ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2001 МАТЕМАТИКА № 11 (474)

УДК 517.958

Т.Г. СУКАЧЕВА, О.П. МАТВЕЕВА

ЗАДАЧА ТЕРМОКОНВЕКЦИИ НЕСЖИМАЕМОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ ЖИДКОСТИ КЕЛЬВИНА–ФОЙГТА НЕНУЛЕВОГО ПОРЯДКА

Система уравнений

$$\begin{aligned}
&(1-\lambda\nabla^2)\mathbf{v}_t = \nu\nabla^2\mathbf{v} - (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} + \sum_{l=1}^{k}\beta_l\nabla^2\mathbf{w}_l - g\mathbf{q}\theta - \mathbf{p} + \mathbf{f},\\
&0 = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{v}),\\
&\frac{\partial\mathbf{w}_l}{\partial t} = \mathbf{v} + \alpha_l\mathbf{w}_l, \quad \alpha_l \in \mathbb{R}_-, \quad l = \overline{1,k},\\
&\theta_t = \varkappa\nabla^2\theta - \mathbf{v}\cdot\nabla\theta + \mathbf{v}\cdot\mathbf{q}
\end{aligned} \tag{1}$$

моделирует эволюцию скорости $\mathbf{v} = (v_1,\dots,v_n)$, $v_i = v_i(x,t)$, градиента давления $\mathbf{p} = (p_1,\dots,p_n)$, $p_i = p_i(x,t)$ и температуры $\theta = \theta(x,t)$ несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина–Фойгта порядка $k > 0$ [1], [2]. Параметры $\lambda \in \mathbb{R}$, $\nu \in \mathbb{R}_+$ и $\varkappa \in \mathbb{R}_+$ характеризуют упругость, вязкость и теплопроводность жидкости соответственно; $g \in \mathbb{R}_+$ — ускорение свободного падения; вектор $\mathbf{q} = (0,\dots,0,1)$ — орт в $\mathbb{R}^n$. Параметры $\beta_l \in \mathbb{R}_+$, $l = \overline{1,k}$, определяют время ретардации (запаздывания) давления. Свободный член $\mathbf{f} = (f_1,\dots,f_n)$, $f_i = f_i(x,t)$, отвечает внешнему воздействию на жидкость.

Исследуем разрешимость первой начально-краевой задачи

$$\begin{aligned}
&\mathbf{v}(x,0) = \mathbf{v}_0(x), \quad \mathbf{w}_l(x,0) = \mathbf{w}_{l_0}(x), \quad \theta(x,0) = \theta_0(x) \ \ \forall x \in \Omega;\\
&\mathbf{v}(x,t) = 0, \quad \mathbf{w}_l(x,t) = 0, \quad \theta(x,t) = 0 \ \ \forall (x,t) \in \partial\Omega\times\mathbb{R}_+, \quad l = \overline{1,k},
\end{aligned} \tag{2}$$

для системы (1). Здесь $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2,3,4$, — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞.

Ранее задача (1), (2) в частном случае ($k = 0$, $f = f(x)$) изучалась Г.А. Свиридюком [3]. Для несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина–Фойгта порядка $k > 0$ с нестационарным свободным членом $f(x,t)$ указанная задача рассматривается впервые.

В статье устанавливается локальная однозначная разрешимость задачи (1), (2). Эту задачу мы рассматриваем в рамках теории уравнений типа Соболева на основе понятия относительно p-секториального оператора и полугруппового подхода, предложенного в [4].

1. Абстрактная задача

Пусть $\mathcal{U}$ и $\mathcal{F}$ — банаховы пространства, оператор $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{F})$, т.е. линеен и непрерывен, $\ker L \neq \{0\}$; оператор $M : \operatorname{dom} M \to \mathcal{F}$ линеен, замкнут и плотно определен в $\mathcal{U}$. Обозначим $\mathcal{U}_M = \{u \in \operatorname{dom} M : \|u\| = \|M\,u\|_{\mathcal{F}} + \|u\|_{\mathcal{U}}\}$. Пусть оператор F принадлежит $C^\infty(\mathcal{U}_M;\mathcal{F})$, функция f принадлежит $C^\infty(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathcal{F})$.

Рассмотрим задачу Коши

$$u(0) = u_0 \tag{3}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Международного фонда Дж. Сороса (грант ISSEP d97-756).

для *полулинейного нестационарного уравнения типа Соболева*

$$L\dot{u} = Mu + F(u) + f(t). \tag{4}$$

Локальным решением (далее просто *решением*) задачи (3), (4) назовем вектор-функцию $u \in \mathcal{C}^\infty((0,T);\mathcal{U}_M)$, удовлетворяющую уравнению (4) и такую, что $u(t) \to u_0$ при $t \to 0+$.

Будем рассматривать задачу (3), (4) при условии, что оператор M сильно (L,p)-секториален [4]. Известно, что при этом условии решение задачи (3), (4) может быть неединственным [5]. Поэтому в дальнейшем мы ограничиваемся поиском только таких решений уравнения (4), которые являются *квазистационарными полутраекториями*.

Определение 1. Пусть $\mathcal{U} = \mathcal{U}_0 \oplus \mathcal{U}_1$, причем $\ker L \subset \mathcal{U}_0$. Решение $u = v + w$, где $v(t) \in \mathcal{U}_0$, $w(t) \in \mathcal{U}_1$ при всех $t \in (0,T)$, назовем *квазистационарной полутраекторией*, если $L\dot{v} \equiv 0$.

Замечание 1. В динамическом случае понятие квазистационарной полутраектории совпадает с понятием квазистационарной траектории [5].

Также хорошо известно [6]–[8], что решения задачи (3), (4) существуют не для всех $u_0 \in \mathcal{U}_M$. Поэтому введем

Определение 2. Множество $\mathcal{B}^t \subset \mathcal{U}_M \times \overline{\mathbb{R}}_+$ назовем *конфигурационным пространством* уравнения (4), если для любой точки $u_0 \in \mathcal{U}_M$ такой, что $(u_0, 0) \in \mathcal{B}^0$, существует единственное решение задачи (3), (4), причем $(u(t), t) \in \mathcal{B}^t$.

Замечание 2. Если $\mathcal{B}^t = \mathcal{B} \times \overline{\mathbb{R}}_+$, где $\mathcal{B} \subset \mathcal{U}_M$, то множество $\mathcal{B}$ называется *фазовым пространством* уравнения (4) [6], [7].

В силу того, что оператор M сильно (L,p)-секториален, пространства $\mathcal{U}$ и $\mathcal{F}$ расщепляются в прямые суммы $\mathcal{U} = \mathcal{U}^0 \oplus \mathcal{U}^1$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}^0 \oplus \mathcal{F}^1$, где $\mathcal{U}^0$, $\mathcal{F}^0$ — ядра, а $\mathcal{U}^1$, $\mathcal{F}^1$ — образы аналитических разрешающих полугрупп

$$U^t = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma R^L_\mu(M) e^{\mu t} d\mu, \quad F^t = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma L^L_\mu(M) e^{\mu t} d\mu$$

($\Gamma \subset \rho^L(M)$ — контур такой, что $\arg\mu \to \pm\Theta$ при $|\mu| \to +\infty$) линейного однородного уравнения

$$L\dot{u} = Mu. \tag{5}$$

Обозначим через $L_k(M_k)$ сужение оператора $L(M)$ на $\mathcal{U}^k$ $(\mathcal{U}^k \cap \operatorname{dom} M)$, $k = 0,1$. Тогда $L_k : \mathcal{U}^k \to \mathcal{F}^k$, $M_k : \mathcal{U}^k \cap \operatorname{dom} M \to \mathcal{F}^k$, $k = 0,1$, причем M_0 и L_1 являются линейными непрерывными операторами и имеют ограниченные обратные операторы.

В силу этих результатов, опубликованных в [4], приведем задачу (3), (4) к эквивалентной системе, которую назовем *нормальной формой* задачи (3), (4),

$$\begin{aligned} R\dot{u}^0 &= u^0 + G(u) + g(t), \quad u^0(0) = u^0_0, \\ \dot{u}^1 &= Su^1 + H(u) + h(t), \quad u^1(0) = u^1_0. \end{aligned} \tag{6}$$

Здесь $u^k \in \mathcal{U}^k$, $k = 0,1$, $u = u^0 + u^1$, операторы $R = M_0^{-1}L_0$, $S = L_1^{-1}M_1$, $G = M_0^{-1}(I-Q)F$, $H = L_1^{-1}QF$, $g = M_0^{-1}(I-Q)f$, $h = L_1^{-1}Qf$, где $Q \in \mathcal{L}(\mathcal{F})$ — проектор, расщепляющий пространство $\mathcal{F}$ требуемым образом.

Далее будем изучать такие квазистационарные полутраектории, для которых $R\dot{u}^0 \equiv 0$. Для этого предположим, что оператор R — *бирасщепляющий* [9], т. е. его ядро $\ker R$ и образ $\operatorname{im} R$ дополняемы в пространстве $\mathcal{U}$. Обозначим $\mathcal{U}^{00} = \ker R$, а через $\mathcal{U}^{01} = \mathcal{U}^0 \ominus \mathcal{U}^{00}$ обозначим некоторое дополнение к подпространству $\mathcal{U}^{00}$. Тогда первое уравнение (6) примет вид

$$R\dot{u}^{01} = u^{00} + u^{01} + G(u) + g(t), \tag{7}$$

где $u = u^{00} + u^{01} + u^1$.

Теорема 1. *Пусть оператор M сильно (L,p)-секториален, оператор R — бирасщепляющий и существует квазистационарная полутраектория* (4). *Тогда она удовлетворяет соотношениям*

$$0 = u^{00} + u^{01} + G(u) + g(t), \quad u^{01} = \mathrm{const}\,. \tag{8}$$

Доказательство. Первое соотношение в (8) вытекает из уравнения (7) в силу того, что $R\dot{u}^0 = R\dot{u}^{01} \equiv 0$, второе — из последнего тождества в силу того, что по теореме Банаха об обратном операторе сужение оператора $Q_R R(I-P_R)$ на $\mathcal{U}^{01}$ есть непрерывно обратимый оператор. Здесь Q_R и P_R — проекторы на $\operatorname{im} R$ и $\ker R$ соответственно, $\ker P_R = \mathcal{U}^{01}$.

Замечание 3. Второе соотношение в (8) поясняет смысл термина “квазистационарные полутраектории”, т. е. это такие полутраектории, которые “стационарны по некоторым переменным”. Они с необходимостью лежат в некоторой плоскости $(I-P_R)u^0 = \mathrm{const}$.

Теорема 1 дает необходимые условия существования квазистационарной полутраектории уравнения (4). Получим теперь достаточные условия.

Известно, что при условии сильной (L,p)-секториальности оператора M оператор S секториален. Следовательно, он порождает на $\mathcal{U}^1$ аналитическую полугруппу, которую обозначим через $\{U_1^t : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$, т. к. оператор U_1^t есть сужение оператора U^t на $\mathcal{U}^1$. Из того, что $\mathcal{U} = \mathcal{U}^0 \oplus \mathcal{U}^1$, следует существование проектора $P \in \mathcal{L}(\mathcal{U})$, соответствующего данному расщеплению. Оказывается, что $P \in \mathcal{L}(\mathcal{U}_M)$, и тогда $\mathcal{U}_M = \mathcal{U}_M^0 \oplus \mathcal{U}_M^1$, причем вложение $\mathcal{U}_M^k \subset \mathcal{U}^k$, $k = 0,1$, плотно и непрерывно [4].

Теорема 2. *Пусть оператор M сильно (L,p)-секториален, оператор R — бирасщепляющий, оператор $F \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_M;\mathcal{F})$, а вектор-функция $f \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathcal{F})$. Пусть*

(A1) *в некоторой окрестности $\mathcal{O}_{u_0} \subset \mathcal{U}_M$ точки u_0 выполнено соотношение*

$$0 = u_0^{01} + (I-P_R)(G(u^{00} + u_0^{01} + u^1) + g(t)); \tag{9}$$

(A2) *проектор $P_R \in \mathcal{L}(\mathcal{U}_M^0)$, оператор $I + P_R G'_{u_0} : \mathcal{U}_M^{00} \to \mathcal{U}_M^{00}$ — топлинейный изоморфизм* $(\mathcal{U}_M^{00} = \mathcal{U}_M \cap \mathcal{U}^{00})$;

(A3) *для аналитической полугруппы $\{U_1^t : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ выполнено соотношение*

$$\int_0^\tau \|U_1^t\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U}^1;\mathcal{U}_M^1)} dt < \infty \quad \forall \tau \in \mathbb{R}_+. \tag{10}$$

Тогда существует единственное решение задачи (3), (4), *являющееся квазистационарной полутраекторией уравнения* (4).

Доказательство. Рассмотрим окрестность $\mathcal{O}_{u_0}$ точки u_0. В силу условия (A1) в этой окрестности первое уравнение (6) примет вид

$$0 = u^{00} + P_R(G(u^{00} + u_0^{01} + u^1) + g(t)). \tag{11}$$

Тогда из (A2) в силу теоремы о неявной функции существуют окрестности $\mathcal{O}_{u_0^{00}} \subset \mathcal{U}_M^{00}$ $(\mathcal{U}_M^{00} = \mathcal{U}^{00} \cap \mathcal{U}_M)$, $\mathcal{O}_{u_0^1} \subset \mathcal{U}_M^1$ $(\mathcal{U}_M^1 = \mathcal{U}^1 \cap \mathcal{U}_M)$ точек $u_0^{00} = P_R(I-P)u_0$, u_0^1 соответственно и отображение $\delta : \mathcal{O}_{u_0^1} \to \mathcal{O}_{u_0^{00}}$ класса $\mathcal{C}^\infty$ такое, что уравнение

$$u^{00} = \delta(u^1, t) \tag{12}$$

эквивалентно уравнению (11).

Следовательно, второе уравнение (6) в силу (12) в окрестности $\mathcal{O}_{u_0^1}$ примет вид

$$\dot{u}^1 = Su^1 + H(\delta(u^1,t) + u_0^{01} + u^1) + h(t), \tag{13}$$

где оператор $H : \mathcal{O}_{u_0^1} \to \mathcal{U}^1$ принадлежит классу $\mathcal{C}^\infty$ по построению.

Для доказательства однозначной разрешимости задачи $u^1(0) = u_0^1$ для уравнения (13) воспользуемся методом Соболевского–Танабэ [10]. В силу (A3), гладкости оператора H и вектор-функции h все условия теорем 9.4, 9.6 и 9.7 в [10] выполнены. Поэтому, если $u_0^1 \in \mathcal{U}_M^1$, то при некотором $T \in \mathbb{R}_+$ существует единственное решение $u^1 = u^1(t)$, $t \in [0,T)$, уравнения (13) такое, что $u^1(t) \to u_0^1$ при $t \to 0+$ в топологии $\mathcal{U}_M^1$.

Итак, квазистационарная полутраектория в данном случае будет иметь вид $u = u^1 + \delta(u^1,t) + u_0^{01}$.

Замечание 4. Условие (10) для обычных аналитических полугрупп, имеющих оценку $\|U_1^t\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U}^1;\mathcal{U}_M^1)} < t^{-1}\,\mathrm{const}$, не выполняется. Обозначим через $\mathcal{U}_\alpha^1 = [\mathcal{U}^1;\mathcal{U}_M^1]_\alpha$, $\alpha \in [0,1]$, некоторое интерполяционное пространство, построенное по оператору S. В теореме 2 условие $F \in C^\infty(\mathcal{U}_M^1;\mathcal{F})$, $f \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathcal{F})$ дополним условием $H \in C^\infty(\mathcal{U}_M^1;\mathcal{U}_\alpha^1)$, $h \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathcal{U}_\alpha^1)$, а соотношение (10) заменим соотношением

$$\int_0^\tau \|U_1^t\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U}^1;\mathcal{U}_\alpha^1)} dt < \infty \quad \forall \tau \in \mathbb{R}_+. \tag{14}$$

Тогда утверждение теоремы 2 не изменится. Обсуждение этого круга вопросов см. в ([10], гл. 9).

Замечание 5. Из приведенных выше рассуждений следует, что окрестность $\mathcal{O}_{u_0}$ является частью конфигурационного пространства уравнения (4).

Пусть теперь $\mathcal{U}_k$ и $\mathcal{F}_k$ — банаховы пространства, операторы $A_k \in \mathcal{L}(\mathcal{U}_k, \mathcal{F}_k)$, а операторы $B_k : \mathrm{dom}\, B_k \to \mathcal{F}_k$ линейны и замкнуты с областями определений $\mathrm{dom}\, B_k$, плотными в $\mathcal{U}_k$, $k = 1,2$. Построим пространства $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ и операторы $L = A_1 \otimes A_2$, $M = B_1 \otimes B_2$. По построению $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{F})$, а оператор $M : \mathrm{dom}\, M \to \mathcal{F}$ линеен, замкнут и плотно определен, $\mathrm{dom}\, M = \mathrm{dom}\, B_1 \times \mathrm{dom}\, B_2$.

Теорема 3. *Пусть операторы B_k сильно (A_k, p_k)-секториальны, $k = 1,2$. Тогда оператор M сильно (L,p)-секториален, $p = \max(p_1,p_2)$.*

Доказательство проводится аналогично доказательству леммы 1 из ([11], § 2, гл. 4).

2. Конкретная интерпретация

Для того, чтобы редуцировать задачу (1), (2) к задаче (3), (4), введем, следуя [12], [13], пространства $\mathbf{H}_\sigma^2$, $\mathbf{H}_\pi^2$, $\mathbf{H}_\sigma$ и $\mathbf{H}_\pi$, где $\mathbf{H}_\sigma^2$ и $\mathbf{H}_\sigma$ — подпространства соленоидальных функций в пространствах $(W_2^2(\Omega))^n \cap (\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))^n$ и $(L_2(\Omega))^n$ соответственно, а $\mathbf{H}_\pi^2$ и $\mathbf{H}_\pi$ — их ортогональные (в смысле $(L_2(\Omega))^n$) дополнения. Обозначим через Σ ортопроектор на $\mathbf{H}_\sigma$, причем его сужение на пространство $(W_2^2(\Omega))^n \cap (\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))^n$ будем обозначать тем же символом. Положим $\Pi = I - \Sigma$. Формулой $A = \nabla^2 E_n : \mathbf{H}_\sigma^2 \oplus \mathbf{H}_\pi^2 \to \mathbf{H}_\sigma \oplus \mathbf{H}_\pi$, где E_n — единичная матрица порядка n, зададим линейный непрерывный оператор с дискретным конечнократным спектром $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$, сгущающимся лишь на $-\infty$. Формулой $B : \mathbf{v} \to \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v})$ зададим линейный непрерывный сюръективный оператор $B : \mathbf{H}_\sigma^2 \oplus \mathbf{H}_\pi^2 \to \mathbf{H}_\pi$ с ядром $\ker B = \mathbf{H}_\sigma^2$. Положим $\mathcal{U}_{10} = \mathbf{H}_\sigma^2 \times \mathbf{H}_\pi^2 \times \mathbf{H}_p$, $\mathcal{F}_{10} = \mathbf{H}_\sigma \times \mathbf{H}_\pi \times \mathbf{H}_p$, где $\mathbf{H}_p = \mathbf{H}_\pi$; $\mathcal{U}_{1i} = \mathbf{H}^2 \cap \overset{\circ}{\mathbf{H}}{}^1 = \mathbf{H}_\sigma^2 \times \mathbf{H}_\pi^2$, и $\mathcal{F}_{1i} = \mathbf{L}_2 = \mathbf{H}_\sigma \times \mathbf{H}_\pi$, $i = \overline{1,k}$. Тогда пространства $\mathcal{U}_1 = \bigoplus\limits_{l=0}^{k} \mathcal{U}_{1l}$, $\mathcal{F}_1 = \bigoplus\limits_{l=0}^{k} \mathcal{F}_{1l}$. Операторы A_1 и $B_1 : \mathcal{U}_1 \to \mathcal{F}_1$ определим формулами $A_1 = \mathrm{diag}[\hat{A}_1, E_k]$, где

$$\hat{A}_1 = \begin{pmatrix} \check{A}_1 & O \\ O & O \end{pmatrix}, \quad \check{A}_1 = \begin{pmatrix} \Sigma(I-\lambda A)\Sigma & \Sigma A(I-\lambda A)\Pi \\ \Pi(I-\lambda A)\Sigma & \Pi A(I-\lambda A)\Pi \end{pmatrix};$$

$B_1 = (B_1^{ij})_{i,j=1}^2$, где

$$B_1^{11} = \begin{pmatrix} \nu\Sigma A & \nu\Sigma A & O \\ \nu\Pi A & \nu\Pi A & -I \\ O & B & O \end{pmatrix}, \quad B_1^{12} = \begin{pmatrix} \beta_1\Sigma A & \dots & \beta_k\Sigma A \\ \beta_1\Pi A & \dots & \beta_k\Pi A \\ O & \dots & O \end{pmatrix},$$

B_1^{21} содержит k строк вида (I,I,O), $B_1^{22} = \mathrm{diag}[\alpha_1,\dots,\alpha_k]$.

Замечание 6. Пространство $\mathcal{U}_1$ ($\mathcal{F}_1$) определяется точно так же, как пространство $\mathcal{U}$ ($\mathcal{F}$) в модели [13], а оператор A_1 (B_1) совпадает с оператором L (M_1) в [13].

Замечание 7. Обозначим через A_σ сужение оператора ΣA на $\mathbf{H}^2_\sigma$. По теореме Солонникова–Воровича–Юдовича спектр $\sigma(A_\sigma)$ вещественен, дискретен, конечнократен и сгущается лишь на $-\infty$.

Теорема 4. (i) *Операторы* $A_1, B_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{U}_1; \mathcal{F}_1)$, *и если* $\lambda^{-1} \notin \sigma(A)$, *то оператор* A_1 *бирасщепляющий,* $\ker A_1 = \{0\} \times \{0\} \times \mathbf{H}_p \times \underbrace{\{0\} \times \cdots \times \{0\}}_{k}$, $\operatorname{im} A_1 = \mathbf{H}_\sigma \times \mathbf{H}_\pi \times \{0\} \times \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2 \times \cdots \times \mathcal{F}_k$.

(ii) *Если* $\lambda^{-1} \notin \sigma(A) \cup \sigma(A_\sigma)$, *то оператор* B_1 (A_1, σ)*-ограничен, причем порядок несущественной особой точки в бесконечности равен единице.*

Доказательство. Утверждение теоремы 4 есть прямое следствие соответствующих результатов [13].

Замечание 8. Впервые понятие (A, σ)-ограниченного оператора B введено в [14]. Под порядком несущественной особой точки в бесконечности понимается степень нильпотентности оператора R [15], [16]. Здесь же приведены достаточные условия относительной спектральной ограниченности оператора, легко проверяемые в приложениях. Случай относительно секториального оператора рассматривался в [17]-[19].

Далее положим $\mathcal{U}_2 = \mathcal{F}_2 = L_2(\Omega)$ и формулой $B_2 = \varkappa\nabla^2 : \operatorname{dom} B_2 \to \mathcal{F}_2$ определим линейный замкнутый и плотно определенный оператор B_2, $\operatorname{dom} B_2 = W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Положим $A_2 \equiv I$. Тогда в силу секториальности оператора B_2 ([20], гл. 1) справедлива

Теорема 5. *Оператор* B_2 *сильно* A_2*-секториален.*

Положим $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$. Вектор u пространства $\mathcal{U}$ имеет вид $u = \operatorname{col}(u_\sigma, u_\pi, u_p, w_1, \ldots, w_k, u_\theta)$, где $\operatorname{col}(u_\sigma, u_\pi, u_p, w_1, \ldots, w_k) \in \mathcal{U}_1$, а $u_\theta \in \mathcal{U}_2$. Здесь $u_\sigma = \Sigma v$, $u_\pi = (I - \Sigma)v = \Pi v$, $u_p = \overline{p}$. Аналогичный вид имеет вектор $f \in \mathcal{F}$. Операторы L и M определим формулами $L = A_1 \otimes A_2$ и $M = B_1 \otimes B_2$. Оператор $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{F})$, а оператор $M : \operatorname{dom} M \to \mathcal{F}$ линеен, замкнут и плотно определен, $\operatorname{dom} M = \mathcal{U}_1 \times \operatorname{dom} B_2$.

Из теоремы 4 и замечания 2.1.1 [4] следует, что оператор B_1 сильно $(A_1, 1)$-секториален. В силу этого и теорем 3, 5 справедлива

Теорема 6. *Пусть* $\lambda^{-1} \notin \sigma(A)$, *тогда оператор* M *сильно* $(L, 1)$*-секториален.*

Перейдем к построению нелинейного оператора F. В данном случае его можно представить в виде $F = F_1 \otimes F_2$, где $F_1 = F_1(u_\sigma, u_\pi, u_\theta) = \operatorname{col}(-\Sigma(((u_\sigma + u_\pi) \cdot \nabla)(u_\sigma + u_\pi) + gqu_\theta), -\Pi(((u_\sigma + u_\pi) \cdot \nabla)(u_\sigma + u_\pi) + gqu_\theta), \underbrace{0, \ldots, 0}_{k+1})$, а $F_2 = F_2(u_\sigma, u_\pi, u_\theta) = (u_\sigma + u_\pi) \cdot (q - \nabla u_\theta)$. Найдем формально производную Фреше F'_u оператора F в точке u:

$$F'_u = \begin{pmatrix} \Sigma a(u_\sigma, u_\pi) & \Sigma a(u_\sigma, u_\pi) & O & \ldots & O & -g\Sigma q \\ \Pi a(u_\sigma, u_\pi) & \Pi a(u_\sigma, u_\pi) & O & \ldots & O & -g\Pi q \\ O & O & O & \ldots & O & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ O & O & O & \ldots & O & O \\ (q - \nabla u_\theta) \cdot (*) & (q - \nabla u_\theta) \cdot (*) & O & \ldots & O & -(u_\sigma + u_\pi) \cdot (*) \end{pmatrix},$$

где $a(u_\sigma, u_\pi) = -((*) \cdot \nabla)(u_\sigma + u_\pi) - ((u_\sigma + u_\pi) \cdot \nabla)(*)$, а на место символа $*$ следует ставить соответствующую координату вектора v в случае, когда отыскивается вектор $F'_u v$.

Далее, в нашем случае пространство $\mathcal{U}_M = \mathcal{U}_1 \times \operatorname{dom} B_2$ (в силу непрерывности оператора B_1). Используя стандартную технику (напр., [6], [7]), нетрудно показать, что $F'_u \in \mathcal{L}(\mathcal{U}_M; \mathcal{F})$ при любых $u \in \mathcal{U}_M$. Аналогично устанавливается, что вторая производная Фреше F''_u оператора F — непрерывный билинейный оператор из $\mathcal{U}_M \times \mathcal{U}_M$ в $\mathcal{F}$, а $F'''_u \equiv O$. Таким образом, справедлива

Теорема 7. *Оператор F приналежит $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_M;\mathcal{F})$.*

Вектор-функцию f представим в виде $f=f_1\otimes f_2$, где $f_1=\mathrm{col}(\Sigma\mathbf{f},\Pi\mathbf{f},\underbrace{0,\ldots,0}_{k+1})$, $f_2=0$. Будем предполагать, что $f\in\mathcal{C}^\infty(\overline{\mathrm{I\!R}}_+;\mathcal{F})$.

Итак, редукция задачи (1), (2) к задаче (3), (4) закончена. В дальнейшем всюду будем отождествлять задачи (1), (2) и (3), (4). Теперь перейдем к проверке условий теорем 1 и 2.

В силу теоремы 6 и теоремы 2.2.1 из [4] существует аналитическая полугруппа $\{U^t : t\in\mathrm{I\!R}_+\}$ разрешающих операторов уравнения (5), которую в данном случае естественно представить в виде $U^t=V^t\times W^t$, где V^t (W^t) — сужение оператора U^t на $\mathcal{U}_1$ $(\mathcal{U}_2)$. Так как оператор B_2 секториален, то $W^t=\exp(tB_2)$, откуда следует, что ядро этой полугруппы $\mathcal{W}^\circ=\{0\}$, а образ $\mathcal{W}^1=\mathcal{U}_2$.

Рассмотрим полугруппу $\{V^t : t\in\mathrm{I\!R}_+\}$. В силу теорем 4 и 6 и замечания 2.2.2 из [4] данная полугруппа продолжима до группы $\{V^t : t\in\mathrm{I\!R}\}$. Ее ядро $\mathcal{V}^0=\mathcal{U}_1^{00}\oplus\mathcal{U}_1^{01}$, где $\mathcal{U}_1^{00}=\{0\}\times\{0\}\times\mathbf{H}_p\times\{0\}\times\cdots\times\{0\}$ $(=\ker A_1$ по теореме 5), а $\mathcal{U}_1^{01}=\Sigma A_\lambda^{-1}A_{\lambda\pi}^{-1}[\mathbf{H}_\pi^2]\times\mathbf{H}_\pi^2\times\underbrace{\{0\}\times\cdots\times\{0\}}_{k+1}$. Здесь $A_\lambda=I-\lambda A$, $A_{\lambda\pi}$ — сужение оператора ΠA_λ^{-1} на $\mathbf{H}_\pi$. В [12] показано, что если $\lambda^{-1}\notin\sigma(A)\cup\sigma(A_\sigma)$, то оператор $A_{\lambda\pi}:\mathbf{H}_\pi\to\mathbf{H}_\pi^2$ — топлинейный изоморфизм. Обозначим через $\mathcal{U}_1^1$ образ $\mathcal{V}^1$. Тогда в силу сильной $(A_1,1)$-секториальности оператора B_1 пространство $\mathcal{U}_1$ разлагается в прямую сумму подпространств $\mathcal{U}_1=\mathcal{U}_1^{00}\oplus\mathcal{U}_1^{01}\oplus\mathcal{U}_1^1$.

Построим оператор $R=B_{10}^{-1}A_{10}\in\mathcal{L}(\mathcal{U}_1^{00}\oplus\mathcal{U}_1^{01})$, где A_{10} (B_{10}) — сужение оператора A_1 (B_1) на $\mathcal{V}^0=\mathcal{U}_1^{00}\oplus\mathcal{U}_1^{01}$. (Оператор B_{10}^{-1} существует в силу теоремы 6, следствия 2.2.2 и замечания 2.1.1 [4].) По построению $\ker R=\mathcal{U}_1^{00}$, а в [12] показано, что $\mathrm{im}\,R=\mathcal{U}_1^{01}$. Значит, оператор R бирасщепляющий. Обозначим через P_R проектор пространства $\mathcal{U}_1^{00}\oplus\mathcal{U}_1^{01}$ на $\mathcal{U}_1^{00}$ вдоль $\mathcal{U}_1^{01}$. В силу конструкции пространства $\mathcal{U}_M$ проектор $P_R\in\mathcal{L}(\mathcal{U}_M^0)$, где $\mathcal{U}_M^0=\mathcal{U}_M\cap(\mathcal{U}_1^{00}\oplus\mathcal{U}_1^{01})$ $(\equiv\mathcal{U}_1^{00}\oplus\mathcal{U}_1^{01})$. Зафиксируем это в следующем утверждении.

Лемма 1. *Пусть $\lambda^{-1}\notin\sigma(A)\cup\sigma(A_\sigma)$. Тогда оператор R бирасщепляющий, причем $P_R\in\mathcal{L}(\mathcal{U}_M^0)$.*

Введем проекторы

$$P_k=\mathrm{diag}[\hat{P}_k,0],\quad Q_k=\mathrm{diag}[\hat{Q}_k,0],\quad k=0,1.$$

(Подробное описание этих проекторов см. в [13].) Из результатов [13] в силу того, что ядро $\mathcal{W}^0=\{0\}$, следует, что $I-P=(P_0+P_1)\times O$, $Q=(I-Q_0-Q_1)\times I$, $P:\mathcal{U}\to\mathcal{U}^1$, $Q:\mathcal{F}\to\mathcal{F}^1$. Применяя проектор $I-P$ к уравнению (4) в данной транскрипции, получаем

$$\begin{gathered}\Pi(\nu A(u_\sigma+u_\pi)-((u_\sigma+u_\pi)\cdot\nabla)(u_\sigma+u_\pi)+\\ \sum_{l=1}^k\beta_l\nabla^2w_l-u_p-gqu_\theta+f)=0,\\ Bu_\pi=0.\end{gathered}\tag{15}$$

Отсюда в силу теоремы 1 и свойств оператора B получаем необходимое условие квазистационарности полутраектории $u_\pi\equiv0$, т. е. все решения задачи (если они существуют) с необходимостью должны лежать в плоскости $\mathcal{B}=\{u\in\mathcal{U}_M : u_\pi=0\}$. А так как $\Pi u_p=u_p$, то из первого уравнения (15) получаем соотношение (8) в форме

$$u_p=\Pi\Big(\nu Au_\sigma-(u_\sigma\cdot\nabla)u_\sigma+\sum_{l=1}^k\beta_l\nabla^2w_l-gqu_\theta+f\Big).\tag{16}$$

Очевидно, $P_0\equiv P_R$, поэтому второе уравнение (15) есть соотношение (9) применительно к нашей ситуации. Итак, справедлива

Лемма 2. *В условиях леммы* 1 *любое решение задачи* (1), (2) *лежит во множестве*

$$\mathcal{A}^t = \Big\{(u,t) : u \in \mathcal{U}_M, \quad ; t \in \overline{\mathbb{R}}_+, u_\pi = 0, \quad u_p = \Pi\Big(\nu A u_\sigma - (u_\sigma \cdot \nabla) u_\sigma + \\ + \sum_{l=1}^{k} \beta_l \nabla^2 w_l - g q u_\theta + f(t)\Big)\Big\}.$$

Замечание 9. Из (16) следует условие (A2) теоремы 2 для любой точки $u_0^0 \in \mathcal{U}_M^{00}$ ($\equiv \mathcal{U}_1^{00} \times \{0\}$). Поэтому ввиду замечания 5 множество $\mathcal{A}^t$ — простое банахово многообразие, $\mathcal{C}^\infty$-диффеоморфное подпространству $\mathcal{U}_1^1 \times \mathcal{U}_2$, — является кандидатом на роль конфигурационного пространства $\mathcal{B}^t \supset \mathcal{A}^t$ задачи (1), (2).

Приступим к проверке условий (10) и (14). Построим пространство $\mathcal{U}_\alpha = \mathcal{U}_1 \times \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Данное пространство, очевидно, будет интерполяционным пространством для пары $[\mathcal{U}, \mathcal{U}_M]_\alpha$, причем $\alpha = 1/2$. Как отмечено выше, полугруппа $\{U^t : t \in \mathbb{R}_+\}$ продолжается до группы $\{V_1^t : t \in \mathbb{R}\}$ на $\mathcal{U}_1^1$, где V_1^t — сужение оператора V^t на $\mathcal{U}_1^1$. Поскольку $\mathcal{U}_M^1 = \mathcal{U}_M \cap \mathcal{U}_1^1$ (по построению) и оператор B_1 непрерывен (теорема 4), то в силу равномерной ограниченности полугруппы $\{U^t : t \in \mathbb{R}_+\}$ имеем

$$\int_0^\tau \|V_1^t\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U}_1^1;\mathcal{U}_M^1)} dt \leq \mathrm{const}\, \|B_1\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U}_1;\mathcal{F}_1)} \int_0^\tau \|V_1^t\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U}_1^1)} dt < \infty \quad \forall \tau \in \mathbb{R}_+. \tag{17}$$

Далее, в силу неравенства Соболева ([10], гл. 9) полугруппа $\{W^t : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ удовлетворяет оценке

$$\int_0^\tau \|W^t\|_{\mathcal{L}(\mathrm{dom}\, B_2;\, \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))} dt < \infty. \tag{18}$$

Положим $\mathcal{U}_\alpha^1 = \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}^1$, где $\mathcal{U}^1 = \mathcal{U}_1^1 \times \mathcal{U}_2$. Тогда из (17) и (18) вытекает

Лемма 3. *В условиях леммы* 1 *выполняется соотношение* (10).

Наконец, выполняя требование (14), найдем оператор H и вектор-функцию h. Оператор H естественно представить в виде $H = H_1 \otimes H_2$, где $H_1 = A_{11}^{-1}(I - Q_0 - Q_1)F_1$, а $H_2 \equiv F_2$ (A_{11} — сужение оператора A_1 на $\mathcal{U}_1^1$). Включение $H \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_M^1;\mathcal{U}_\alpha^1)$ доказывается аналогично тому, как было доказано включение $F \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_M;\mathcal{F})$. Вектор-функцию $h(t)$ определим как $h = A_{11}^{-1}(I - Q_0 - Q_1)f$. В силу бесконечной гладкости f $h \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathcal{U}_\alpha^1)$.

Таким образом, все условия теоремы 2 выполнены. Поэтому справедлива

Теорема 8. *Пусть* $\lambda^{-1} \notin \sigma(A) \cup \sigma(A_\sigma)$. *Тогда при любом* u_0 *таком, что* $(u_0, 0) \in \mathcal{A}^0$ *и некотором* $T \in \mathbb{R}_+$ *существует единственное решение* $u \in \mathcal{C}^\infty((0,T);\mathcal{U}_M)$ *задачи* (1), (2), *являющееся квазистационарной полутраекторией, причем* $(u(t), t) \in \mathcal{A}^t$.

Замечание 10. Аналогично, используя результаты работы [21], можно исследовать задачу термоконвекции несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина–Фойгта высшего порядка.

В заключение авторы благодарят проф. Г.А. Свиридюка за постановку задачи и интерес к данным исследованиям.

Литература

1. Осколков А.П. *Начально-краевые задачи для уравнений движения жидкостей Кельвина–Фойгта и жидкостей Олдройта* // Тр. Матем. ин-та АН СССР. – 1988. – Т. 179. – С. 126–164.
2. Каразеева Н.А., Котсиолис А.А., Осколков А.П. *Об аттракторах и динамических системах, порожденных начально-краевыми задачами для уравнений движения линейных вязкоупругих жидкостей* // Препринт ЛОМИ Р-10-88. – 1988. – 58 с.
3. Свиридюк Г.А. *Разрешимость задачи термоконвекции вязкоупругой несжимаемой жидкости* // Изв. вузов. Математика. – 1990. – № 12. – С. 65–70.

4. Свиридюк Г.А. *К общей теории полугрупп операторов* // УМН. – 1994. – Т. 49. – № 4. – С. 47–74.
5. Свиридюк Г.А. *Квазистационарные траектории полулинейных динамических уравнений типа Соболева* // Изв. РАН. Сер. матем. – 1993. – Т. 57. – № 3. – С. 192–207.
6. Свиридюк Г.А., Сукачева Т.Г. *Фазовые пространства одного класса операторных уравнений* // Дифференц. уравнения. – 1990. – Т. 26. – № 2. – С. 250–258.
7. Свиридюк Г.А., Сукачева Т.Г. *Задача Коши для одного класса полулинейных уравнений типа Соболева* // Сиб. матем. журн. – 1990. – Т. 31. – № 5. – С. 109–119.
8. Levine H.A. *Some nonexistence and instability theorems for solutions of formally parabolic equations of form* $Du_t = -Au + F(u)$ // Arch. Rat. Mech. Anal. – 1973. – V. 51. – № 5. – P. 371–386.
9. Борисович Ю.Г., Звягин В.Г., Сапронов Ю.И. *Нелинейные фредгольмовы отображения и теория Лере-Шаудера* // УМН. – 1977. – Т. 32. – № 4. – С. 3–54.
10. Марсден Дж., Мак-Кракен М. *Бифуркация рождения цикла и ее приложения.* – М.: Мир, 1980. – 368 с.
11. Бокарева Т.А. *Исследование фазовых пространств уравнений типа Соболева с относительно секториальными операторами*: Дисс. … канд. физ.-матем. наук. – Санкт-Петербург, 1993. – 107 с.
12. Свиридюк Г.А. *Об одной модели динамики слабосжимаемой вязкоупругой жидкости* // Изв. вузов. Математика. – 1994. – № 1. – С. 62–70.
13. Сукачева Т.Г. *Об одной модели движения несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина–Фойгта ненулевого порядка* // Дифференц. уравнения. – 1997. – Т. 33. – № 4. – С. 552–557.
14. Свиридюк Г.А. *Полулинейные уравнения типа Соболева с относительно ограниченным оператором* // ДАН СССР. – 1991. – Т. 318. – № 4. – С. 828–831.
15. Свиридюк Г.А., Сукачева Т.Г., Дудко Л.Л. *Необходимые и достаточные условия относительной σ-ограниченности линейных операторов* // Докл. РАН. – 1995. – Т. 345. – № 1. – С. 25–27.
16. Свиридюк Г.А., Сукачева Т.Г., Дудко Л.Л. *Относительная σ-ограниченность линейных операторов* // Изв. вузов. Математика. – 1997. – № 7. – С. 68–73.
17. Свиридюк Г.А. *Полулинейные уравнения типа Соболева с относительно секториальными операторами* // Докл. РАН. – 1993. – Т. 329. – № 3. – С. 274–277.
18. Свиридюк Г.А. *Фазовые пространства полулинейных уравнений типа Соболева с относительно сильно секториальным оператором* // Алгебра и анализ. – 1994. – Т. 6. – № 5. – С. 216–237.
19. Свиридюк Г.А., Федоров В.Е. *Аналитические полугруппы с ядрами и линейные уравнения типа Соболева* // Сиб. матем. журн. – 1995. – Т. 36. – № 5. – С. 1130–1145.
20. Хенри Д. *Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений.* – М.: Мир, 1985. – 376 с.
21. Сукачева Т.Г. *О разрешимости нестационарной задачи динамики несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина-Фойгта ненулевого порядка* // Изв. вузов. Математика. – 1998. – № 3. – С. 47–54.

Новгородский государственный университет

Поступила 29.10.1998