),\mathbf{A})$, то $F_\gamma\in L_2((0,+\infty),H)$. В силу определения функций f_γ, g и неравенства (7) выполняется оценка (10). □

Так как $w(+0,\cdot)=0$, то будем искать решение уравнения (8) в виде

$$w(t,x)=\int_0^t e^{-(\mathbf{A}+\gamma\mathbf{I})(t-s)}Z(s,x)ds\equiv(\mathbf{V}_\gamma Z)(t,x),\quad (t,x)\in R_+\times R^d, \tag{11}$$

где $Z\in L_2((0,+\infty),H)$ — неизвестная функция.

Лемма 5. *Для функции* (11) *справедливо равенство*

$$\frac{\partial}{\partial t}w(x,t)+(\mathbf{A}+\gamma\mathbf{I})w(t,x)=Z(t,x),\ (t,x)\in(0,+\infty)\times R^d. \tag{12}$$

Лемма 6. *Если* $w(t,x)\in W_2^1(R_+,\mathbf{A})$ *удовлетворяет условию* (9), *то существует единственная функция* $Z\in L_2(R_+,H)$ *такая, что выполняется* (11), *при этом*

$$\|Z\|_{L_2(R_+,H)}\le\|w\|_{W_2^1(R_+,A)}\le C\|Z\|_{L_2(R_+,H)}. \tag{13}$$

Наоборот, если $Z\in L_2(R_+,H)$ *и функция* w *определена в* (11), *то* $w\in W_2^1(R_+,\mathbf{A})$ *и справедлива оценка* (13).

Следствие 1. Оператор $\mathbf{V}_\gamma$ осуществляет взаимно однозначное линейное отображение пространства $L_2((0,+\infty),H)$ на пространство $\dot{W}_2^1((0,+\infty),\mathbf{A})$ — подпространство элементов u из пространства $W_2^1((0,+\infty),\mathbf{A})$, для которых выполнено равенство $\lim\limits_{t\to0}\|u(t)\|_{\mathbf{A}^{1/2}}=0$. При этом нормы отображения $\mathbf{V}$ и обратного к нему допускают оценки

$$|||\,\mathbf{V}_\gamma\,|||_{B(L_2((0,+\infty),H),W_2^1((0,+\infty),\mathbf{A}))}\le C\quad\text{и}\quad |||\,\mathbf{V}_\gamma^{-1}\,|||_{B(W_2^1((0,+\infty),\mathbf{A}),L_2((0,+\infty),H))}\le c^{-1}$$

при некоторых $c,C>0$.

Обозначим через $|||\cdot|||$ норму в пространстве ограниченных линейных операторов, действующих в гильбертовых пространствах $L_2((0,+\infty),H)$.

Следствие 2. Операторы $\mathbf{\Delta V}_\gamma$ и $\mathbf{\nabla V}_\gamma$ как преобразования пространства $L_2((0,+\infty),H)$ допускают оценки $|||\,\mathbf{V}\,|||\le C_2$ и $|||\,\mathbf{V}\,|||\le C_1$.

Определим в пространстве $L_2((0,+\infty),H)$ для всех $h \in R$ линейные операторы сдвига по правилу

$$\mathbf{S}_h v(t,x) = v(t+h,x), \quad \text{если } t+h > 0,$$

и

$$\mathbf{S}_h v(t,x) = 0, \quad \text{если } t+h \leq 0.$$

Очевидно, норма оператора S_h как отображения пространства $L_2((0,+\infty),H)$ в себя не превосходит единицы при произвольном $h \in R$.

Лемма 7. *Функция $w \in W_2^1(R_+,\mathbf{A})$ является решением задачи Коши* (8), (9) *тогда и только тогда, когда функция $Z \in L_2(R_+,H)$, определяемая равенством* (11), *является решением уравнения*

$$Z(t,x) + K_\gamma Z(t,x) = F_\gamma(t,x), \quad (t,x) \in R_+ \times R^d, \tag{14}$$

где

$$K_\gamma Z(t,x) = \sum_{k=1}^{N} \{[a_k e^{\gamma h_k}(\mathbf{S}_{h_k}(\mathbf{V}_\gamma Z)(t,x))] + i[e^{\gamma h_k}(\mathbf{S}_{h_k}(\mathbf{b}_k,(\nabla \mathbf{V}_\gamma Z)(t,x))] +$$
$$+ [e^{\gamma h_k} c_k(\mathbf{S}_{h_k}\Delta(\mathbf{V}_\gamma Z)(t,x))]\} - \gamma_0(\mathbf{V}_\gamma Z)(t,x). \tag{15}$$

Положим $\omega(\lambda) = \sum\limits_{k=1}^{N} e^{\lambda h_k}\{a_k C + \|\mathbf{b}_k\| C_1 + c_k C_2\} + \gamma_0 C$, $\lambda \in R$. Тогда, очевидно,

$$||| K_\gamma ||| \leq \omega(\gamma).$$

Теорема 1. *Пусть $\omega(\gamma) < 1$ на интервале $(\alpha,\beta) \subset R$. Тогда если $\varphi \in W_2^1([h,0],\mathbf{A})$ и $f \in L_{2,\gamma}(R_+,H)$ при некотором $\gamma \in (\alpha,\beta)$, то задача* (1)–(3) *имеет единственное решение u в пространстве $W_{2,\gamma}^1((h,+\infty),\mathbf{A})$, причем норма решения допускает оценку*

$$\|u\|_{W_{2,\gamma}^1((h,+\infty),\mathbf{A})} \leq c[\|f\|_{L_{2,\gamma}(R_+,H)} + \|\varphi\|_{W_2^1([h,0],\mathbf{A})}] \tag{16}$$

с постоянной c, не зависящей от выбора $f \in L_{2,\gamma}(R_+,H)$ и $\varphi \in W_2^1([h,0],\mathbf{A})$.

Доказательство. Задача (1)–(3) отыскания решения u в пространстве $W_{2,\gamma}^1((h,+\infty),\mathbf{A})$ с некоторым $\gamma \in R$ сводится к эквивалентному уравнению (14) относительно неизвестной функции $Z \in L_2(R_+,H)$, в котором оператор K_γ задан соотношением (15). Если $\gamma \in (\alpha,\beta)$, то в силу предположений теоремы выполняется неравенство $||| K_\gamma ||| < 1$. Кроме того, если $f \in L_{2,\gamma}(R_+,H)$ при некотором $\gamma \in (\alpha,\beta)$, то согласно лемме 4 правая часть F_γ принадлежит пространству $L_2(R_+,H)$ в силу предположений теоремы. Следовательно, решение Z уравнения (14) существует, единственно, задается равенством $Z = (I+K_\gamma)^{-1}F_\gamma$ и в силу леммы 4 допускает оценку $\|Z\|_{L_2(R_+,H)} \leq c\|F_\gamma\|_{L_2(R_+,H)}$. Тогда эквивалентная задача (1)–(3) имеет единственное решение u, которое допускает оценку (16). □

Замечание 1. Ограниченный оператор $(I+K_\gamma)^{-1}$ допускает представление сходящимся по операторной норме рядом Неймана $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k K_\gamma^k$, а норма его допускает оценку

$$|||(I+K_\gamma)^{-1} ||| < (1-\omega(\gamma))^{-1}.$$

Замечание 2. Корректность задачи с опережающим аргументом является требованием более ограничительным, чем корректность задачи с запаздывающим аргументом, поскольку в случае отсутствия в операторе (2) слагаемых с опережением (при $h_N < 0$) функция ω должна удовлетворять условию $\omega(\gamma) < 1$ на некоторой полупрямой $(\gamma_0, +\infty)$ [7].

3. Необходимые условия корректной разрешимости и спектр оператора A. Наряду с задачей (1)–(3) рассмотрим задачу с начальными условиями для модельного параболического дифференциально-разностного уравнения вида

$$u_t(t) = \mathcal{M}u(t) + f(t), \quad t > 0, \tag{17}$$

где

$$\mathcal{M}u(t) = \mathbf{A}u(t) + \sum_{k=1}^{N}\{[a_k(u(t+h_k))] + [c_k\mathbf{A}u(t+h_k)]\} - \gamma_0 u(t), \quad t \in (0, +\infty). \tag{18}$$

В равенстве (18) $\mathbf{A}$ — линейный самосопряженный положительный оператор в гильбертовом пространстве H с плотной областью определения $D \subset H$, имеющий дискретный спектр $\sigma(\mathbf{A}) = \{s_n,\, n \in \mathbf{N}\}$, причем каждому собственному значению s_n соответствует одномерное собственное подпространство, базисным элементом которого является собственный вектор v_n оператора $\mathbf{A}$; коэффициенты a_k, c_k, h_k, $k = \overline{1, N}$, — вещественные числа, $h = h_1 < h_2 < \cdots < h_N$, причем $h < 0$. В равенстве (17) f — заданная функция из пространства $L_2((0, +\infty), H)$, а u — неизвестная числовая функция, заданная на множестве $(h, +\infty) \times R^d$ из пространства $L_2((h, +\infty), H)$. Ставится задача определить функцию $u : (h, +\infty) \times H$, которая в области $(0, +\infty) \times R^d$ удовлетворяет уравнению (1), а на множестве $(h, 0] \times R^d$ удовлетворяет начальному условию

$$u|_{(h,0]} = \varphi, \tag{19}$$

где $\varphi(t) : (h, 0] \to H$ — заданная начальная функция.

Задача (17)–(19) представляет собой частный случай задачи (1)–(3), поэтому достаточные условия корректной разрешимости задачи (17)–(19) дает теорема 1. Исследуем, насколько существенны условия на весовой параметр γ (предъявляемые неравенством $\omega(\gamma) < 1$ в теореме 1) для существования и единственности решения задачи (17)–(19).

Рассмотрим связанное с собственным значением s_n оператора $\mathbf{A}$ характеристическое уравнение

$$s_n - \gamma_0 + \sum_{k=1}^{N} e^{h_k\xi}[a_k + c_k s_n] = \xi \tag{20}$$

и обозначим через Ξ_n множество его корней в комплексной плоскости $\mathbf{C}$.

Лемма 8. *При любом* $s_n \in R$ *уравнение* (20) *относительно переменной* $\xi = x + iy \in \mathbf{C}$ *имеет счетное множество корней* Ξ_n.

Утверждение леммы устанавливается сведением уравнения (20) к системе из двух вещественных уравнений для переменных $x, y \in R$.

Определим множество $\Xi = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \Xi_n$.

Следствие 3. Множество $\Xi \subset \mathbf{C}$ счетно.

По множеству Ξ и интервалу (α, β), существование которого утверждает теорема 1, определим числа $a = \sup\{\operatorname{Re}\lambda : \lambda \in \Xi,\, \operatorname{Re}\lambda < \alpha\}$ и $b = \inf\{\operatorname{Re}\lambda : \lambda \in \Xi,\, \operatorname{Re}\lambda > \beta\}$.

Теорема 2. *Пусть $\omega(\gamma) < 1$ на интервале $(\alpha, \beta) \subset R$. Тогда если $\gamma > b$, то однородная (с нулевыми начальным условием и правой частью) задача (1)–(3) имеет нетривиальное решение $u \in W^1_{2,\gamma}((h, +\infty), \mathbf{A})$. Если $\gamma < a$, то не при всех начальных данных $\phi \in W^1_2([h, 0], \mathbf{A})$ однородное уравнение (17) $u_t(t) = \mathcal{M}u(t)$, $t > 0$, имеет решение из пространства $W^1_{2,\gamma}((h, +\infty), \mathbf{A})$.*

Доказательство. Предположим, что $\gamma > b$. Тогда найдется такое $n \in \mathbf{N}$ и такой корень ξ^j_n уравнения (20), что $\operatorname{Re}\xi^j_n \in (\beta, \gamma)$. Тогда функция $u(t) = e^{\xi^j_n t}v_n$, $t \in (h, +\infty)$, принадлежит пространству $W^1_{2,\gamma}((h, +\infty), \mathbf{A})$, является решением однородного уравнения (17) и удовлетворяет начальному условию (19) вида

$$\phi(t) = e^{\xi^j_n t}v_n, \quad t \in (h, 0]. \tag{21}$$

Начальная функция (21) принадлежит пространству $W^1_2([h, 0], \mathbf{A})$, поэтому если $\widetilde{\gamma} \in (\alpha, \beta)$, то согласно теореме 1 задача (17)–(19) с начальным условием (21) для однородного уравнения (17) имеет единственное решение $\widetilde{u}$ в пространстве $W^1_{2,\widetilde{\gamma}}((h, +\infty), \mathbf{A})$. Так как $\widetilde{\gamma} < \beta < \gamma$, то $\widetilde{u} \in W^1_{2,\gamma}((h, +\infty), \mathbf{A})$.

Следовательно, в пространстве $W^1_{2,\gamma}((h, +\infty), \mathbf{A})$ задача (17)–(19) с начальным условием (21) для однородного уравнения (17) имеет по крайней мере два различных решения — $\widetilde{u}$ и $u(t) = e^{\xi^j_n t}v_n$, $t \in (h, +\infty)$.

Аналогично доказывается, что если $\gamma < a$, то не при всех начальных данных $\phi \in W^1_2([h, 0], \mathbf{A})$ однородное уравнение (17) $u_t(t) = \mathcal{M}u(t)$, $t > 0$, имеет решение из пространства $W^1_{2,\gamma}((h, +\infty), \mathbf{A})$. Действительно, пусть $\gamma < a$ и $\widetilde{\gamma} \in (\alpha, \beta)$. Тогда найдется такое $m \in \mathbf{N}$ и такой корень ξ^j_m уравнения (20), что $\operatorname{Re}(\xi^j_m) \in (\gamma, \alpha)$. Следовательно, функция $u(t) = e^{\xi^j_m t}v_m$, $t \in (h, +\infty)$, принадлежит пространству $W^1_{2,\widetilde{\gamma}}((h, +\infty), \mathbf{A})$, является решением однородного уравнения (17) и удовлетворяет начальному условию (19) вида

$$\phi(t) = e^{\xi^j_m t}v_m, \quad t \in (h, 0]. \tag{22}$$

Поэтому если предположить, что задача (17)–(19) с начальным условием (22) для однородного уравнения (17) имеет решение v в пространстве $W^1_{2,\gamma}((h, +\infty), \mathbf{A})$, то функция v является решением задачи (17)–(19) с начальным условием (22) для однородного уравнения (17) в пространстве $W^1_{2,\widetilde{\gamma}}((h, +\infty), \mathbf{A})$, так как $\widetilde{\gamma} > \gamma$. Это противоречит однозначной разрешимости задачи (17)–(19) в пространстве $W^1_{2,\gamma}((h, +\infty), \mathbf{A})$, утверждаемой теоремой 1. □

Следствие 4. Если функция ω определена по оператору (18) и $\omega(\gamma) < 1$ при $\gamma \in (\alpha, \beta)$, то $(\alpha, \beta) \bigcap \Xi = \emptyset$.

Действительно, предположим, что существует $l \in \mathbf{N}$ и корень ξ^j_l уравнения (20), соответствующего корню s_l. Выберем числа α_1, β_1 таким образом, что $\alpha < \beta_1 < \xi^j_l \alpha_1 < \beta$. Тогда в силу теоремы 2 задача (17)–(19) для однородного уравнения (17) имеет решение из пространства $W^1_{2,\gamma}((h, +\infty), \mathbf{A})$ не при всех начальных данных из пространства $W^1_2((h, 0], \mathbf{A})$, если $\gamma \in (\alpha, \beta_1)$, и имеет более одного решения из пространства $W^1_{2,\gamma}((h, +\infty), \mathbf{A})$, если $\gamma \in (\alpha_1, \beta)$. Получается противоречие с утверждением теоремы 1.

Замечание 3. Полученный результат об указании класса весовых пространств Соболева, в которых задача с начальными данными (17)–(19) корректно разрешима, является аналогом результатов работы [8] о функциональном классе однозначной разрешимости уравнения теплопроводности. Действительно, согласно результатам [8] при любом значении $T > 0$ задача Коши для уравнения теплопроводности с непрерывным ограниченным начальным условием имеет единственное решение в пространстве функций $u : [0,T] \times R \to R$, для которых конечна величина $\sup\limits_{x\in R}(e^{-x^2} \sup\limits_{t\in[0,T]} |u(t,x)|)$. В то же время при любом $\varepsilon > 0$ указанная задача Коши имеет более одного решения в классе функций, для которых $\sup\limits_{x\in R}(e^{-x^{2+\varepsilon}} \sup\limits_{t\in[0,T]} |u(t,x)|) < \infty$. Так и задача (17)–(19) с начальным условием для однородного уравнения (17) имеет единственное решение в пространстве $W^1_{2,\gamma}((h,+\infty),\mathbf{A})$ при $\gamma \in (\alpha,\beta)$, но если $\gamma > b \geq \beta$, то решение задачи с начальным условием не единственно, а если $\gamma < a \leq \alpha$, то решение задачи с начальным условием существует не при всех начальных данных.

Замечание 4. Задача (17)–(19) с начальным условием для однородного уравнения (17) порождает полугруппу преобразований пространства $W^1_2([h,0],\mathbf{A})$. Действительно, в соответствии с теоремой 1 при всех $t \geq 0$ отображение $\mathcal{U}(t) : \phi \to u_\phi|_{[h+t,t]}$, где u_ϕ — решение задачи (17)–(19) с начальным условием для однородного уравнения (17), определено на пространстве $W^1_2([h,0],\mathbf{A})$ и является его ограниченным линейным преобразованием, допускающим оценку сверху $\|\mathcal{U}(t)\|_{B(W^1_2([h,0],\mathbf{A}))} \leq e^{\gamma t}$ при любом $\gamma \in (\alpha,\beta)$.

Литература

[1] Мышкис А.Д. *Смешанные функционально-дифференциальные уравнения*, Современ. матем. Фундамент. направления **4**, 5–120 (2003).

[2] Скубачевский А.Л. *Эллиптические дифференциально-разностные уравнения с вырождением*, Тр. ММО **59**, 240–285 (1997).

[3] Власов В.В., Медведев Д.А. *Функционально–дифференциальные уравнения и связанные с ними вопросы спектральной теории*, Современ. матем. Фундамент. направления **30**, 3–173 (2008).

[4] Власов В.В., Сакбаев В.Ж. *О корректной разрешимости в шкале пространств Соболева некоторых дифференциально-разностных уравнений*, Дифференц. уравнения **37** (9), 1194–1202 (2001).

[5] Власов В.В., Сакбаев В.Ж. *О корректной разрешимости некоторых дифференциально-разностных уравнений в пространствах Соболева*, Матем. заметки **68** (6), 939–942 (2000).

[6] Йаакбариех А., Сакбаев В.Ж. *Представление формулами Фейнмана полугрупп, порожденных параболическими дифференциально-разностными операторами*, Тр. МФТИ **4** (4), 113–119 (2012).

[7] Власов В.В., Сакбаев В.Ж. *О разрешимости одного класса функционально-дифференциальных уравнений с опережающим аргументом в гильбертовом пространстве*, Некотор. проблемы фундамент. и прикл. матем. (МФТИ, М., 1997), с. 72–82.

[8] Tichonoff A. *Theoremes d'unicite pour l'equation de la chaleur*, Матем. сб. **42** (2), 199–216 (1935).

[9] Лионс Ж.Л., Мадженес Э. *Неоднородные граничные задачи и их приложения* (Мир, М., 1971).

А. Йаакбариех
аспирант, Российский университет дружбы народов,
кафедра дифференциальных уравнений и математической физики,
ул. Миклухо-Маклая, д. 6, г. Москва, 117198, Россия,
e-mail: amirmath20@yahoo.com

В.Ж. Сакбаев
доцент, кафедра высшей математики,
Московский физико-технический институт,
Институтский пер., д. 9, г. Долгопрудный, Московская обл., 141700, Россия,
e-mail: fumi2003@mail.ru

A. Yaakbarieh and V.Zh. Sakbaev

Correctness of a problem with initial conditions for parabolic differential-difference equations with shifts of time argument

Abstract. In this paper we consider the problem with initial conditions on semiaxis for differential–difference equation of parabolic type with deviation of time argument. We obtain sufficient condition of correct solvability of the problem in Sobolev space with exponential weight. In terms of spectrum of operator of the problem, we obtain necessary conditions of correct solvability, sufficient conditions of absence of solution and sufficient conditions of solutions nonuniqueness.

Keywords: differential-difference equation, Sobolev space with weight, correct solvability.

A. Yaakbarieh

Postgraduate, Chair of Differential Equations and Mathematical Physics,
Peoples' Friendship University of Russia,
6 Mikluho-Maklaya str., Moscow, 117198 Russia,

`e-mail:` amirmath20@yahoo.com

V.Zh. Sakbaev

Associate Professor, Chair of Higher Mathematics,
Moscow Institute of Physics and Technology,
9 Institutskii lane, Dolgoprudnyi, Moscow oblast, 141700 Russia,

`e-mail:` fumi2003@mail.ru