И З В Е С Т И Я В Ы С Ш И Х У Ч Е Б Н Ы Х З А В Е Д Е Н И Й

2006 МАТЕМАТИКА № 2 (525)

УДК 519.632

Г.И. ШИШКИН

МЕТОД РИЧАРДСОНА ПОВЫШЕНИЯ ТОЧНОСТИ СЕТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ КОНВЕКЦИИ-ДИФФУЗИИ

На прямоугольнике рассматривается задача Дирихле для сингулярно возмущенного эллиптического уравнения с конвективными членами. Для такой задачи известна ε-равномерно сходящаяся монотонная разностная схема на кусочно-равномерных сетках; порядок ее скорости ε-равномерной сходимости не превосходит первого. На основе решений разностных схем на кусочно-равномерных вложенных сетках с использованием метода Ричардсона строится приближенное решение, сходящееся ε-равномерно с порядком, равным двум с точностью до логарифмического сомножителя. Построения и обоснования схем применимы при построении приближенных решений повышенной точности для трехмерных задач на параллелепипеде.

1. Введение

В настоящее время для сингулярно возмущенных краевых задач достаточно хорошо развиты специальные численные методы, которые в отличие от методов, разработанных для регулярных краевых задач (напр., в [1], [2]), позволяют получать сеточные решения, сходящиеся равномерно по возмущающему параметру ε (или ε-равномерно). В случае сингулярно возмущенных уравнений реакции-диффузии специальные разностные схемы имеют ε-равномерный порядок скорости сходимости, близкий к двум. Однако в случае уравнений конвекции-диффузии ε-равномерный порядок скорости сходимости не выше первого (см., напр., [3]–[10] и библиографию там же). Так как эффективность численных методов во многом определяется их скоростью сходимости, возникает интерес к построению специальных схем для задач конвекции-диффузии, порядок скорости сходимости которых выше первого.

Эффективными методами повышения точности приближенных решений для регулярных краевых задач являются метод Ричардсона и метод коррекции дефекта (или невязки, см., напр., [1], [11], [12] и библиографию там же). В случае сингулярно возмущенных задач конвекции-диффузии метод коррекции дефекта применяется для повышения точности приближенных решений по временной переменной в нестационарных задачах (напр., [13]) и по пространственным переменным [14]. Повышение точности решений по пространству и времени для сингулярно возмущенных нестационарных задач реакции-диффузии с использованием метода Ричардсона рассматривалось в [15], в [16] метод Ричардсона применялся для повышения точности решений сингулярно возмущенных эллиптических уравнений конвекции-диффузии на полосе. Заметим, что стандартные методы дефект-коррекции и Ричардсона существенно используют сеточные конструкции на равномерных сетках. Однако для достаточно широких классов сингулярно возмущенных краевых задач использование сгущающихся (в пограничном слое) сеток является необходимым для ε-равномерной сходимости схем (см., напр., [6], [17]). Таким образом, в

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта № 01-01-01022) и частично Нидерландской организации научных исследований NWO (проект № 047.016.008).

разработке схем повышенного порядка точности привлекательной представляется методология дефект-коррекции и Ричардсона в случае неравномерных сеток, в частности, для сингулярно возмущенных задач.

В данной работе изучается краевая задача для сингулярно возмущенного эллиптического уравнения конвекции-диффузии на прямоугольнике. Известная разностная схема на кусочно-равномерных сетках сходится ε-равномерно, однако ее ε-равномерный порядок скорости сходимости не превосходит первого (напр., [6], [8]). На основе решений базовых схем на кусочно-равномерных (вложенных) сетках с использованием метода Ричардсона строится приближенное решение, сходящееся ε-равномерно с порядком точности, близким к двум. При обосновании сходимости приближенного решения используются разложения решений специальных разностных схем по эффективному шагу сеточной области. Коэффициенты разложений решений разностных схем (их регулярных и сингулярных компонент) определяются из решений соответствующих сингулярно возмущенных краевых задач.

Эта же методика применима при построении приближенных решений повышенного порядка точности (второго порядка с точностью до логарифмического сомножителя) для трехмерной краевой задачи на параллелепипеде.

2. Постановка задачи

На прямоугольнике $\overline{D}$, где

$$D = \{x : 0 < x_s < d_s,\ s = 1, 2\}, \tag{2.1}$$

рассмотрим первую краевую задачу для эллиптического уравнения[1]

$$L_{(2.2)} u(x) = f(x), \quad x \in D, \quad u(x) = \varphi(x), \quad x \in \Gamma. \tag{2.2а}$$

Здесь $\Gamma = \overline{D} \setminus D$,

$$L_{(2.2)} = L^{(2)}_{(2.2)} + L^{(1)}_{(2.2)}, \quad L^{(2)}_{(2.2)} \equiv \varepsilon \sum_{s=1,2} a_s(x) \frac{\partial^2}{\partial x_s^2}, \quad L^{1}_{(2.2)} \equiv \sum_{s=1,2} b_s(x) \frac{\partial}{\partial x_s} - c(x),$$

$a_s(x)$, $b_s(x)$, $c(x)$, $f(x)$, $x \in \overline{D}$, $\varphi(x)$, $x \in \Gamma_j$, — достаточно гладкие функции, где Γ_j, $j = 1, \ldots, 4$, — грани множества D, $\Gamma = \cup \Gamma_j$, $\Gamma_j = \overline{\Gamma}_j$, причем

$$a_0 \le a_s(x) \le a^0, \quad b_0 \le b_s(x) \le b^0, \quad c(x) \ge 0, \quad x \in \overline{D}, \quad s = 1, 2, \quad a_0, b_0 > 0, \tag{2.2б}$$

параметр ε принимает произвольные значения из полуинтервала $(0, 1]$.

Будем предполагать, что на множестве Γ^* — вершинах множества D — выполнены условия согласования, обеспечивающие достаточную гладкость решения задачи (2.2), (2.1) при каждом фиксированном значении параметра. Через Γ_j, Γ_{j+2}, $j = 1, 2$, обозначим грани множества D, ортогональные оси x_j; грани Γ_1, Γ_2 содержат вершину $(0, 0)$. Через Γ^- (через Γ^+) обозначим ту часть границы Γ, через которую характеристики предельного уравнения, проходящие через точки $x \in D$, покидают (соответственно, входят в) множество D, $\Gamma^- = \bigcup\limits_{j=1}^{2} \Gamma_j$.

При стремлении параметра к нулю в окрестности множества Γ^- появляется пограничный слой. Этот слой является регулярным в окрестности гладких частей множества Γ^- и эллиптическим (угловым) в окрестности пересечения граней Γ_j, $j = 1, 2$.

Для краевой задачи с использованием метода Ричардсона требуется построить приближенное решение, сходящееся ε-равномерно с порядком точности выше первого.

Рассматривается вариант метода Ричардсона, в котором при переизмельчении сеток в окрестности пограничного слоя и вне его точка смены шага сетки остается фиксированной. Специальная разностная схема на кусочно-равномерных сетках, решения которой используются в

[1]Запись $L_{(j.k)}$ $(\overline{D}_{(j.k)}, M_{(j.k)})$ означает, что этот оператор (область, постоянная) введен в формуле $(j.k)$.

методе Ричардсона, приводится в § 4. Используемые в построениях априорные оценки решений задачи (2.2), (2.1) приводятся в § 3. В §5 указывается условие, накладываемое на ширину зоны густой сетки (в пограничном слое), являющееся необходимым для построения приближенных решений ε-равномерно повышенного порядка точности. Построение разложений решений разностных схем и сеточных решений повышенного порядка точности проводятся в §6. При проведении построений и их обосновании используется метод мажорантных функций (напр., [2], [18]).

3. Априорные оценки решений и производных

Приведем априорные оценки решений и производных для краевой задачи (2.2), (2.1), вывод оценок подобен выводу оценок в [6].

3.1. Применяя приемы мажорантных функций (напр., [18]), находим оценку[1]

$$|u(x)| \leq M, \quad x \in \overline{D}. \tag{3.1}$$

Решение задачи представим в виде суммы функций

$$u(x) = U(x) + V(x), \quad x \in \overline{D}, \tag{3.2а}$$

где $U(x)$ и $V(x)$ — регулярная и сингулярная части решения. Функция $U(x)$, $x \in \overline{D}$, есть сужение на $\overline{D}$ функции $U^0(x)$, $x \in \overline{D}^0$, $U(x) = U^0(x)$, $x \in \overline{D}$. Функция $U^0(x)$, $x \in \overline{D}^0$, — решение краевой задачи

$$L^0 U^0(x) = f^0(x), \quad x \in D^0, \quad U^0(x) = \varphi^0(x), \quad x \in \Gamma^0. \tag{3.3}$$

Здесь $\overline{D}^0$ — четверть плоскости, являющаяся продолжением D за стороны Γ_1, Γ_2; данные задачи (3.3) являются гладкими продолжениями данных задачи (2.2), (2.1), сохраняющими на $\overline{D}^0$ свойства (2.2б); $L^0 = L^{0(2)} + L^{0(1)}$. Функции $f^0(x)$ и $\varphi^0(x)$, $x \in \overline{D}^0$, вне m_1-окрестности множества $\overline{D}$ считаем равными нулю. Функция $V(x)$ — решение задачи

$$L_{(2.2)} V(x) = 0, \quad x \in D, \quad V(x) = \varphi(x) - U(x), \quad x \in \Gamma.$$

Функцию $U(x)$ представим в виде суммы функций

$$U(x) = U_0(x) + \varepsilon U_1(x) + \dots + \varepsilon^n U_n(x) + v_U(x), \quad x \in \overline{D}, \tag{3.2б}$$

соответствующей представлению

$$U^0(x) = U_0^0(x) + \varepsilon U_1^0(x) + \dots + \varepsilon^n U_n^0(x) + v_U^0(x), \quad x \in \overline{D}^0, \tag{3.4}$$

решения краевой задачи (3.3), $U(x) = U^0(x), \dots, v_U(x) = v_U^0(x)$, $x \in \overline{D}$. Здесь $U_0^0(x)$, $U_i^0(x)$, $i = 1, \dots, n$, — решения задач

$$L_{(3.3)}^{0(1)} U_0^0(x) = f^0(x), \quad x \in \overline{D}^0 \setminus \Gamma^{0+}, \quad U_0^0(x) = \varphi^0(x), \quad x \in \Gamma^{0+};$$
$$L_{(3.3)}^{0(1)} U_i^0(x) = -\varepsilon^{-1} L_{(3.3)}^{0(2)} U_{i-1}^0(x), \quad x \in \overline{D}^0 \setminus \Gamma^{0+}, \quad U_i^0(x) = 0, \quad x \in \Gamma^{0+}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Считаем, что данные задачи (2.2), (2.1), помимо условий согласования на множестве Γ^*, обеспечивающих гладкость решения $u(x)$ задачи (2.2), (2.1), удовлетворяют дополнительным условиям на множестве $\Gamma^{*+} = \Gamma^* \cap \{\Gamma \setminus \Gamma^-\}$ ($\Gamma^{*+} = (d_1, d_2)$), которые обеспечивают достаточную гладкость функций $U_0^0(x)$, $U_i^0(x)$, $i = 1, \dots, n$. Такие условия нетрудно выписать, например, в том случае, когда граничная функция $\varphi(x)$ вместе с производными обращается в нуль на множестве Γ^*.

[1] Через M (m) обозначаем достаточно большие (малые) положительные постоянные, не зависящие от величины параметра ε и от шаблонов разностных схем.

Для простоты считаем выполненными включения

$$u \in C^{n+2+\alpha}(\overline{D}), \quad U_i \in C^{3n+2-2i+\alpha}(\overline{D}), \quad i = 0, 1, \ldots, n, \quad n \geq 1, \quad \alpha > 0. \tag{3.5}$$

В этом случае $U \in C^{n+2+\alpha}(\overline{D})$, для $U(x)$, $V(x)$ получаются оценки

$$\left| \frac{\partial^k}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2}} U(x) \right| \leq M[1 + \varepsilon^{n+1-k}], \quad x \in \overline{D}, \quad k \leq K, \tag{3.6а}$$

$$|V(x)| \leq M \exp(-m\varepsilon^{-1} r(x, \Gamma^-)), \quad x \in \overline{D}, \tag{3.6б}$$

где $r(x, \Gamma^-)$ — расстояние от точки x до множества Γ^-, m — произвольное число из интервала $(0, m_0)$, $m_0 = \min\limits_{s,\overline{D}} [a_s^{-1}(x) b_s(x)]$, $K = n + 2$, при достаточной гладкости данных краевой задачи (2.2), (2.1).

3.2. Приведем оценку производных функции $V(x)$. Через

$$\overline{D}_{(j)}, \quad j = 1, 2, \tag{3.7}$$

обозначим полуполосу, стороны которой содержат множества Γ_j и Γ_3, Γ_4. Функцию $V(x)$ представим в виде суммы

$$V(x) = \sum_{j=1,2} V_{(j)}(x) + V_{(1,2)}(x), \quad x \in \overline{D}. \tag{3.2в}$$

Здесь $V_{(j)}(x)$ — одномерный, а $V_{(1,2)}(x)$ — двумерный (угловой) погранслои. Функции $V_{(j)}(x)$ — сужения на $\overline{D}$ функций $V^0_{(j)}(x)$, являющихся решениями краевых задач

$$L^0_{(3.3)} V^0_{(j)}(x) = 0, \quad x \in D_{(j)}, \tag{3.8а}$$

$$V^0_{(j)}(x) = \varphi^0_{(j)}(x), \quad x \in \Gamma_{(j)}, \quad j = 1, 2. \tag{3.8б}$$

Функция $\varphi^0_{(j)}(x) = \varphi^0(x) - U^0(x)$, $x \in \Gamma_{(j)}$, удовлетворяет условию

$$\varphi^0_{(j)}(x) = \begin{cases} \varphi(x) - U(x), & x \in \Gamma_j; \\ 0, & x \in \Gamma_2 \cup \Gamma_3, \end{cases}$$

вне m-окрестности множества Γ_j функция $\varphi^0_{(j)}(x)$ обращается в нуль.

При условии $u, U \in C^{n+2+\alpha}(\overline{D})$, $n \geq 1$, $\alpha > 0$, для компонент из представления (3.2б) получаются оценки

$$\left| \frac{\partial^k}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2}} V_{(j)}(x) \right| \leq M[\varepsilon^{-s} + \varepsilon^{1-k}] \exp(-m\varepsilon^{-1} r(x, \Gamma_j)), \tag{3.9а}$$

$$\left| \frac{\partial^k}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2}} V_{(1,2)}(x) \right| \leq M\varepsilon^{-k} \exp(-m\varepsilon^{-1} r(x, \Gamma_1 \cup \Gamma_2)), \tag{3.9б}$$

$$x \in \overline{D}, \quad j = 1, 2, \quad k \leq K, \quad K = K_{(3.6)},$$

где $s = s(k_1, k_2, j)$, $s = k_1$ при $j = 1$, $s = k_2$ при $j = 2$, $m = m_{(3.6)}$.

Для функции $u(x)$ справедлива также оценка

$$\left| \frac{\partial^k}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2}} u(x) \right| \leq M\varepsilon^{-k}, \quad x \in \overline{D}, \quad k \leq K. \tag{3.10}$$

Теорема 3.1. *Пусть для данных краевой задачи* (2.2), (2.1) *выполняется условие*

$$a_s, b_s, c, f \in C^{3n+2+\alpha}(\overline{D}), \quad \varphi \in C^{3n+2+\alpha}(\overline{D}), \quad s = 1, 2, \quad n \geq 1, \quad \alpha > 0,$$

а для ее решения и компонент $U_0(x), \ldots, U_n(x)$ *из представления* (3.2б) — *условие* (3.5). *Тогда для решения краевой задачи и его компонент из представления* (3.2) *справедливы оценки* (3.1), (3.6), (3.9), (3.10), *где* $K = n + 2$.

4. Монотонные разностные схемы

Приведем ε-равномерно сходящуюся схему для задачи (2.2), (2.1). Решения этой базовой схемы будем использовать при построении сеточных решений повышенного порядка точности.

4.1. На множестве $\overline{D}_{(2.1)}$ введем сетку

$$\overline{D}_h = \overline{\omega}_1 \times \overline{\omega}_2, \tag{4.1}$$

где $\overline{\omega}_s$ — сетка на отрезке $[0, d_s]$, вообще говоря, неравномерная. Полагаем $h_s^i = x_s^{i+1} - x_s^i$, x_s^i, $x_s^{i+1} \in \overline{\omega}_s$, $h_s = \max\limits_i h_s^i$, $h = \max\limits_s h_s$. Считаем, что $h \leq MN^{-1}$, где $N = \min[N_1, N_2]$, $N_s + 1$ — число узлов сетки $\overline{\omega}_s$.

На сетке $\overline{D}_{h(4.1)}$ краевой задаче (2.2), (2.1) сопоставим разностную схему

$$\Lambda z(x) = f(x), \quad x \in D_h, \quad z(x) = \varphi(x), \quad x \in \Gamma_h. \tag{4.2}$$

Здесь $D_h = D \cap \overline{D}_h$, $\Gamma_h = \Gamma \cap \overline{D}_h$,

$$\Lambda z(x) \equiv \left\{ \varepsilon \sum_{s=1,2} a_s(x) \delta_{\overline{xs}\,\widehat{xs}} + \sum_{s=1,2} b_s(x) \delta_{xs} - c(x) \right\} z(x),$$

$\delta_{xs} z(x)$ и $\delta_{\overline{xs}\,\widehat{xs}} z(x)$ — первая и вторая разностные производные, например,

$$\delta_{\overline{x1}\,\widehat{x1}} z(x) = 2(h_1^i + h_1^{i-1})^{-1} [\delta_{x1} z(x) - \delta_{\overline{x1}} z(x)], \quad x = (x_1^i, x_2).$$

Разностная схема (4.2), (4.1) является монотонной [2] ε-равномерно на сетке с произвольным распределением узлов.

В случае равномерных сеток

$$\overline{D}_h = \overline{\omega}_1 \times \overline{\omega}_2, \tag{4.3}$$

где $\overline{\omega}_1$, $\overline{\omega}_2$ — равномерные сетки, для решений разностной схемы с учетом априорных оценок устанавливается сходимость при условии $h = o(\varepsilon)$

$$|u(x) - z(x)| \leq MN^{-1}(\varepsilon + N^{-1})^{-1}, \quad x \in \overline{D}_{h(4.3)}. \tag{4.4}$$

4.2. Рассмотрим схему на кусочно-равномерных сетках.

На множестве $\overline{D}$ строим сетку

$$\overline{D}_h^* = \overline{\omega}_1^* \times \overline{\omega}_2^*. \tag{4.5а}$$

Здесь $\overline{\omega}_s^*$, $s = 1, 2$, — сетка с кусочно-постоянным шагом. При построении сетки $\overline{\omega}_s^*$ отрезок $[0, d_s]$ разобьем на две части: $[0, \sigma_s]$, $[\sigma_s, d_s]$, σ_s – параметр из интервала $(0, d_s)$. На каждом интервале разбиения шаг сетки постоянен и равен $h_s^{(1)} = 2\sigma_s N_s^{-1}$ и $h_s^{(2)} = 2(d_s - \sigma_s) N_s^{-1}$ на интервалах $[0, \sigma_s]$ и $[\sigma_s, d_s]$ соответственно. Полагаем

$$\sigma_s = \sigma_s(\varepsilon, N_s, d_s; l, m) = \min[2^{-1} d_s, l m^{-1} \varepsilon \ln N_s], \quad s = 1, 2, \tag{4.5б}$$

где $m = m_{(3.6)}$, $l > 0$ — параметр сетки. Сетки $\overline{\omega}_s^*$, а тем самым и сетка $\overline{D}_h^* = \overline{D}_h^*(l)$, построены.

Для решения краевой задачи (2.2), (2.1) используем схему (4.2) на сетке

$$\overline{D}_h^* = \overline{D}_{h(4.5)}^*(l = 1). \tag{4.6}$$

Для решений разностной схемы (4.2), (4.6) получаются оценки

$$|u(x) - z(x)| \leq MN^{-1} \ln N, \quad x \in \overline{D}_h^*, \tag{4.7}$$

$$|u(x) - z(x)| \leq MN^{-1} \min[\varepsilon^{-1}, \ln N], \quad x \in \overline{D}_h^*. \tag{4.8}$$

Определение 4.1. Пусть для решения $z(x)$, $x \in \overline{D}_h$, некоторой разностной схемы выполняется оценка $|u(x) - z(x)| \leq M\mu(N^{-1}, \varepsilon)$, $x \in \overline{D}_h$, где $\mu(N^{-1}, \varepsilon) \to 0$ при $N \to \infty$ и фиксированных значениях ε. Скажем, что эта оценка неулучшаема по вхождению величин N и ε, если оценка $|u(x) - z(x)| \leq M\mu_0(N^{-1}, \varepsilon)$, $x \in \overline{D}_h$, вообще говоря, неверна в случае, когда $\mu_0(N^{-1}, \varepsilon) = o(\mu(N^{-1}, \varepsilon))$ хотя бы при каких-то значениях параметра $\varepsilon \in (0, 1]$.

Оценки (4.4), (4.8) — ε-зависимые оценки погрешности сеточных решений — неулучшаемы по вхождению величин N и ε, а ε-равномерная оценка (4.7) — по вхождению величины N.

Теорема 4.1. *Пусть для решений краевой задачи* (2.2), (2.1) *выполняются априорные оценки* (3.6), (3.9), (3.10) *при* $K = 3$. *Тогда решение разностной схемы* (4.2), (4.6) *при* $N \to \infty$ *сходится к решению краевой задачи со скоростью* $O(N^{-1} \ln N)$ *ε-равномерно. Для сеточных решений справедливы оценки* (4.4), (4.7), (4.8); *оценки* (4.4), (4.8) *и* (4.7) *неулучшаемы по вхождению величин N, ε и N соответственно.*

5. Необходимое условие повышения точности метода Ричардсона

5.1. Метод (экстраполяции) Ричардсона для повышения точности сеточных решений регулярных краевых задач достаточно хорошо разработан в случае разностных схем на равномерных сетках (напр., [11]). В этом методе используется разложение решения сеточной задачи в ряд по степеням шага сеточной области, коэффициенты которого не зависят от величины шага. Применяемая в методе линейная комбинация (экстраполяция) сеточных решений на сетках с различным шагом позволяет повысить порядок точности приближенного решения. Отметим метод Ричардсона на кусочно-равномерных сетках, который применялся в ([11], гл. 3, § 3.3) при решении обыкновенных дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами. Шаги таких сеток на участках гладкости коэффициентов являлись соизмеримыми.

Рассмотрим метод Ричардсона в случае краевой задачи (2.2), (2.1).

Определение 5.1. Скажем, что некоторая сетка $\overline{D}_h^0$ ε-равномерно плотна на $\overline{D}$, если вариации функции $u(x)$ — решения задачи (2.2), (2.1) — в соседних узлах сетки $\overline{D}_h^0$ стремятся к нулю ε-равномерно при $N_1, N_2 \to \infty$.

Определение 5.2. Пусть на некоторой ε-равномерно плотной сетке $\overline{D}_h^0$ построено приближенное решение $z^0(x)$, $x \in \overline{D}_h^0$, по методу Ричардсона, причем

$$|u(x) - z^0(x)| \leq MN^{-\gamma}, \quad x \in \overline{D}_h^0.$$

Скажем, что функция $z^0(x)$, $x \in \overline{D}_h^0$, сходится ε-равномерно с порядком выше первого, если $\gamma > 1$, и с порядком строго выше первого, если $\gamma \geq 1 + m_1$.

5.2. Опишем метод Ричардсона, используемый для повышения точности приближенных решений на основе специальных разностных схем (4.2), (4.5).

В случае схемы (4.2), (4.5) сеточная область $\overline{D}_h^*$ и сеточное решение $z(x)$, $x \in \overline{D}_h^*$, определяются параметрами схемы N_1, N_2 и возмущающим параметром ε. На основе этой базовой схемы требуется построить "дочерние" разностные схемы, решения которых имели бы главные члены разложения по некоторому эффективному "шагу сетки" такие же, как решение базовой схемы. В качестве эффективного шага сетки удобно использовать величину N^{-1}, $N = \min[N_1, N_2]$. Для дочерних разностных схем введем сетки

$$\overline{D}_h^{*k} = \overline{\omega}_1^{*k} \times \overline{\omega}_2^{*k}, \tag{5.1}$$

где $\overline{\omega}_s^{*k}$ — кусочно-равномерные сетки, имеющие шаг на отрезках $[0,\sigma_s]$, $[\sigma_s, d_s]$ в k раз больший, чем базовый шаг сетки $\overline{\omega}^*_{s(4.5)}$, $\overline{D}_h^{*k} = \overline{D}_h^{*k}(l)$. В дочерних сетках $\overline{\omega}_s^{*k} = \overline{\omega}_s^{*k}(\sigma_s^0)$, $\sigma_s^0 = \sigma_{s(4.5)}(N_{s(4.5)})$, величина σ_s^0 не зависит от k. Решение задачи (4.2), (5.1) обозначим через $z^k(x)$, $x \in \overline{D}_h^{*k}$.

Для равномерных сеток (4.3) сетки $\overline{D}_h^k$ определяются подобным образом.

В случае базовой схемы (4.2), (4.6) используем сетки

$$\overline{D}_h^{*k} = \overline{D}^{*k}_{h(5.1)}(l=1). \tag{5.2}$$

5.3. Проследим проблемы, возникающие при использовании метода Ричардсона в случае сеток (4.6), (5.2).

5.3.1. Рассмотрим модельный пример. Пусть на полуоси $\overline{D}$, где

$$D = (0, \infty), \tag{5.3}$$

требуется найти решение краевой задачи

$$Lu(x) \equiv \left\{\varepsilon \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d}{dx}\right\} u(x) = 0, \quad x \in D, \quad u(x) = \varphi(x) = 1, \quad x \in \Gamma, \tag{5.4}$$

причем $u(x) \to 0$ при $x \to \infty$.

На множестве (5.3) введем равномерную сетку

$$\overline{D}_h \quad (\text{с шагом } h = N^{-1}). \tag{5.5}$$

Для решения задачи (5.4), (5.3) используем разностную схему

$$\begin{gathered} \Lambda z(x) \equiv \{\varepsilon \delta_{\overline{x}\widehat{x}} + \delta_x\} z(x) = 0, \quad x \in D_h, \\ z(x) = \varphi(x), \quad x \in \Gamma; \quad z(x) \to 0 \ \text{ при } \ x \to \infty. \end{gathered} \tag{5.6}$$

Пусть $z^{k_0}(x)$, $x \in \overline{D}_h^{k_0}$, — решение задачи (5.6) на сетке

$$\overline{D}_h^{k_0}, \tag{5.7}$$

шаг которой равен $k_0 h$, $k_0 > 1$, и пусть

$$\overline{D}_h^0 = \overline{D}_h \cap \overline{D}_h^{k_0}. \tag{5.8}$$

По функциям $z(x)$, $x \in \overline{D}_h$, и $z^{k_0}(x)$, $x \in \overline{D}_h^{k_0}$, строим приближенное решение

$$z^0(x) = \gamma z(x) + (1-\gamma) z^{k_0}(x), \quad x \in \overline{D}_h^0.$$

Требуется найти коэффициент γ, при котором точность функции $z^0(x)$, $x \in \overline{D}_h^0$, по порядку выше точности функции $z(x)$, $x \in \overline{D}_h$, ε-равномерно. Заметим, что решение разностной схемы (5.6), (5.5) (как и схемы (5.6), (5.7)) не сходится ε-равномерно к решению задачи (5.4), (5.3).

Изучение явных решений краевой задачи (5.4), (5.3) и схем (5.6), (5.5) и (5.6), (5.7) показывает, что не существует параметра γ, при котором функция $z^0(x)$, $x \in \overline{D}_h^0$, при $N \to \infty$ сходится ε-равномерно.

Таким образом, в случае сингулярно возмущенных краевых задач (2.2), (2.1) и базовых схем (4.2), (4.3) (схем на равномерных сетках) метод Ричардсона не позволяет построить приближенные решения, сходящиеся ε-равномерно. Заметим, что сетка $\overline{D}^0_{h(5.8)}$ в случае задачи (5.4), (5.3) не является ε-равномерно плотной на $\overline{D}$.

5.3.2. На единичном отрезке $\overline{D}$, где

$$D = (0, 1), \tag{5.9}$$

рассмотрим задачу

$$L_{(5.4)} u(x) = 0, \quad x \in D, \quad u(x) = \varphi(x), \quad x \in \Gamma, \quad \varphi(0) = 1, \quad \varphi(1) = 0. \tag{5.10}$$

На $\overline{D}_{(5.9)}$ строим сетку

$$\overline{D}_h^* = \overline{\omega}_h^*, \tag{5.11}$$

где $\overline{\omega}_1^* = \overline{\omega}_{1(4.5)}^*(\sigma_1)$ при $\sigma_1 = \min[2^{-1}, lm^{-1}\varepsilon \ln N]$, m — произвольное число из $(0,1)$, $l = 1$. Задачу (5.10), (5.9) аппроксимируем на сетке (5.11) схемой

$$\Lambda_{(5.6)}\, z(x) = 0, \quad x \in D_h^*, \quad z(x) = \varphi(x), \quad x \in \Gamma_h^*. \tag{5.12}$$

Пусть $z^{k_0}(x)$, $x \in \overline{D}_h^{*k_0}$, — решение задачи (5.12) на (кусочно-равномерной) сетке $\overline{D}_h^{*k_0}$. По функциям $z(x)$, $x \in \overline{D}_h^*$, и $z^{k_0}(x)$, $x \in \overline{D}_h^{*k_0}$, требуется построить приближенное решение $z^0(x) = \gamma z(x) + (1-\gamma) z^{k_0}(x)$, $x \in \overline{D}_h^{*0}$, где $\overline{D}_h^{*0} = \overline{D}_h^* \cap \overline{D}_h^{*k_0}$, сходящееся ε-равномерно с порядком строго выше первого. Заметим, что сетка $\overline{D}_h^{*0}$ для задачи (5.10), (5.9) является ε-равномерно плотной на $\overline{D}$.

Изучение явных решений краевой и разностных задач показывает, что для их решений (в силу выбора $m_{(5.11)}$) достижима оценка

$$u(x),\ z(x),\ z^{k_0}(x) \ge mN^{-1-\alpha} \quad \text{при} \quad x = \sigma_{1(5.11)} \tag{5.13}$$

при сколь угодно малом значении величины $\alpha > 0$. Рассматривая краевую и сеточные задачи при $x \ge \sigma_{1(5.11)}$, убеждаемся, что не существует функции $z^0(x)$, $x \in \overline{D}_h^{*0}$, для которой выполняется оценка

$$|u(x) - z^0(x)| \le MN^{-1-2\alpha}, \quad x \in \overline{D}_h^{*0}, \quad \alpha = \alpha_{(5.13)}.$$

Таким образом, метод Ричардсона в случае сингулярно возмущенных краевых задач (2.2), (2.1) и базовых схем (4.2), (4.6) не позволяет строить приближенные решения, сходящиеся ε-равномерно с порядком строго выше первого.

Лемма 5.1. *В случае базовой схемы* (4.2), (4.6) *и дочерних схем* (4.2), (5.2) *метод Ричардсона не позволяет строить приближенные решения с ε-равномерным порядком точности строго выше первого на ε-равномерно плотных сетках на $\overline{D}$.*

5.3.3. Рассматривая схемы (4.2), (4.5) и (4.2), (5.1) при условии

$$l \ge n, \quad n > 1, \tag{5.14}$$

приходим к следующему утверждению.

Теорема 5.1. *Условие* (5.14) *является необходимым для ε-равномерной сходимости с порядком точности выше n (на ε-равномерно плотных сетках) метода Ричардсона, использующего базовую схему* (4.2), (4.5) *и дочерние схемы* (4.2), (5.1). *При условии $l = n$ метод Ричардсона не позволяет строить приближенные решения с ε-равномерным порядком точности строго выше n-го на ε-равномерно плотных сетках на $\overline{D}$.*

6. Метод Ричардсона для задачи (2.2), (2.1)

6.1. Приближенное решение краевой задачи (2.2), (2.1) порядка точности, близкого к двум равномерно по ε, будем искать в виде

$$z^0(x) = \gamma z(x) + (1-\gamma) z^{k_0}(x), \quad x \in \overline{D}_h^{*0}, \tag{6.1}$$

где $z(x)$, $x \in \overline{D}_h^*$, и $z^{k_0}(x)$, $x \in \overline{D}_h^{*k_0}$, — решения разностных схем (4.2), (4.5) и (4.2), (5.1) при условии

$$l = 2. \tag{6.2}$$

Величина γ в (6.1) определяется разложениями функций $z(x)$ и $z^{k_0}(x)$ (двумя первыми членами) по N^{-1}, где $N = N_{(4.5)}$. Разложения функций строятся в предположении, что величины σ_s для сеток $\overline{D}_h^*$ и $\overline{D}_h^{*k_0}$ одинаковы, $\sigma_s = \sigma_{s(4.5)}(l = 2)$, $s = 1, 2$. Заметим, что главные первые члены разложений функций $z(x)$ и $z^{k_0}(x)$ совпадают с функцией $u(x)$ — решением краевой задачи (2.2), (2.1).

6.2. Идею построения разложений удобно обсудить на модельном примере.

6.2.1. На отрезке $\overline{D}$, где

$$D = (0, d_1), \tag{6.3}$$

рассмотрим краевую задачу

$$Lu(x) \equiv \left\{\varepsilon \frac{d^2}{dx^2} + b(x)\frac{d}{dx} - c(x)\right\}u(x) = f(x), \quad x \in D, \tag{6.4}$$
$$u(x) = \varphi(x), \quad x \in \Gamma,$$

функции $b(x)$, $c(x)$, $f(x)$ являются достаточно гладкими, причем $b(x) \geq b_0 > 0$, $c(x) \geq 0$, $x \in \overline{D}$.

На $\overline{D}$ строим кусочно-равномерную сетку

$$\overline{D}_h^* = \overline{\omega}_1^*, \tag{6.5}$$

где $\overline{\omega}_1^* = \overline{\omega}_{1(4.5)}^*(\sigma_1)$, $\sigma_1 = \sigma_{1(4.5)}\ (\varepsilon, N_1, d_2, l = 2, m)$, m — произвольное число из интервала $(0, m_0)$, $m_0 = \min\limits_{\overline{D}}[b(x)]$.

Задачу (6.4), (6.3) аппроксимируем разностной схемой

$$\Lambda z(x) \equiv \{\varepsilon\delta_{\overline{x}\widehat{x}} + b(x)\delta_x - c(x)\}z(x) = f(x), \quad x \in D_h, \tag{6.6}$$
$$z(x) = \varphi(x), \quad x \in \Gamma_h.$$

Пусть $v(x)$, $x \in \overline{D}$, — достаточно гладкая функция. Через $z_v(x)$, $x \in \overline{D}_h$, обозначим решение задачи

$$\Lambda z(x) = Lv(x), \quad x \in D_h, \quad z(x) = v(x), \quad x \in \Gamma_h.$$

Решение задачи (6.4), (6.3) представим в виде суммы регулярной и сингулярной частей

$$u(x) = U(x) + V(x), \quad x \in \overline{D},$$

а решение задачи (6.6), (6.5) — в виде суммы

$$z(x) = z_U(x) + z_V(x), \quad x \in \overline{D}_h^*. \tag{6.7}$$

6.2.2. Найдем разложение функции $z_V(x)$.

Для функции $\omega_V(x) = z_V(x) - V(x)$, $x \in \overline{D}_h^*$, — компоненты погрешности решения задачи (6.6), (6.5), справедливо соотношение

$$\Lambda\omega_V(x) = (\Lambda - L)V(x) = \varepsilon\left(\delta_{\overline{x}\widehat{x}} - \frac{d^2}{dx^2}\right)V(x) + b(x)\left(\delta_x - \frac{d}{dx}\right)V(x), \quad x \in D_h^*,$$

причем

$$\varepsilon\left|\left(\delta_{x\overline{x}} - \frac{d^2}{dx^2}\right)V(x)\right| \leq M\varepsilon^{-3}(h_1^{(1)})^2\exp(-m\varepsilon^{-1}x), \quad x < \sigma_1,$$

$$|(\Lambda - L)V(x)| \leq \begin{cases} MN^{-1}, \quad x = \sigma_1; \\ MN^{-2}(\varepsilon + N^{-1})^{-1}\exp(-m\varepsilon^{-1}(x - \sigma_1)), \quad x \geq \sigma_1 + M_1 h_1^{(2)}, \end{cases}$$

$$\left|\left\{\left(\delta_x - \frac{d}{dx}\right) - 2^{-1}h_1^{(1)}\frac{d^2}{dx^2}\right\}V(x)\right| \leq M\varepsilon^{-3}(h_1^{(1)})^2\exp(-m\varepsilon^{-1}x), \quad x < \sigma_1; \quad x \in D_h^*.$$

Заметим, что последняя оценка вытекает из соотношений

$$V(x+h_1^{(1)}) = \left\{1 + h_1^{(1)}\frac{d}{dx} + 2^{-1}(h_1^{(1)})^2\frac{d^2}{dx^2}\right\}V(x) + 6^{-1}(h_1^{(1)})^3\frac{d^3}{dx^3}V(x+\xi),$$

$$\left|\frac{d^3}{dx^3}V(x+\xi)\right| \le M\,\varepsilon^{-3}\exp(-m\,\varepsilon^{-1}\,x),$$

$$x<\sigma_1,\quad x\in D_h^*,\quad \xi\in[0,h_1^{(1)}],\quad m=m_{(6.5)}.$$

Таким образом, наибольший вклад в погрешность $\omega_V(x)$ вносится компонентой невязки

$$\left(\delta_x - \frac{d}{dx}\right)V(x) \approx 2^{-1}h_1^{(1)}\frac{d^2}{dx^2}V(x)$$

на подобласти $x<\sigma_1$, она дает вклад порядка $\varepsilon^{-1}h_1^{(1)}$. Остальная часть невязки дает вклад в $\omega_V(x)$, не превосходящий величины $M\varepsilon^{-2}(h_1^{(1)})^2 \le MN^{-2}\ln^2 N$.

Введем функцию $V_1(x)$, $x\in\overline{D}$, — решение краевой задачи

$$LV_1(x) = -\sigma_1 b(x)\frac{d^2}{dx^2}V(x),\quad x\in D,\quad V_1(x)=0,\quad x\in\Gamma.$$

Справедлива оценка

$$|V_1(x)| \le M\ln N\exp(-m\varepsilon^{-1}x),\quad x\in\overline{D},$$

причем $|(\Lambda - L)V_1(x)| \le M\varepsilon^{-1}N^{-1}\ln^2 N\exp(-m\varepsilon^{-1}x)$, $x\in D_h^*$, $x<\sigma_1$. Таким образом, для функции $\omega_V(x) - N^{-1}V_1(x)$ получается оценка

$$|\Lambda[\omega_V(x) - N^{-1}V_1(x)]| \le M\varepsilon^{-1}N^{-2}\ln^2 N\exp(-m\varepsilon^{-1}x),\quad x\in D_h^*,\quad x<\sigma_1.$$

С учетом приведенных соотношений находим

$$|z_V(x) - (V(x) + N^{-1}V_1(x))| \le MN^{-2}\ln^2 N,\quad x\in\overline{D}_h^*.$$

Таким образом, для компоненты $z_V(x)$ получается разложение

$$z_V(x) = V(x) + N^{-1}V_1(x) + \rho_V(x),\quad x\in\overline{D}_h^*, \tag{6.8}$$

причем $|\rho_V(x)| \le MN^{-2}\ln^2 N$, $x\in\overline{D}_h^*$.

6.2.3. Построение разложения для регулярной компоненты $z_U(x)$ из представления (6.7) проводится подобным образом. Получается разложение

$$z_U(x) = U(x) + N^{-1}U_1(x) + \rho_U(x),\quad x\in\overline{D}_h^*, \tag{6.9а}$$

которое проверяется непосредственно. Здесь

$$U_1(x) = U_1^1(x) + U_1^2(x),\quad x\in\overline{D}, \tag{6.9б}$$

функции $U_1^1(x)$, $U_1^2(x)$ — решения задач

$$LU_1^1(x) = -\sigma_1 b(x)\frac{d^2}{dx^2}U(x),\quad x\in D,\quad U_1^1(x)=0,\quad x\in\Gamma,$$

$$LU_1^2(x) = \begin{cases} -(d_1 - 2\sigma_1)b(x)\frac{d^2}{dx^2}U(x), & x<\sigma_1;\\ 0, & x>\sigma_1,\end{cases}\quad x\in D,$$

$$U_1^2(x) = 0,\quad x\in\Gamma.$$

Для компонент $U_1^1(x)$, $U_1^2(x)$, $\rho_U(x)$ справедливы оценки

$$|U_1^1(x)| \le M, \quad |U_1^2(x)| \le M\sigma_1, \quad x \in \overline{D}, \qquad (6.9\text{в})$$
$$|\rho_U(x)| \le MN^{-2}\ln N, \quad x \in \overline{D}_h^*.$$

6.2.4. Из (6.8), (6.9) следует разложение для функции $z(x)$, $x \in \overline{D}_h^*$, — решения задачи (6.6), (6.5):

$$z(x) = u(x) + N^{-1}u_1(x) + \rho_u(x), \quad x \in \overline{D}_h^*, \qquad (6.10)$$

где $u_1(x) = U_1(x) + V_1(x)$, $x \in \overline{D}$, $\rho_u(x) = \rho_U(x) + \rho_V(x)$, $x \in \overline{D}_h^*$, причем

$$|u_1(x)| \le M\ln N, \quad x \in \overline{D}, \quad |\rho_u(x)| \le MN^{-2}\ln^2 N, \quad x \in \overline{D}_h^*. \qquad (6.11)$$

Для функции $z^{k_0}(x)$, $x \in \overline{D}_h^{*k_0}$, получается разложение

$$z^{k_0}(x) = u(x) + k_0 N^{-1}u_1(x) + \rho_u^{k_0}(x), \quad x \in \overline{D}_h^{*k_0}, \qquad (6.12\text{а})$$

где $u_1(x) = u_{1(6.10)}(x)$, причем

$$|\rho_u^{k_0}(x)| \le MN^{-2}\ln^2 N, \quad x \in \overline{D}_h^{*k_0}. \qquad (6.12\text{б})$$

Из разложений (6.10), (6.12а) и оценок (6.11), (6.12б) вытекает, что для функции

$$z^0(x) = \gamma z(x) + (1-\gamma)z^{k_0}(x), \quad x \in \overline{D}_h^{*0}, \qquad (6.13)$$

где $z(x)$ и $z^{k_0}(x)$ — решения задач (6.6) на сетках $\overline{D}_{h(6.5)}^*$ и $\overline{D}_h^{*k_0}$, при

$$\gamma = \gamma^{k_0} = k_0(k_0-1)^{-1} \qquad (6.14)$$

справедлива оценка

$$|u(x) - z^0(x)| \le MN^{-2}\ln^2 N, \quad x \in \overline{D}_h^{*0}. \qquad (6.15)$$

Теорема 6.1. *Пусть для данных краевой задачи* (6.4), (6.3) $b, c, f \in C^{4+\alpha}(\overline{D})$, $\alpha > 0$. *Тогда функция* $z^0_{(6.13)}(x)$, $x \in \overline{D}_h^{*0}$, *являющаяся приближением метода Ричардсона на основе решений разностной схемы* (6.6) *на сетках* $\overline{D}_{h(6.5)}^*$ *и* $\overline{D}_h^{*k_0}$, *при условиях* (6.2), (6.14) *сходится при* $N \to \infty$ *к решению краевой задачи* (6.4), (6.3) ε*-равномерно со скоростью* $\mathcal{O}(N^{-2}\ln^2 N)$; *для функций* $z(x)$ *и* $z^{k_0}(x)$ *справедливы разложения* (6.10), (6.12), *а для функции* $z^0(x)$ — *оценка* (6.15).

6.3. Построим разложения для решений разностных схем (4.2), (4.5) и (4.2), (5.1) в случае условия (6.2).

Декомпозиции

$$u(x) = U(x) + V_{(1)}(x) + V_{(2)}(x) + V_{(1,2)}(x), \quad x \in \overline{D}, \qquad (6.16\text{а})$$

решения краевой задачи (2.2), (2.1) (см., напр., представление (3.2)) сопоставим соответствующую сеточную декомпозицию

$$z(x) = z_U(x) + z_{V_{(1)}}(x) + z_{V_{(2)}}(x) + z_{V_{(1,2)}}(x), \quad x \in \overline{D}_h^*, \qquad (6.16\text{б})$$

решения разностной схемы (4.2), (4.5), (6.2).

6.3.1. Для функции $z_{V_{(1,2)}}(x)$, $x \in \overline{D}_h^*$, разложение строим в виде

$$z_{V_{(1,2)}}(x) = V_{(1,2)}(x) + N^{-1}[V_{(1,2)1}(x) + V_{(1,2)2}(x)] + \rho_{V_{(1,2)}}(x), \quad x \in \overline{D}_h^*. \qquad (6.17\text{а})$$

Здесь $N = N_{(4.5)}$; функции $V_{(1,2)i}(x)$, $x \in \overline{D}$, — решения краевых задач

$$L_{(2.2)}V_{(1,2)i}(x) = -\sigma_i N N_i^{-1} b_i(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} V_{(1,2)}(x), \quad x \in D,$$
$$V_{(1,2)i}(x) = 0, \quad x \in \Gamma, \quad i = 1, 2.$$

С учетом априорных оценок для функции $V_{(1,2)}(x)$ находятся априорные оценки компонент $V_{(1,2)i}(x)$ и устанавливаются оценки

$$|V_{(1,2)i}(x)| \le M \ln N, \qquad x \in \overline{D};$$
$$|\rho_{V_{(1,2)}}(x)| \le M N^{-2} \ln^2 N, \quad x \in \overline{D}_h^*.$$

6.3.2. Функцию $z_{V_{(j)}}(x)$ представим в виде суммы функций

$$z_{V_{(j)}}(x) = V_{(j)}(x) + N^{-1}[V_{(j)1}(x) + V_{(j)2}(x)] + \rho_{V_{(j)}}(x), \quad x \in \overline{D}_h^*, \tag{6.17б}$$

где

$$V_{(1)2}(x) = V^1_{(1)2}(x) + V^2_{(1)2}(x) + V^3_{(1)2}(x), \tag{6.17в}$$
$$V_{(2)1}(x) = V^1_{(2)1}(x) + V^2_{(2)1}(x) + V^3_{(2)1}(x), \quad x \in \overline{D}.$$

Функции $V_{(1)1}(x)$, $V^1_{(1)2}(x)$, $V^2_{(1)2}(x)$, $V^3_{(1)2}(x)$, $x \in \overline{D}$, — сужения на $\overline{D}$ функций $V^0_{(1)1}(x)$, $V^{10}_{(1)2}(x)$, $V^{20}_{(1)2}(x)$, $V^{30}_{(1)2}(x)$, $x \in \overline{D}_{(j)(3.7)}$. Эти функции находятся из решения краевых задач

$$L_{(2.2)}V^0_{(1)1}(x) = -\sigma_1 N N_1^{-1} b_1(x) \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} V^0_{(1)}(x), \quad x \in D_{(1)}, \quad V^0_{(1)1}(x) = 0, \quad x \in \Gamma_{(1)};$$
$$L_{(2.2)}V^{10}_{(1)2}(x) = -(d_2 - \sigma_2) N N_2^{-1} b_2(x) \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} V^0_{(1)}(x), \quad x \in D_{(1)},$$
$$V^{10}_{(1)2}(x) = 0, \quad x \in \Gamma_{(1)};$$
$$L_2 V^{20}_{(1)2}(x) = \begin{cases} (d_2 - \sigma_2) N N_2^{-1} b_2(x) \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} V^0_{(1)}(x), & x_2 < \sigma_2; \\ 0, & x_2 > \sigma_2, \end{cases} \quad x \in \overline{D}_{(1)} \setminus \Gamma_{(1)4},$$
$$V^{20}_{(1)2}(x) = 0, \quad x \in \Gamma_{(1)4};$$
$$L_{(2.2)}V^{30}_{(1)2}(x) = -L_1 V^{20}_{(1)2}(x), \quad x \in D_{(1)}, \quad V^{30}_{(1)2}(x) = 0, \quad x \in \Gamma_{(1)}.$$

Здесь $V^0_{(1)}(x) = V^0_{(1)(3.8)}(x)$, $x \in \overline{D}_{(1)}$, операторы $L_{(2.2)}$, L_1, L_2 считаем определенными на всей плоскости, $L_1 \equiv \varepsilon a_1(x) \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + b_1(x) \frac{\partial}{\partial x_1} - c(x)$, $L_2 = L_{(2.2)} - L_1$. Функции $V^i_{(2)1}(x)$, $i = 1, 2, 3$, находятся из решения подобных краевых задач.

Заметим, что для функций $V^0_{(j)}(x)$, $x \in \overline{D}_{(j)}$, справедливы априорные оценки (3.9а), где $V_{(j)}(x)$ и Γ_j, $\overline{D}$ суть $V^0_{(j)}(x)$ и $\Gamma_{(j)}$, $\overline{D}_{(j)}$ соответственно.

Подобно выводу оценок (3.9а) выводятся априорные оценки для компонент $V^i_{(j)3-j}(x)$, $x \in \overline{D}$, $j = 1, 2$, $i = 1, 2, 3$. Эти оценки используются для оценки функции $\rho_{V_{(j)}}(x)$, $x \in \overline{D}_h^*$, — остаточного члена в разложении (6.17б). Для компонент из этого разложения получаются оценки

$$|V_{(j)i}(x)| \le M \ln N, \quad i = j, \quad |V_{(j)i}(x)| \le M\varepsilon \ln N, \quad i \ne j, \quad x \in \overline{D};$$
$$|\rho_{V_{(j)}}(x)| \le M N^{-2} \ln^2 N, \quad x \in \overline{D}_h^*, \quad j = 1, 2, \quad i = 1, 2, 3.$$

6.3.3. Функцию $z_U(x)$, $x \in \overline{D}_h^*$, представим в виде

$$z_U(x) = U(x) + N^{-1}[U_1(x) + U_2(x)] + \rho_U(x), \quad x \in \overline{D}_h^*, \tag{6.17г}$$

где

$$U_i(x) = \sum_{k=1}^{3} U_i^k(x), \quad x \in \overline{D}, \quad i = 1, 2. \tag{6.17д}$$

Функции $U_i^k(x)$, $x \in \overline{D}$, — сужения на $\overline{D}$ функций $U_i^{k0}(x)$, $x \in \overline{D}^0_{(3.3)}$. Функции $U_1^{k0}(x)$, $x \in \overline{D}^0$, являются решениями задач

$$LU_1^{10}(x) = -(d_1 - \sigma_1)NN_1^{-1}b_1(x)\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}U^0(x), \quad x \in D^0, \quad U_1^{10}(x) = 0, \quad x \in \Gamma^0;$$

$$L_1U_1^{20}(x) = \begin{cases} (d_1 - 2\sigma_1)NN_1^{-1}b_1(x)\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}U^0(x), & x_1 < \sigma_1; \\ 0, & x_1 > \sigma_1, \end{cases} \quad x \in \overline{D}^0 \setminus \Gamma_1^0,$$

$$U_1^{20}(x) = 0, \quad x \in \Gamma_1^0;$$

$$LU_1^{30}(x) = -L_2U_1^{20}(x), \quad x \in D^0, \quad U_1^{30}(x) = 0, \quad x \in \Gamma^0.$$

Здесь $U^0(x) = U^0_{(3.3)}(x)$, $x \in \overline{D}^0$. Функции $U_2^k(x)$, $x \in \overline{D}$, находятся подобным образом.

Для функции $U^0(x)$, $x \in \overline{D}^0$, выполняются оценки, подобные (3.6а), причем $U_1^{20}, U_2^{20} \in C^{1+\alpha}(\overline{D}^0)$, $U_1^{30}, U_2^{30} \in C^{3+\alpha}(\overline{D}^0)$, $U_1^{10}(x)$, $U_2^{10}(x)$ — достаточно гладкие функции.

Для компонент из представления (6.17д) находим априорные оценки, которые используем при оценке функции $\rho_U(x)$, $x \in \overline{D}_h^*$. Для компонент из разложения (6.17г), (6.17д) получаются оценки

$$\begin{aligned} &|U_1^k(x)|,\ |U_2^k(x)| \le M \ln N, && k = 1, \\ &|U_1^k(x)|,\ |U_2^k(x)| \le M\varepsilon \ln N, && k = 2, 3, \quad x \in \overline{D}; \\ &|\rho_U(x)| \le MN^{-2}\ln^2 N, && x \in \overline{D}_h^*. \end{aligned}$$

6.3.4. Из представления (6.16) и разложений (6.17) следует разложение

$$z(x) = u(x) + N^{-1}[u_0(x) + u_1(x)] + \rho_u(x), \quad x \in \overline{D}_h^*, \tag{6.18а}$$

где

$$u_0(x) = \sum_{i=1,2} [U_i^1(x) + V_{(i)i}(x) + V_{(1,2)i}(x)], \tag{6.18б}$$

$$u_1(x) = \sum_{i=1,2} [U_i^2(x) + U_i^3(x) + V_{(i)3-i}^1(x) + V_{(i)3-i}^2(x) + V_{(i)3-i}^3(x)], \quad x \in \overline{D},$$

$$\rho_u(x) = \rho_U(x) + \rho_{V_{(1)}}(x) + \rho_{V_{(2)}}(x) + \rho_{V_{(1,2)}}(x), \quad x \in \overline{D}_h^*.$$

Для компонент из (6.18а) справедливы оценки

$$|u_0(x)| \le M \ln N, \quad |u_1(x)| \le M\varepsilon \ln N, \quad x \in \overline{D},$$
$$|\rho_u(x)| \le MN^{-2}\ln^2 N, \quad x \in \overline{D}_h^*.$$

Для функции $z^{k_0}(x)$, $x \in \overline{D}_h^{*k_0}$, имеет место разложение

$$z^{k_0}(x) = u(x) + k_0N^{-1}[u_0(x) + u_1(x)] + \rho_u^{k_0}(x), \quad x \in \overline{D}_h^{*k_0}, \tag{6.19}$$

где $u_i(x) = u_{i(6.18)}(x)$, $i = 1, 2$, причем $|\rho_u^{k_0}(x)| \le MN^{-2}\ln^2 N$, $x \in \overline{D}_h^{*k_0}$.

Таким образом, для функции $z^0_{(6.1)}(x)$, $x \in \overline{D}_h^{*0}$, при $\gamma = \gamma_{(6.14)}$ получается оценка

$$|u(x) - z^0(x)| \le MN^{-2}\ln^2 N, \quad x \in \overline{D}_h^{*0}. \tag{6.20}$$

Теорема 6.2. *Пусть для решений краевой задачи* (2.2), (2.1) *выполняются априорные оценки* (3.6), (3.9) *при* $K = 7$. *Тогда функция* $z^0_{(6.1)}(x)$, $x \in \overline{D}^{*0}_h$, — *приближение метода Ричардсона на основе решений разностной схемы* (4.2) *на сетках* $\overline{D}^*_{h(4.5)}$ *и* $\overline{D}^{*k_0}_{h(5.1)}$ — *при условиях* (6.2), (6.14) *сходится при* $N \to \infty$ *к решению краевой задачи* (2.2), (2.1) ε*-равномерно со скоростью* $\mathcal{O}(N^{-2}\ln^2 N)$; *для функций* $z(x)$, $x \in \overline{D}^*_h$, *и* $z^{k_0}(x)$, $x \in \overline{D}^{*k_0}_h$, *справедливы разложения* (6.18) *и* (6.19), *а для функции* $z^0(x)$, $x \in \overline{D}^{*0}_h$, — *оценка* (6.20).

Замечание 6.1. В том случае, когда выполняется условие

$$\varepsilon \leq MN^{-1},$$

разложения (6.18), (6.19) существенно упрощаются. Для функций $z(x)$ и $z^{k_0}(x)$ справедливы разложения

$$\begin{aligned} z(x) &= u(x) + N^{-1}u_0(x) + \rho_u(x), \qquad x \in \overline{D}^*_h, \\ z^{k_0}(x) &= u(x) + k_0 N^{-1}u_0(x) + \rho^{k_0}_u(x), \quad x \in \overline{D}^{*k_0}_h, \end{aligned}$$

где $u_0(x) = u_{0(6.18)}(x)$, причем

$$|\rho_u(x)| \leq MN^{-2}\ln^2 N, \quad x \in \overline{D}^*_h, \quad |\rho^{k_0}_u(x)| \leq MN^{-2}\ln^2 N, \quad x \in \overline{D}^{*k_0}_h.$$

Автор выражает признательность участникам IV Всероссийского семинара “Сеточные методы для краевых задач и приложения” (Казань, 13–16 сентября 2002 г.) за обсуждение его доклада о задачах с ограниченной гладкостью решений.

Литература

1. Марчук Г.И. *Методы вычислительной математики.* – М.: Наука, 1989. – 608 с.
2. Самарский А.А. *Теория разностных схем.* – М.: Наука, 1989. – 616 с.
3. Бахвалов Н.С. *К оптимизации методов решения краевых задач при наличии пограничного слоя* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1969. – Т. 9. – № 4. – С. 841–859.
4. Ильин А.М. *Разностная схема для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной* // Матем. заметки. – 1969. – Т. 6. – Вып. 2. – С. 237–248.
5. Дулан Э., Миллер Дж., Шилдерс У. *Равномерные численные методы решения задач с пограничным слоем.* – М.: Мир, 1983. – 199 с.
6. Шишкин Г.И. *Сеточные аппроксимации сингулярно возмущенных эллиптических и параболических уравнений.* – Екатеринбург: УрО РАН, 1992. – 233 с.
7. Miller J.J.H., O’Riordan E., Shishkin G.I. *Fitted numerical methods for singular perturbation problems.* – Singapore: World Sci., 1996. – 166 p.
8. Roos H.-G., Stynes M., Tobiska L. *Numerical methods for singularly perturbed differential equations. Convection-diffusion and flow problems.* – Berlin: Springer-Verlag, 1996. – 348 p.
9. Багаев Б.М., Шайдуров В.В. *Сеточные методы решения задач с пограничным слоем.* – Ч. 1. — Новосибирск: Наука, 1998. – 199 с.
10. Farrell P.A., Hegarty A.F., Miller J.J.H., O’Riordan E., Shishkin G.I. *Robust computational techniques for boundary layers.* – Boca Raton: CRC Press, 2000. – 254 p.
11. Марчук Г.И., Шайдуров В.В. *Повышение точности решений разностных схем.* – М.: Наука, 1979. – 319 с.
12. Böhmer K., Stetter H. (Eds.) *Defect correction methods. Theory and applications.* – Comput. Suppl. 5. – Vienna: Springer-Verlag, 1984. – 243 p.
13. Hemker P.W., Shishkin G.I., Shishkina L.P. *High-order time-accurate schemes for parabolic singular perturbation problems with convection* // Russian J. Numer. Anal. Math. Modelling. – 2002. – V. 17. – № 1. – P. 1–24.

14. Шишкин Г.И. *Повышение точности приближенных решений коррекцией невязки для сингулярно возмущенных уравнений с конвективными членами* // Изв. вузов. Математика. – 1999. – № 5. – С. 81–93.
15. Шишкин Г.И. *Повышение точности решений разностных схем для параболических уравнений с малым параметром при старших производных* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1984. – Т. 24. – № 6. – С. 864–875.
16. Шишкин Г.И. *Сеточные аппроксимации для сингулярно возмущенных эллиптических уравнений* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1998. – Т. 38. – № 12. – С. 1989–2001.
17. Шишкин Г.И. *Разностная схема для сингулярно возмущенного параболического уравнения с разрывным граничным условием* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1988. – Т. 28. – № 11. – С. 1679–1692.
18. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа.* – М.: Наука, 1973. – 576 с.

Институт математики и
механики Уральского отделения
Российской академии наук

Поступила
14.07.2003