ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2005 МАТЕМАТИКА № 8 (519)

УДК 517.972

А.Г. ЧЕНЦОВ

ПРИБЛИЖЕННЫЕ РЕШЕНИЯ В ЗАДАЧЕ ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ДОСТИЖИМОСТИ

Для задачи о построении множества притяжения (МП) в условиях ограничений асимптотического характера изучаются представления множества приближенных решений (ПР), определяемых в терминах фильтров, ультрафильтров и конечно-аддитивных $(0,1)$-мер на измеримых пространствах (ИП) с полуалгебрами множеств. Обсуждается компактифицируемый случай задачи, для которого показано, что в классах ультрафильтров и конечно-аддитивных $(0,1)$-мер множество всех ПР (соблюдающих ограничения асимптотического характера) исчерпывается ПР, формирующими точки МП в пространстве оценок.

1. Введение

Рассмотрим множество $E \neq \emptyset$, топологическое пространство (ТП) $(\mathbf{H}, \theta)$, отображение $\mathbf{h} : E \longrightarrow \mathbf{H}$, а также непустое семейство $\mathcal{E}$ подмножеств множества E. Исследуется асимптотическая конструкция, связанная на идейном уровне с выбором направленностей (e_α) в E, каждая из которых обладает при любом $U \in \mathcal{E}$ следующим свойством: $e_\alpha \in U$ с некоторого момента ([1], гл. 2). Такие направленности именуем ПР. Среди этих ПР (e_α) естественно выделяются такие, для которых $(\mathbf{h}(e_\alpha))$ оказывается направленностью (в $\mathbf{H}$), сходящейся в ТП $(\mathbf{H}, \theta)$; такие ПР (e_α) называем ПР, формирующими МП. Возможность появления иных ПР, соблюдающих в упомянутом смысле $\mathcal{E}$-ограничение и вместе с тем не формирующих какую-либо точку МП (даже при произвольном "прореживании" до поднаправленности), указана фактически в ([2], § 7.2). Целью данной работы ставим введение соответствующих множеств ПР, что затруднительно при использовании самих направленностей для целей формализации упомянутых ПР. Естественным аналогом направленности является фильтр, в частности, представляет интерес использование ультрафильтра. Однако конструктивное определение таковых также составляет большие трудности, если иметь ввиду ультрафильтр семейства всех подмножеств E. По-видимому, имеет смысл обратиться к ультрафильтру ИП с "единицей" E. Известно, что для некоторых типов ИП с полуалгебрами и алгебрами множеств удается уже дать исчерпывающее описание соответствующего множества ультрафильтров. Само же своде́ние ПР к ультрафильтру ИП можно представить и как сведение этих ПР (понимаемых первоначально как направленности) к $(0,1)$-мерам на данном ИП. Эти меры должны быть, вообще говоря, конечно-аддитивными, что существенно уже в достаточно простых случаях построения расширений. Упомянутое сведение потребует некоторых условий на используемое ИП, которым, впрочем, всегда можно удовлетворить, используя в качестве измеримых всевозможные подмножества E, что, конечно, не является желательным.

2. Общие обозначения и определения

В дальнейшем множество, все элементы которого сами являются множествами, называем семейством, принимаем аксиому выбора. Через $\mathcal{P}(X)$ (через $\mathcal{P}'(X)$) обозначаем семейство всех

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (03-01-00415, 01-01-96450) и Министерства образования России (Е02-1.0-232).

(всех непустых) подмножеств множества X. Для произвольных множеств A и B через B^A обозначаем ([3], § II.6) множество всех функций из A в B. Если A и B — множества, $f \in B^A$ и $C \in \mathcal{P}(A)$, то $f^1(C) \triangleq \{f(a) : a \in C\} \in \mathcal{P}(B)$, а $(f \mid C) \in B^C$ есть по определению сужение ([1], с. 26) f на множество C. Наряду с прообразами множеств, используем прообразы семейств: если X и Y — множества, $f \in Y^X$ и $\mathcal{Y} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(Y))$, то $f^{-1}[\mathcal{Y}] \triangleq \{f^{-1}(M) : M \in \mathcal{Y}\}$.

Всюду в дальнейшем фиксируем ТП $(\mathbf{H}, \theta)$ (см. раздел 1). Если $z \in \mathbf{H}$, то полагаем $N_\theta^0(z) = \{G \in \theta \mid z \in G\}$, кроме того,

$$N_\theta(z) \triangleq \{U \in \mathcal{P}(\mathbf{H}) \mid \exists G \in N_\theta^0(z) : G \subset U\} = \{U \in \mathcal{P}'(\mathbf{H}) \mid \exists G \in N_\theta^0(z) : G \subset U\}$$

— семейство всех окрестностей z в ТП $(\mathbf{H}, \theta)$. Если (X_1, τ_1) и (X_2, τ_2) — ТП, то через $C(X_1, \tau_1, X_2, \tau_2)$ обозначаем множество всех непрерывных, в смысле τ_1 и τ_2, функций из X_1 в X_2 ([1], гл. 3; [4], гл. 1). Термин "компактность ТП" понимаем в соответствии с ([4], с. 196), термин "бикомпактность" не используется.

Ниже используются направленности и сходимость по Мору–Смиту ([1], гл. 2). Если X — множество, то направленностью в X называем всякий триплет $(\mathbf{D}, \preceq, f)$, где $(\mathbf{D}, \preceq)$ — непустое направленное множество ([1], гл. 2) ($\preceq$ — направление на $\mathbf{D}$) и $f \in X^{\mathbf{D}}$. Двойственным по отношению к направленности является понятие фильтра ([4], гл. 1): если X — множество, то фильтром множества X называется всякое семейство $\mathcal{F} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(X))$ такое, что $(\emptyset \notin \mathcal{F})$ & $(A \cap B \in \mathcal{F}$ $\forall A \in \mathcal{F},\ \forall B \in \mathcal{F})$ & $(\{G \in \mathcal{P}(X) \mid F \subset G\} \subset \mathcal{F}\ \ \forall F \in \mathcal{F})$. Через $\mathfrak{F}[X]$ обозначаем множество всех фильтров множества X. Если $(\mathbf{D}, \preceq, f)$ — направленность в X, то

$$(X - \mathrm{ass})[\mathbf{D}; \preceq; f] \triangleq \{B \in \mathcal{P}(X) \mid \exists d \in \mathbf{D}\ \ \forall \delta \in \mathbf{D}\ \ (d \preceq \delta) \Longrightarrow (f(\delta) \in B)\} \in \mathfrak{F}[X].$$

Известно и "обратное" свойство ([4], с. 93): каждый фильтр множества X порождает некоторую направленность в X, для которой фильтр, ассоциированный с этой направленностью, совпадает с исходным фильтром. О сходимости по Мору–Смиту заметим только следующее: если $(\mathbf{D}, \preceq, g)$ — направленность в $\mathbf{H}$ и $z \in \mathbf{H}$, то

$$((\mathbf{D}, \preceq, g) \xrightarrow{\theta} z) \overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} (N_\theta(z) \subset (\mathbf{H} - \mathrm{ass})[\mathbf{D}; \preceq; g]).$$

Здесь охарактеризована упомянутая сходимость в $(\mathbf{H}, \theta)$. Отметим, что $N_\theta(z) \in \mathfrak{F}[\mathbf{H}]$ при $z \in \mathbf{H}$.

Всюду в дальнейшем фиксируем (см. раздел 1) непустое множество E, а также семейство $\mathcal{L} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$ такое, что

$$(\emptyset \in \mathcal{L}) \& (E \in \mathcal{L}) \& (A \cap B \in \mathcal{L}\ \ \forall A \in \mathcal{L},\ \ \forall B \in \mathcal{L}). \tag{2.1}$$

По мере надобности к условиям (2.1) могут добавляться дополнительные предположения, что будет оговариваться особо. Итак, $\mathcal{L}$ — мультипликативное семейство подмножеств E с "нулем" и "единицей" (частными случаями $\mathcal{L}$ являются топология, полуалгебра, алгебра и σ-алгебра подмножеств E). Согласно ([4], с. 91) вводим фильтры $(E, \mathcal{L})$, последнее будем именовать ИП, имея ввиду возможное применение в качестве $\mathcal{L}$ более традиционных семейств измеримых подмножеств E. Пусть

$$\mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \triangleq \{\mathcal{F} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L}) \mid (\emptyset \notin \mathcal{F}) \& (A \cap B \in \mathcal{F}\ \ \forall A \in \mathcal{F},\ \ \forall \mathcal{B} \in \mathcal{F}) \& \\ \& (\{L \in \mathcal{L} \mid F \subset L\} \subset \mathcal{F}\ \ \forall F \in \mathcal{F})\} \tag{2.2}$$

— множество всех фильтров ИП $(E, \mathcal{L})$. Среди всевозможных фильтров из множества (2.2) выделяем максимальные фильтры или ультрафильтры. Через $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ обозначаем множество всех $\mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$ таких, что $\forall \mathcal{G} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$

$$(\mathcal{F} \subset \mathcal{G}) \Longrightarrow (\mathcal{F} = \mathcal{G}), \tag{2.3}$$

тем самым определено множество всех ультрафильтров ИП $(E, \mathcal{L})$. Известно ([5], с. 29), что $\forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})\ \ \ \exists \mathcal{V} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) : \mathcal{U} \subset \mathcal{V}$. Если $(\mathbf{D}, \preceq, f)$ — направленность в E, то

$$(\mathcal{L} - \mathrm{ASS})[\mathbf{D}; \preceq; f] \triangleq \{L \in \mathcal{L} \mid \exists d \in \mathbf{D}\ \ \forall \delta \in \mathbf{D}\ \ (d \preceq \delta) \Longrightarrow (f(\delta) \in L)\} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \tag{2.4}$$

— $\mathcal{L}$-фильтр, ассоциированный с направленностью $(\mathbf{D}, \preceq, f)$. Напротив, если $\mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$, то для некоторой направленности $(\mathbf{D}, \preceq, f)$ в E имеет место

$$\mathcal{F} = (\mathcal{L} - \mathrm{ASS})[\mathbf{D}; \preceq; f]. \tag{2.5}$$

В связи с (2.4) отметим также очевидное свойство: если $(\mathbf{D}, \preceq, f)$ — направленность в E, то

$$(\mathcal{L} - \mathrm{ASS})[\mathbf{D}; \preceq; f] = (E - \mathrm{ass})[\mathbf{D}; \preceq; f] \cap \mathcal{L}. \tag{2.6}$$

В какой-то мере (2.6) объясняет вышеупомянутое свойство "отождествимости" $\mathcal{L}$-фильтров и направленностей в E. В терминах направленностей естественно вводится понятие МП в условиях ограничений асимптотического характера $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$ и заданного отображения $\mathbf{h} \in \mathbf{H}^E$. Именно, $\mathbf{AS}$ по определению есть множество всех точек $z \in \mathbf{H}$, каждая из которых обладает свойством: для некоторой направленности $(\mathbf{D}, \preceq, f)$ в множестве E

$$(\mathcal{E} \subset (E - \mathrm{ass})[\mathbf{D}; \preceq; f]) \& ((\mathbf{D}, \preceq, \mathbf{h} \circ f) \xrightarrow{\theta} z). \tag{2.7}$$

В (2.7) имеем свойство асимптотической достижимости точки z при "ограничении" $\mathcal{E}$ ([2], [5], [6]).

Если $\mathcal{Z} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$, то через $\mathbb{F}_*(\mathcal{L} \mid \mathcal{Z})$ (через $\mathbb{F}^0_*(\mathcal{L} \mid \mathcal{Z})$) обозначаем множество всех фильтров $\mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$ (всех ультрафильтров $\mathcal{F} \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})$) таких, что $\mathcal{Z} \subset \mathcal{F}$.

Предложение 2.1. *Если $\mathcal{Z}$ — подсемейство $\mathcal{L}$, то эквивалентны следующие два свойства*: 1) $\mathbb{F}_*(\mathcal{L} \mid \mathcal{Z}) \neq \emptyset$; 2) $\mathcal{Z} \subset (E - \mathrm{ass})[\mathbf{D}; \preceq; f]$ *для некоторой направленности* $(\mathbf{D}, \preceq, f)$ *в множестве E.*

Доказательство, использующее (2.4) и (2.6), практически очевидно. Отметим также весьма очевидное

Предложение 2.2. *Если $(\mathbf{D}, \preceq, f)$ — направленность в множестве E и $z \in \mathbf{H}$, то эквивалентны следующие три утверждения*:
1) $(\mathbf{D}, \preceq, \mathbf{h} \circ f) \xrightarrow{\theta} z$;
2) $\mathbf{h}^{-1}[N_\theta(z)] \subset (E - \mathrm{ass})[\mathbf{D}; \preceq; f]$;
3) $\mathbf{h}^{-1}[N^0_\theta(z)] \subset (E - \mathrm{ass})[\mathbf{D}; \preceq; f]$.

Доказательство следует из определения сходимости по Мору–Смиту и простейших свойств фильтров множества E.

Легко видеть, что $\forall \mathcal{Z} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$ имеет место

$$(\mathbb{F}_*(\mathcal{L} \mid \mathcal{Z}) \neq \emptyset) \Longleftrightarrow (\mathbb{F}^0_*(\mathcal{L} \mid \mathcal{Z}) \neq \emptyset), \tag{2.8}$$

позволяет устанавливать эквивалентность различных условий асимптотической реализации точек из $\mathbf{H}$ (см. предложение 2.1). Всюду в дальнейшем полагаем выполненным

Условие 2.1. Семейство $\mathcal{E}$ содержится в $\mathcal{L}$, отображение $\mathbf{h}$ $\mathcal{L}$-измеримо в смысле $\mathbf{h}^{-1}(G) \in \mathcal{L}$ $\forall G \in \theta$.

Замечание 2.1. В случае, когда $\mathcal{L}$ — σ-алгебра подмножеств E, условие 2.1 есть "обычное" требование об измеримости всех множеств из $\mathcal{E}$ и борелевской измеримости $\mathbf{h}$. В то же время для последующих конструкций могут быть полезны и менее традиционные случаи, когда $\mathcal{L}$ — полуалгебра или алгебра подмножеств E, а также случай, когда $\mathcal{L}$ — топология E. В последнем случае требование к $\mathbf{h}$ сводится к непрерывности этого отображения.

Теорема 2.1. *Для МП $\mathbf{AS}$ имеют место представления*

$$\mathbf{AS} = \{z \in \mathbf{H} \mid \mathbb{F}_*(\mathcal{L} \mid \mathcal{E} \cup \mathbf{h}^{-1}[N^0_\theta(z)]) \neq \emptyset\} = \{z \in \mathbf{H} \mid \mathbb{F}^0_*(\mathcal{L} \mid \mathcal{E} \cup \mathbf{h}^{-1}[N^0_\theta(z)]) \neq \emptyset\}.$$

Доказательство использует вышеупомянутые соотношения фильтров и направленностей, предложения 2.1 и 2.2, а также (2.8). Оно является достаточно простым и поэтому опущено.

3. Приближенные решения, формирующие множество притяжения

Рассмотрим вопрос о представлении ПР, формирующих точки МП $\mathbf{AS}$. Как уже отмечалось, использование (для формализации ПР) направленностей вызывает затруднение при их объединении в то или иное множество. Последнее, однако, является желательным, поскольку таким образом характеризуются зачастую реальные возможности при решении соответствующей конкретной задачи, а также зависимость этих возможностей от параметров (в частности, можно говорить о зависимости от семейства $\mathcal{E}$). В этой связи обращаемся к фильтрам ИП $(E, \mathcal{L})$, особо выделяя случай применения ультрафильтров. Условие 2.1 предполагается выполненным. Пусть

$$(\mathbb{F}_* - \mathrm{sol})[E;\mathcal{L}] \triangleq \bigcup_{z\in\mathbf{H}} \mathbb{F}_*(\mathcal{L} \mid \mathcal{E} \cup \mathbf{h}^{-1}[N_\theta^0(z)]). \tag{3.1}$$

В (3.1) имеем подмножество $\mathbb{F}^*(\mathcal{L})$. Легко видеть, что (3.1) есть множество всех фильтров $\mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$ таких, что $\exists z \in \mathbf{H}$:

$$\mathcal{E} \cup \mathbf{h}^{-1}[N_\theta^0(z)] \subset \mathcal{F}. \tag{3.2}$$

Свойство (3.2) выражает важное свойство $\mathcal{L}$-фильтра, а именно, формировать некоторую точку МП, соблюдая одновременно $\mathcal{E}$-ограничение. Напомним, что (3.2) можно перевести на язык направленностей: по фильтру $\mathcal{F}$ со свойством (3.2) можно подобрать направленность $(\mathbf{D}, \preceq, f)$ в E со свойством $\mathcal{F} = (\mathcal{L} - \mathrm{ASS})[\mathbf{D}; \preceq; f]$, тогда для $z \in \mathbf{H}$ (со свойством (3.2)) в силу предложения 2.2 получим обычные для таких асимптотических конструкций свойства (2.7) (см. (2.6)). Сама точка z в (2.7) непременно является элементом $\mathbf{AS}$. Итак, всякий фильтр из множества (3.1) может быть превращен в направленность, реализующую при соблюдении $\mathcal{E}$-ограничений ту же самую точку $\mathbf{H}$, что и исходный фильтр (см. (3.2)), т. е. ПР в виде фильтра из множества (3.1) всегда можно истолковать и как ПР-направленность, эквивалентную по результату самому этому фильтру. Верно и обратное: если направленность $(\mathbf{D}, \preceq, f)$ в множестве E реализует точку $\tilde{z} \in \mathbf{H}$ в виде (2.7), то по правилу (2.4) можно сконструировать $\widetilde{\mathcal{F}} = (\mathcal{L} - \mathrm{ASS})[\mathbf{D}; \preceq; f] \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$, для которого (см. (2.6), предложение 2.2 и условие 2.1)

$$\mathcal{E} \cup \mathbf{h}^{-1}[N_\theta^0(\tilde{z})] \subset \widetilde{\mathcal{F}}, \tag{3.3}$$

следовательно, $\widetilde{\mathcal{F}} \in (\mathbb{F}_* - \mathrm{sol})[E;\mathcal{L}]$ реализует точку $\tilde{z}$ в смысле (3.3). Итак, в вопросах асимптотической достижимости действие ПР-направленностей тождественно действию ПР-фильтров.

Предложение 3.1. *Пусть* $(\mathbf{H}, \theta)$ *— хаусдорфово* [1], [4] *ТП. Тогда*

$$\forall \mathcal{F} \in (\mathbb{F}_* - \mathrm{sol})[E;\mathcal{L}] \quad \exists! z \in \mathbf{H} : \mathbf{h}^{-1}[N_\theta^0(z)] \subset \mathcal{F}.$$

Доказательство. Фиксируем $\mathcal{F} \in (\mathbb{F}_* - \mathrm{sol})[E;\mathcal{L}]$. С учетом (3.1) подберем $z_0 \in \mathbf{H}$ так, что

$$\mathbf{h}^{-1}[N_\theta^0(z_0)] \subset \mathcal{F}. \tag{3.4}$$

Пусть $z_* \in \mathbf{H}$ таково, что имеет место вложение

$$\mathbf{h}^{-1}[N_\theta^0(z_*)] \subset \mathcal{F}. \tag{3.5}$$

Покажем, что $z_0 = z_*$. Действительно, допустим противное: $z_0 \neq z_*$. Используя свойство отделимости ТП $(\mathbf{H}, \theta)$, подберем такие окрестности $H_0 \in N_\theta^0(z_0)$ и $H_* \in N_\theta^0(z_*)$, что $H_0 \cap H_* = \emptyset$. При этом в силу (3.4) имеем $\mathbf{h}^{-1}(H_0) \in \mathcal{F}$, а в силу (3.5) выполняется $\mathbf{h}^{-1}(H_*) \in \mathcal{F}$. Из (2.2), (3.1) получаем свойство

$$\mathbf{h}^{-1}(H_0) \cap \mathbf{h}^{-1}(H_*) \in \mathcal{F} \tag{3.6}$$

и, как следствие, множество в левой части (3.6) непусто. Но

$$\mathbf{h}^{-1}(H_0) \cap \mathbf{h}^{-1}(H_*) = \mathbf{h}^{-1}(H_0 \cap H_*) = \mathbf{h}^{-1}(\emptyset) = \emptyset$$

по выбору H_0 и H_*. Противоречие показывает, что $z_0 = z_*$. $\square$

Из теоремы 2.1 и (3.1) легко видеть, что точки **AS** и только они воспроизводятся в смысле (3.2) фильтрами из множества (3.1). Фильтры, не принадлежащие этому множеству, не обладают свойством (3.2) и, стало быть, не имеют отношения к формированию МП.

Проведем некоторую коррекцию определения (3.1), полагая

$$(\mathbb{F}_*^0 - \mathrm{sol})[E;\mathcal{L}] \triangleq \bigcup_{z\in\mathbf{H}} \mathbb{F}_*^0(\mathcal{L} \mid \mathcal{E} \cup \mathbf{h}^{-1}[N_\theta^0(z)]) \tag{3.7}$$

и получая при этом подмножество множества (3.1). Разумеется,

$$(\mathbb{F}_*^0 - \mathrm{sol})[E;\mathcal{L}] = \{\mathcal{F} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \mid \exists z \in \mathbf{H} : \mathcal{E} \cup \mathbf{h}^{-1}[N_\theta^0(z)] \subset \mathcal{F}\} = \\ = \{\mathcal{F} \in \mathbb{F}_*^0(\mathcal{L} \mid \mathcal{E}) \mid \exists z \in \mathbf{H} : \mathbf{h}^{-1}[N_\theta^0(z)] \subset \mathcal{F}\}. \tag{3.8}$$

К ультрафильтру из множества (3.7) применимо предложение 3.1. Кроме того, имеет место

Предложение 3.2. *Справедливы следующие равенства*:

$$\mathbf{AS} = \{z \in \mathbf{H} \mid \exists \mathcal{F} \in \mathbb{F}_*(\mathcal{L} \mid \mathcal{E}) : \mathbf{h}^{-1}[N_\theta^0(z)] \subset \mathcal{F}\} = \\ = \{z \in \mathbf{H} \mid \exists \mathcal{F} \in \mathbb{F}_*^0(\mathcal{L} \mid \mathcal{E}) : \mathbf{h}^{-1}[N_\theta^0(z)] \subset \mathcal{F}\} = \\ = \{z \in \mathbf{H} \mid \exists \mathcal{F} \in (\mathbb{F}_*^0 - \mathrm{sol})[E;\mathcal{L}] : \mathbf{h}^{-1}[N_\theta^0(z)] \subset \mathcal{F}\}. \tag{3.9}$$

Доказательство. Обозначим через $\mathbb{A}_1$, $\mathbb{A}_2$ и $\mathbb{A}_3$ второе, третье и четвертое множества в (3.9). Пусть $u \in \mathbf{AS}$. Тогда в силу теоремы 2.1 точка $u \in \mathbf{H}$ такова, что

$$\mathbb{F}_*(\mathcal{L} \mid \mathcal{E} \cup \mathbf{h}^{-1}[N_\theta^0(u)]) \neq \emptyset. \tag{3.10}$$

Пусть $\mathcal{F}_u$ — элемент множества в левой части (3.10), т. е. $\mathcal{F}_u \in \mathbb{F}_*(\mathcal{L})$ и при этом $\mathcal{E} \cup \mathbf{h}^{-1}[N_\theta^0(u)] \subset \mathcal{F}_u$. Тогда, в частности, $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}_u$ и $\mathcal{F}_u \in \mathbb{F}_*(\mathcal{L} \mid \mathcal{E}) : \mathbf{h}^{-1}[N_\theta^0(u)] \subset \mathcal{F}_u$. Поэтому $u \in \mathbb{A}_1$. Вложение $\mathbf{AS} \subset \mathbb{A}_1$ установлено. Пусть $v \in \mathbb{A}_1$, тогда $v \in \mathbf{H}$ и для некоторого фильтра $\mathcal{F}_v \in \mathbb{F}_*(\mathcal{L} \mid \mathcal{E})$ выполняется свойство $\mathbf{h}^{-1}[N_\theta^0(v)] \subset \mathcal{F}_v$. Отсюда следует $\mathcal{F}_v \in \mathbb{F}_*(\mathcal{L})$ и $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}_v$. Подберем (см. раздел 2) ультрафильтр $\mathcal{F} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ такой, что $\mathcal{F}_v \subset \mathcal{F}$. В частности, $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$ и $\mathcal{F} \in \mathbb{F}_*^0(\mathcal{L} \mid \mathcal{E}) :$ $\mathbf{h}^{-1}[N_\theta^0(v)] \subset \mathcal{F}$. Итак, $v \in \mathbb{A}_2$. Вложение $\mathbb{A}_1 \subset \mathbb{A}_2$ установлено (см. в этой связи (2.8)).

Пусть $w \in \mathbb{A}_2$. Тогда $w \in \mathbf{H}$ и для некоторого $\mathcal{F}_w \in \mathbb{F}_*^0(\mathcal{L} \mid \mathcal{E})$ имеет место вложение

$$\mathbf{h}^{-1}[N_\theta^0(w)] \subset \mathcal{F}_w. \tag{3.11}$$

Тогда $\mathcal{F}_w \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ и $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}_w$, что с учетом (3.11) означает

$$\mathcal{F}_w \in \mathbb{F}_*^0(\mathcal{L} \mid \mathcal{E} \cup \mathbf{h}^{-1}[N_\theta^0(w)]).$$

В силу (3.7) $\mathcal{F}_w \in (\mathbb{F}_*^0 - \mathrm{sol})[E;\mathcal{L}]$ обладает свойством (3.11). Следовательно, $w \in \mathbb{A}_3$. Вложение $\mathbb{A}_2 \subset \mathbb{A}_3$ установлено.

Пусть, наконец, $\omega \in \mathbb{A}_3$. Тогда $\omega \in \mathbf{H}$ и для некоторого $\mathcal{F}_\omega \in (\mathbb{F}_*^0 - \mathrm{sol})[E;\mathcal{L}]$

$$\mathbf{h}^{-1}[N_\theta^0(\omega)] \subset \mathcal{F}_\omega. \tag{3.12}$$

Тогда в силу (3.7) для некоторого $z \in \mathbf{H}$ имеем свойство

$$\mathcal{F}_\omega \in \mathbb{F}_*^0(\mathcal{L} \mid \mathcal{E} \cup \mathbf{h}^{-1}[N_\theta^0(z)]).$$

Отсюда $\mathcal{F}_\omega \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ и $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}_\omega$, что с учетом (3.12) доставляет свойство $\mathcal{E} \cup \mathbf{h}^{-1}[N_\theta^0(\omega)] \subset \mathcal{F}_\omega$ и, как следствие, получаем утверждение $\mathcal{F}_\omega \in \mathbb{F}_*^0(\mathcal{L} \mid \mathcal{E} \cup \mathbf{h}^{-1}[N_\theta^0(\omega)])$. В силу теоремы 2.1 $\omega \in \mathbf{AS}$. Вложение $\mathbb{A}_3 \subset \mathbf{AS}$ установлено. Итак, все четыре множества $\mathbf{AS}$, $\mathbb{A}_1$, $\mathbb{A}_2$ и $\mathbb{A}_3$ совпадают. □

Из предложения 3.2 следует, что ультрафильтры из множества (3.7) исчерпывающим образом определяют решение задачи об асимптотической достижимости, т. е. формируют МП **AS** (полезно учесть также предложения 2.1, 2.2, условие 2.1 и (2.6)).

Определение. Будем называть триплет $(\mathbf{H},\theta,\mathbf{h})$ компактифицируемым, если существует компактное ТП $(\mathbb{K},\tau)$, операторы $p\in\mathbb{K}^E$ и $q\in C(\mathbb{K},\tau,\mathbf{H},\theta)$, для которых выполняется равенство $\mathbf{h}=q\circ p$.

В традиционных постановках, изучаемых в теории расширений (экстремальных задач и задач о достижимости) [2], [5]–[8], упомянутое условие компактифицируемости выполнено.

Теорема 3.1. *Пусть триплет* $(\mathbf{H},\theta,\mathbf{h})$ *является компактифицируемым. Тогда*

$$(\mathbb{F}^0_* - \mathrm{sol})[E;\mathcal{L}] = \mathbb{F}^0_*(\mathcal{L}\mid\mathcal{E}). \tag{3.13}$$

Доказательство. Из (3.8) имеем вложение $(\mathbb{F}^0_* - \mathrm{sol})[E;\mathcal{L}]\subset\mathbb{F}^0_*(\mathcal{L}\mid\mathcal{E})$. Пусть $\mathcal{F}\in\mathbb{F}^0_*(\mathcal{L}\mid\mathcal{E})$. Тогда $\mathcal{F}\in\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})$ и $\mathcal{E}\subset\mathcal{F}$. При этом, конечно, $\mathcal{F}\in\mathbb{F}^*(\mathcal{L})$ и при всяком $\mathcal{G}\in\mathbb{F}^*(\mathcal{L})$ истинна импликация (2.3). Для некоторой направленности $(\mathbf{D},\preceq,f)$ в E имеет место (2.5). Используя компактифицируемость триплета $(\mathbf{H},\theta,\mathbf{h})$, выберем и зафиксируем компактное ТП $(\mathbb{K},\tau)$, $p\in\mathbb{K}^E$ и $q\in C(\mathbb{K},\tau,\mathbf{H},\theta)$, для которых $\mathbf{h}=q\circ p$. При этом $(\mathbf{D},\preceq,p\circ f)$ — направленность в компактном ТП $(\mathbb{K},\tau)$. Поэтому для некоторых $u\in\mathbb{K}$, направленного множества $(\Omega,\sqsubseteq)$, $\Omega\neq\emptyset$, и оператора $\lambda\in\mathbf{D}^\Omega$ имеем

$$(\forall d\in\mathbf{D}\ \ \exists\omega\in\Omega: d\preceq\lambda(\omega))\&(\forall\omega_1\in\Omega,\ \ \forall\omega_2\in\Omega\quad(\omega_1\sqsubseteq\omega_2)\Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow(\lambda(\omega_1)\preceq\lambda(\omega_2)))\&((\Omega,\sqsubseteq,p\circ f\circ\lambda)\xrightarrow{\tau}u). \tag{3.14}$$

Для точки $v\triangleq q(u)$ в силу непрерывности q из (3.14) имеем сходимость

$$(\Omega,\sqsubseteq,q\circ p\circ f\circ\lambda)\xrightarrow{\theta}v$$

или, с учетом представления $\mathbf{h}$ в виде суперпозиции,

$$(\Omega,\sqsubseteq,\mathbf{h}\circ f\circ\lambda)\xrightarrow{\theta}v. \tag{3.15}$$

Рассмотрим теперь направленность $(\Omega,\sqsubseteq,f\circ\lambda)$ в E. При этом в силу (2.4)

$$(\mathcal{L}-\mathrm{ASS})[\Omega;\sqsubseteq;f\circ\lambda]=\{L\in\mathcal{L}\mid\exists\omega_1\in\Omega\ \forall\omega_2\in\Omega\ \ ((\omega_1\sqsubseteq\omega_2)\Longrightarrow((f\circ\lambda)(\omega_2)\in L))\}\in\mathbb{F}^*(\mathcal{L}). \tag{3.16}$$

В силу (2.6) в дополнение к (3.16) имеем равенство

$$(\mathcal{L}-\mathrm{ASS})[\Omega;\sqsubseteq;f\circ\lambda]=(E-\mathrm{ass})[\Omega;\sqsubseteq;f\circ\lambda]\cap\mathcal{L}. \tag{3.17}$$

Из (3.15) и предложения 2.2 получаем вложение

$$\mathbf{h}^{-1}[N^0_\theta(v)]\subset(E-\mathrm{ass})[\Omega;\sqsubseteq;f\circ\lambda]. \tag{3.18}$$

Поскольку $N^0_\theta(v)\subset\theta$ (см. раздел 2), то из условия 2.1 получаем $\mathbf{h}^{-1}[N^0_\theta(v)]\subset\mathcal{L}$. С учетом (3.17) и (3.18) имеем

$$\mathbf{h}^{-1}[N^0_\theta(v)]\subset(\mathcal{L}-\mathrm{ASS})[\Omega;\sqsubseteq;f\circ\lambda]. \tag{3.19}$$

Легко видеть, что

$$\mathcal{F}\subset(\mathcal{L}-\mathrm{ASS})[\Omega;\sqsubseteq;f\circ\lambda]. \tag{3.20}$$

Действительно, пусть $F\in\mathcal{F}$. С учетом (2.4) и (2.5) подберем $\mathbf{d}\in\mathbf{D}$ так, что $\forall\delta\in\mathbf{D}$

$$(\mathbf{d}\preceq\delta)\Longrightarrow(f(\delta)\in F). \tag{3.21}$$

С учетом (3.14) подберем $\omega_*\in\Omega$ такое, что $\mathbf{d}\preceq\lambda(\omega_*)$. Если $\omega\in\Omega$ и $\omega_*\sqsubseteq\omega$, то в силу (3.14) $\lambda(\omega_*)\preceq\lambda(\omega)$. По свойству транзитивности $\preceq$ имеем $\mathbf{d}\preceq\lambda(\omega)$, что в силу (3.21) означает $(f\circ\lambda)(\omega)=f(\lambda(\omega))\in F$. С учетом (3.16) $F\in(\mathcal{L}-\mathrm{ASS})[\Omega;\sqsubseteq;f\circ\lambda]$. Поскольку выбор F был произвольным, установлено требуемое вложение (3.20), что в силу максимальности $\mathcal{F}$ означает (см. (2.3)) совпадение $\mathcal{F}$ и $(\mathcal{L}-\mathrm{ASS})[\Omega;\sqsubseteq;f\circ\lambda]$. С учетом (3.19) имеем вложение $\mathbf{h}^{-1}[N^0_\theta(v)]\subset\mathcal{F}$, тогда $\mathcal{E} \cup \mathbf{h}^{-1}[N_\theta^0(v)] \subset \mathcal{F}$ по выбору $\mathcal{F}$. Это означает, что $\mathcal{F} \in \mathbb{F}_*^0(\mathcal{L} \mid \mathcal{E} \cup \mathbf{h}^{-1}[N_\theta^0(v)])$ и согласно (3.7) $\mathcal{F} \in (\mathbb{F}_*^0 - \mathrm{sol})[E;\mathcal{L}]$. Итак, вложение, противоположное очевидному (см. (3.8)), установлено, т. е. множества $\mathbb{F}_*^0(\mathcal{L} \mid \mathcal{E})$ и $(\mathbb{F}_*^0 - \mathrm{sol})[E;\mathcal{L}]$ совпадают. $\square$

Если формализовать ПР посредством ультрафильтра ИП $(E, \mathcal{L})$, то (в компактифицируемом случае) соблюдение $\mathcal{E}$-ограничения является необходимым и достаточным условием того, что соответствующее ПР формирует точку МП.

Замечание 3.1. В связи с теоремой 2.1 и предложением 3.2 отметим одно простое представление МП $\mathbf{AS}$. Напомним, что само это МП было введено без использования $\mathcal{L}$, в то время как теорема 2.1 дает представление этого МП в терминах ИП $(E, \mathcal{L})$. Здесь существенно условие 2.1. Оно непременно выполняется при $\mathcal{L} = \mathcal{P}(E)$. Полагаем до конца данного раздела последнее равенство выполненным: в пределах данного замечания $\mathcal{L}$ есть σ-алгебра всех подмножеств E. Если M — множество, то через $\mathrm{Fin}(M)$ обозначаем семейство всех непустых конечных подмножеств M. Через $\mathbb{Z}(E)$ обозначаем множество всех центрированных семейств подмножеств E:

$$\mathbb{Z}_E \triangleq \Big\{\mathcal{H} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E)) \Big| \bigcap_{H \in \mathcal{K}} H \neq \emptyset \ \ \forall \mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{H})\Big\}.$$

Тогда с учетом свойств, установленных в [9], [10], легко проверить

$$\mathbf{AS} = \{z \in \mathbf{H} \mid \mathcal{E} \cup \mathbf{h}^{-1}[N_\theta^0(z)] \in \mathbb{Z}_E\} \tag{3.22}$$

(напр., [10], с. 77); (3.22) — простое следствие теоремы 2.1, где следует полагать $\mathcal{L} = \mathcal{P}(E)$. Из (3.22) имеем: если $z \in \mathbf{AS}$, то

$$X \cap \mathbf{h}^{-1}(S) \neq \emptyset \ \ \forall X \in \mathcal{E}, \ \ \forall S \in N_\theta(z). \tag{3.23}$$

В (3.22), (3.23) имеем важную характеристику асимптотически достижимых элементов $\mathbf{H}$: окрестности этих элементов должны определенным образом коррелировать с семейством $\mathcal{E}$.

4. Компакт приближенных решений, формирующих множество притяжения

Всюду в данном разделе полагаем, что $\mathcal{L}$ — полуалгебра подмножеств E ([2], с. 57; [5], с. 22; [6], с. 38; [11], §I.6). Итак, изучаем ИП $(E, \mathcal{L})$ с полуалгеброй множеств (не исключаем, конечно, возможности того, что $\mathcal{L}$ — алгебра или σ-алгебра подмножеств E). Здесь переведем теорему 3.1 на язык конечно-аддитивных $(0,1)$-мер, используя хорошо известное представление таких мер в терминах ультрафильтров ИП $(E, \mathcal{L})$. Введем некоторые новые обозначения. Через $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ обозначим множество всех вещественнозначных конечно-аддитивных мер ограниченной вариации, определенных на $\mathcal{L}$; $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ как линейное пространство (линейные операции и порядок на пространствах вещественнозначных функций определяем поточечно) порождено конусом $(\mathrm{add})_+[\mathcal{L}]$ всех неотрицательных вещественнозначных конечно-аддитивных мер на $\mathcal{L}$. Полагаем $\mathbb{P}(\mathcal{L}) \triangleq \{\mu \in (\mathrm{add})_+[\mathcal{L}] \mid \mu(E) = 1\}$, получая множество всех конечно-аддитивных вероятностей на $\mathcal{L}$; следуя [5], [6], [9], [10], [12], через $\mathbb{T}(\mathcal{L})$ обозначаем множество всех $\mu \in \mathbb{P}(\mathcal{L})$ таких, что $\forall L \in \mathcal{L} \ \ (\mu(L) = 0) \vee (\mu(L) = 1)$. Называем для краткости такие конечно-аддитивные вероятности $(0,1)$-мерами,

$$\mathbb{T}(\mathcal{L}) \subset \mathbb{P}(\mathcal{L}) \subset (\mathrm{add})_+[\mathcal{L}] \subset \mathbb{A}(\mathcal{L}).$$

В пространстве $\mathbb{B}(E)$ всех ограниченных вещественнозначных функций на E с традиционной sup-нормой $\|\cdot\|$ ([13], с. 261) выделяем линейное многообразие $B_0(E, \mathcal{L})$ всех ступенчатых в смысле ИП $(E, \mathcal{L})$ вещественнозначных функций на E ([2], гл. 3; [5], гл. 4; [6], гл. 3). Замыкание $B_0(E, \mathcal{L})$ в $(\mathbb{B}(E), \|\cdot\|)$ (т. е. в $\mathbb{B}(E)$ с топологией sup-нормы) обозначаем через $B(E, \mathcal{L})$, как и в [2], [5], [6], получая аналог пространства $B(S, \Sigma)$ ([13], см. также [14]). Пространство $B(E, \mathcal{L})$, как подпространство $(\mathbb{B}(E), \|\cdot\|)$, является банаховым, а пространство $B^*(E, \mathcal{L})$, топологически сопряженное к $B(E, \mathcal{L})$, изометрически изоморфно $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ с нормой-вариацией, последняя именуется обычно сильной нормой $\mathbb{A}(\mathcal{L})$. Возникающая при таком отождествлении $B^*(E, \mathcal{L})$ и

$\mathbb{A}(\mathcal{L})$ естественная $*$-слабая топология $\tau_*(\mathcal{L})$ множества $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ порождает локально выпуклый σ-компакт

$$(\mathbb{A}(\mathcal{L}), \tau_*(\mathcal{L})), \tag{4.1}$$

который является локально выпуклым отделимым σ-компактным ТП. Условия компактности в ТП (4.1) определяются известной теоремой Алаоглу ([13], гл. V). В частности ([6], с. 303),

$$(\mathbb{T}(\mathcal{L}), \tau^*_{\mathbf{T}}(\mathcal{L})), \tag{4.2}$$

где $\tau^*_{\mathbf{T}}(\mathcal{L})$ является топологией $\mathbb{T}(\mathcal{L})$, индуцированной из (4.1), есть непустой компакт, в который погружается E в виде всюду плотного подмножества. Данный компакт является нульмерным ([6], сс. 44, 45, 306; в связи с понятием нульмерности ТП см. [4], с. 529). Следуя ([6], с. 301) вводим для каждого семейства $\mathcal{H} \in \mathcal{P}(\mathcal{L})$ его индикатор в $\mathcal{L}$: $\mathbb{X}_{\mathcal{H}}$ действует из $\mathcal{L}$ в двоеточие $\{0;1\}$ по правилу

$$(\mathbb{X}_{\mathcal{H}}(L) \triangleq 1 \ \ \forall L \in \mathcal{H}) \& (\mathbb{X}_{\mathcal{H}}(\Lambda) \triangleq 0 \ \ \forall \Lambda \in \mathcal{L} \setminus \mathcal{H}).$$

Тогда ([6], с. 303) имеет место равенство

$$\mathbb{T}(\mathcal{L}) = \{\mathbb{X}_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})\}. \tag{4.3}$$

Более того, $\mathcal{F} \longmapsto \mathbb{X}_{\mathcal{F}} : \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}) \longrightarrow \mathbb{T}(\mathcal{L})$ — биекция $\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})$ на $\mathbb{T}(\mathcal{L})$.

Если $\mathcal{Z} \in \mathcal{P}(\mathcal{L})$, то через $\mathbb{T}^0(\mathcal{L} \mid \mathcal{Z})$ условимся обозначать множество всех $\mu \in \mathbb{T}(\mathcal{L})$ таких, что $\mu(L) = 1 \quad \forall L \in \mathcal{Z}$. Если $\mathcal{Z} \in \mathcal{P}(\mathcal{L})$, $\mathcal{F} \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})$, $\mu \in \mathbb{T}(\mathcal{L})$ и $\mu = \mathbb{X}_{\mathcal{F}}$, то

$$(\mu \in \mathbb{T}^0(\mathcal{L} \mid \mathcal{Z})) \Longleftrightarrow (\mathcal{F} \in \mathbb{F}^0_*(\mathcal{L} \mid \mathcal{Z})). \tag{4.4}$$

Использовав (4.3), (4.4), можно перевести утверждения разделов 3, 4 на язык $(0,1)$-мер (напомним, что условие 2.1 предполагается выполненным).

Предложение 4.1. $\mathbf{AS} = \{z \in \mathbf{H} \mid \mathbb{T}^0(\mathcal{L} \mid \mathcal{E} \cup \mathbf{h}^{-1}[N^0_\theta(z)]) \neq \emptyset\}$.

Доказательство является очевидным следствием теоремы 2.1, (4.3) и (4.4). По аналогии с (3.7) полагаем

$$(\mathbb{T} - \mathrm{sol})[E; \mathcal{L}] \triangleq \bigcup_{z \in \mathbf{H}} \mathbb{T}^0(\mathcal{L} \mid \mathcal{E} \cup \mathbf{h}^{-1}[N^0_\theta(z)]), \tag{4.5}$$

получая подмножество $\mathbb{T}(\mathcal{L})$, (4.5) есть множество всех $\mu \in \mathbb{T}(\mathcal{L})$ таких, что $\exists z \in \mathbf{H}$:

$$\mu(L) = 1 \ \ \forall L \in \mathcal{E} \cup \mathbf{h}^{-1}[N^0_\theta(z)]. \tag{4.6}$$

С учетом (4.3), (4.4) и построений раздела 3 можно рассматривать (4.6) как вариант асимптотической реализации z в условиях $\mathcal{E}$-ограничения. При этом $(0,1)$-меры из множества (4.5) могут рассматриваться как ПР, формирующие (см. предложение 4.1) МП $\mathbf{AS}$. Само свойство (4.6) имеет смысл асимптотической реализуемости точки $z \in \mathbf{H}$. Действительно, если $\mu \in \mathbb{T}(\mathcal{L})$ реализует z в смысле (4.6), то, подбирая с учетом (4.3) ультрафильтр $\mathcal{F} \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})$ со свойством $\mu = \mathbb{X}_{\mathcal{F}}$, в силу (4.4) имеем $\mathcal{F} \in \mathbb{F}^0_*(\mathcal{L} \mid \mathcal{E} \cup \mathbf{h}^{-1}[N^0_\theta(z)])$. Теперь следует использовать рассуждения раздела 3 (см. (3.7)), приводящие к осуществлению (2.7) для рационально подобранной (по $\mathcal{F}$) направленности в E. Если же, напротив, имеем (2.7) для какой-то направленности в E, то по рецепту (2.4) конструируется фильтр $\mathcal{F}_*$ в ИП $(E, \mathcal{L})$ со свойствами, заложенными в (3.1), после чего можно подобрать ультрафильтр $\mathcal{F}^* \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})$ такой, что $\mathcal{F}_* \subset \mathcal{F}^*$, и, наконец, построить $\mu \in \mathbb{T}(\mathcal{L})$ в виде $\mathbb{X}_{\mathcal{F}^*}$, свойство (4.6) при этом будет выполнено.

Предложение 4.2. *Пусть* $(\mathbf{H}, \theta)$ — *хаусдорфово ТП. Тогда* $\forall \mu \in (\mathbb{T} - \mathrm{sol})[E; \mathcal{L}] \quad \exists! z \in \mathbf{H}$: $\mu(L) = 1 \quad \forall L \in \mathbf{h}^{-1}[N^0_\theta(z)]$.

Доказательство. Выберем произвольно $\mu \in (\mathbb{T}-\mathrm{sol})[E;\mathcal{L}]$. С учетом (4.5) подберем $z_0 \in \mathbf{H}$ так, чтобы $\mu \in \mathbb{T}^0(\mathcal{L} \mid \mathcal{E} \cup \mathbf{h}^{-1}[N_\theta^0(z_0)])$. Тогда

$$\mu(L) = 1 \ \ \forall L \in \mathbf{h}^{-1}[N_\theta^0(z_0)].$$

Пусть теперь $z_* \in \mathbf{H}$ обладает свойством $\mu(L) = 1 \quad \forall L \in \mathbf{h}^{-1}[N_\theta^0(z_*)]$. Напомним, что $\mu \in \mathbb{T}(\mathcal{L})$. С учетом (4.3) подберем ультрафильтр $\mathcal{F} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ так, чтобы $\mu = \mathbb{X}_\mathcal{F}$. Из (4.4) имеем

$$\mathcal{F} \in \mathbb{F}_*^0(\mathcal{L} \mid \mathcal{E} \cup \mathbf{h}^{-1}[N_\theta^0(z_0)]) \tag{4.7}$$

и в силу (3.7) $\mathcal{F} \in (\mathbb{F}_0^* - \mathrm{sol})[E;\mathcal{L}]$, тогда, в частности, $\mathcal{F} \in (\mathbb{F}_* - \mathrm{sol})[E;\mathcal{L}]$. Из предложения 3.1 получаем

$$\exists! z \in \mathbf{H} : \mathbf{h}^{-1}[N_\theta^0(z)] \subset \mathcal{F}. \tag{4.8}$$

С помощью (4.7) имеем вложение $\mathbf{h}^{-1}[N_\theta^0(z_0)] \subset \mathcal{F}$. Следовательно, с учетом (4.8)

$$(\mathbf{h}^{-1}[N_\theta^0(z_*)] \subset \mathcal{F}) \Longrightarrow (z_0 = z_*). \tag{4.9}$$

По выбору z_* и $\mathcal{F}$ имеем посылку импликации (4.9), тогда $z_0 = z_*$. □

Теорема 4.1. *Пусть триплет* $(\mathbf{H}, \theta, \mathbf{h})$ *является компактифицируемым. Тогда*

$$(\mathbb{T}-\mathrm{sol})[E;\mathcal{L}] = \mathbb{T}^0(\mathcal{L} \mid \mathcal{E}).$$

Доказательство. Из (4.5) имеем вложение $(\mathbb{T}-\mathrm{sol})[E;\mathcal{L}] \subset \mathbb{T}^0(\mathcal{L} \mid \mathcal{E})$. Выберем произвольно $\mu \in \mathbb{T}^0(\mathcal{L} \mid \mathcal{E})$. Тогда $\mu \in \mathbb{T}(\mathcal{L})$ и при этом (4.3) $\mu = \mathbb{X}_\mathcal{F}$ для некоторого $\mathcal{F} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$. Из (4.4) вытекает (по выбору μ) свойство $\mathcal{F} \in \mathbb{F}_*^0(\mathcal{L} \mid \mathcal{E})$ и с учетом теоремы 3.1 $\mathcal{F} \in (\mathbb{F}_*^0 - \mathrm{sol})[E;\mathcal{L}]$. Используя (3.7), подберем такое $z \in \mathbf{H}$, что

$$\mathcal{F} \in \mathbb{F}_*^0(\mathcal{L} \mid \mathcal{E} \cup \mathbf{h}^{-1}[N_\theta^0(z)]),$$

это означает, в частности, справедливость вложения $\mathcal{E} \cup \mathbf{h}^{-1}[N_\theta^0(z)] \subset \mathcal{F}$ и, следовательно, для $\mu = \mathbb{X}_\mathcal{F}$ имеем (4.6). В итоге $\mu \in \mathbb{T}^0(\mathcal{L} \mid \mathcal{E} \cup \mathbf{h}^{-1}[N_\theta^0(z)])$. Из (4.5) имеем $\mu \in (\mathbb{T}-\mathrm{sol})[E;\mathcal{L}]$. Итак, $\mathbb{T}^0(\mathcal{L} \mid \mathcal{E}) \subset (\mathbb{T}-\mathrm{sol})[E;\mathcal{L}]$, что и доставляет требуемое равенство. □

Предложение 4.3. *Если* $\mathcal{Z} \in \mathcal{P}(\mathcal{L})$, *то* $\mathbb{T}^0(\mathcal{L} \mid \mathcal{Z})$ *— множество, компактное в ТП* (4.1).

Доказательство. Пусть $\mathcal{Z} \in \mathcal{P}(\mathcal{L})$. Множество $\mathbb{T}^0(\mathcal{L} \mid \mathcal{Z})$ сильно ограничено ([6], с. 42). Проверим его $*$-слабую замкнутость. Пусть $(\mathbf{D}, \preceq, \varphi)$ — направленность в $\mathbb{T}^0(\mathcal{L} \mid \mathcal{Z})$, $\mu \in \mathbb{A}(\mathcal{L})$ и

$$(\mathbf{D}, \preceq, \varphi) \xrightarrow{\tau_*(\mathcal{L})} \mu. \tag{4.10}$$

Пусть $Z \in \mathcal{Z}$, тогда $\varphi(d)(Z) = 1 \quad \forall d \in \mathbf{D}$. Множество $\mathbb{T}(\mathcal{L})$ компактно в ТП (4.1) ([6], сс. 42, 303) и, в частности, замкнуто в этом ТП. Поскольку $(\mathbf{D}, \preceq, \varphi)$ — направленность в $\mathbb{T}(\mathcal{L})$, из (4.10) имеем свойство $\mu \in \mathbb{T}(\mathcal{L})$. Поэтому ([5], с. 36) в силу (4.10)

$$(\mathbf{D}, \preceq, \varphi) \xrightarrow{\tau_\mathbf{T}^*(\mathcal{L})} \mu, \tag{4.11}$$

причем ([6], сс. 303, 305) $\tau_\mathbf{T}^*(\mathcal{L})$ совпадает с топологией $\mathbb{T}(\mathcal{L})$, индуцированной из тихоновского произведения $(\mathbb{R}^\mathcal{L}, \otimes^\mathcal{L}(\tau_\mathbb{R}))$ экземпляров ТП $(\mathbb{R}, \tau_\mathbb{R})$, где $\tau_\mathbb{R}$ — обычная $|\cdot|$-топология вещественной прямой $\mathbb{R}$, с индексным множеством $\mathcal{L}$ ([6], с. 35). Тогда из (4.11) имеем ([5], с. 36) сходимость $(\mathbf{D}, \preceq, \varphi) \xrightarrow{\otimes^\mathcal{L}(\tau_\mathbb{R})} \mu$. Это означает, в частности, что ([6], с. 35) имеет место сходимость

$$(\mathbf{D}, \preceq, (\varphi(d)(Z))_{d \in \mathbf{D}}) \xrightarrow{\tau_\mathbb{R}} \mu(Z).$$

В итоге $\mu(Z) = 1$. Итак, $\mu(L) = 1 \quad \forall L \in \mathcal{Z}$. Следовательно, $\mu \in \mathbb{T}^0(\mathcal{L} \mid \mathcal{Z})$. Поскольку выбор $(\mathbf{D}, \preceq, \varphi)$ и μ со свойством (4.10) был произвольным, установлено свойство замкнутости $\mathbb{T}^0(\mathcal{L} \mid \mathcal{Z})$ в ТП (4.1), что с учетом уже упоминавшейся сильной ограниченности множества $\mathbb{T}^0(\mathcal{L} \mid \mathcal{Z})$ означает ([6], с. 42) компактность этого множества в смысле (4.1). □

Из предложения 4.3 вытекают следующие свойства:

1) $\mathbb{T}^0(\mathcal{L} \mid \mathcal{E})$ есть множество, компактное в ТП (4.1);

2) если $z \in \mathbf{H}$, то $\mathbb{T}^0(\mathcal{L} \mid \mathcal{E} \cup \mathbf{h}^{-1}[N_\theta^0(z)])$ есть множество, компактное в ТП (4.1);

3) множество $(\mathbb{T} - \mathrm{sol})[E; \mathcal{L}] \subset \mathbb{T}^0(\mathcal{L} \mid \mathcal{E})$ предкомпактно в ТП (4.1): замыкание $(\mathbb{T} - \mathrm{sol})[E; \mathcal{L}]$ в (4.1) компактно;

4) если триплет $(\mathbf{H}, \theta, \mathbf{h})$ является компактифицируемым, то $(\mathbb{T} - \mathrm{sol})[E; \mathcal{L}]$ есть множество, компактное в ТП (4.1).

Полезно охарактеризовать также упомянутые множества ПР в виде подпространств нульмерного компакта (4.2). Действительно, из предложения (4.3) имеем свойство: если $\mathcal{Z} \in \mathcal{P}(\mathcal{L})$, то $\mathbb{T}^0(\mathcal{L} \mid \mathcal{Z})$ есть подмножество $\mathbb{T}(\mathcal{L})$, компактное в ТП (4.2); здесь используется свойство транзитивности операции перехода к подпространству ТП. Свойства 1)–4) могут рассматриваться как утверждения о компактности и предкомпактности в ТП (4.2). Особо отметим комбинацию теоремы 4.1 и свойств 1), 4).

Заметим, что к случаю компактифицируемого триплета $(\mathbf{H}, \theta, \mathbf{h})$ можно, в частности, свести постановку, изучаемую в ([15], §§ 8, 9), для которой использование не только секвенциальных ПР существенно. Речь идет об управлении линейной системой, у которой коэффициенты при управлении определяются разрывными функциями на конечном промежутке времени ([15], сс. 68, 69). Данная постановка может быть осложнена нелинейностью, характеризующей безынерционное преобразование траектории в ([15], с. 69). Выбор управляющей функции может быть стеснен при этом условием на энергоресурс в форме импульсного ограничения (8.11) из ([15], с. 71). Это условие, типичное для инженерных постановок задач управления, определяет фактически и конкретный вариант "компактификатора" $(\mathbb{K}, \tau, p, q)$ раздела 3. Так, в простейшей версии задачи об исследовании асимптотики областей достижимости при ослаблении фазовых ограничений с использованием окрестностей в топологии поточечной сходимости (оператор $\mathbf{h}$ может определяться соотношениями, подобными (9.4) из [15]) компакт ([4], с. 208) $(\mathbb{K}, \tau)$ в определении раздела 3 может быть задан в виде K_c ([15], с. 71) с относительной $*$-слабой топологией, отвечающей подпространству ТП типа (4.1). Тогда оператор p в определении раздела 3 соответствует погружению обычных управлений в пространство обобщенных элементов на основе построения неопределенного интеграла по соответствующему сужению меры Лебега ([15], с. 71), а непрерывный оператор q может быть задан в форме соотношения (8.8) из ([15], с. 70). В этом случае (3.7) и (4.5) можно использовать с целью определения множества ПР, формирующих весьма важный на практике тип МП, характеризующий вышеупомянутую асимптотику областей достижимости при последовательном ослаблении ограничений траекторного характера. Теоремы 3.1 и 4.1 вполне применимы к этой постановке ($\mathcal{E}$ определяется здесь серией ослабленных условий на траекторию). Данное представление множества ПР существенно и в задаче об исследовании асимптотики пучков допустимых траекторий при последовательном ослаблении фазовых ограничений (см. преобразования типа (8.9) из ([15], с. 70)); в этой связи см. примеры и конструкции ослабленных условий на траекторию в [16]. Отметим здесь же общие постановки задач импульсного управления линейными системами с использованием обобщенных функций в [17].

Литература

1. Келли Дж.Л. *Общая топология.* – М.: Наука, 1981. – 431 с.
2. Chentsov A.G. *Finitely additive measures and relaxations of extremal problems.* – New York, London, and Moscow: Plenum Publishing Corporation, 1996. – 244 p.
3. Куратовский К., Мостовский А. *Теория множеств.* – М.: Мир, 1970. – 416 с.
4. Энгелькинг Р. *Общая топология.* – М.: Мир, 1986. – 751 с.
5. Chentsov A.G. and Morina S.I. *Extensions and relaxations.* – Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publishers, 2002. – 408 p.

6. Chentsov A.G. *Asymptotic attainability.* – Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publishers, 2002. – 322 p.
7. Варга Дж. *Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями.* – М.: Наука, 1977. – 624 с.
8. Янг Л. *Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления.* – М.: Мир, 1970. – 488 с.
9. Ченцов А.Г. *Двузначные меры как обобщенные элементы: проблема расширения системы условий* // Докл. РАН. – 2000. – Т. 374. – № 5. – С. 611–614.
10. Chentsov A.G. *Two-valued measures and zero-dimensional topologies* // Functional Differential Equations. – 2002. – V. 9. – № 1–2. – P. 71–89.
11. Неве Ж. *Математические основы теории вероятностей.* – М.: Мир, 1969. – 309 с.
12. Chentsov A.G. *Two-valued measures: finite additivity and countable additivity* // Functional Differential Equations. – 2000. – № 3–4. – P. 231–257.
13. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. *Линейные операторы. Общая теория.* – М.: Ин. лит., 1962. – 895 с.
14. Bhaskara Rao K.P.S., Bhaskara Rao M. *Theory of charges. A study of finitely additive measures.* – N. Y.: Acad. Press, 1983. – 253 p.
15. Ченцов А.Г. *К вопросу о построении корректных расширений в классе конечно-аддитивных мер* // Изв. вузов. Математика. – 2002. – № 2. – С. 58–80.
16. Chentsov A.G. *Universal properties of generalized integral constraints in the class of finitely additive measures* // Functional Differential Equations. – 1998. – V. 5. – № 1–2. – P. 69–105.
17. Красовский Н.Н. *Теория управления движением.* – М.: Наука, 1968. – 475 с.

Институт математики и механики Уральского отделения Российской Академии наук

Поступила
01.04.2003