Министерство образования и науки Российской Федерации

КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ ИМ. Н. И. ЛОБАЧЕВСКОГО

КАФЕДРА ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Направление: 010800.68- Механика и математическое моделирование

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

(Дипломная работа)

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ТЕРМОПЛАСТИЧНОСТИ

Работа завершена:
"___"_____2014 г. _____ (А.Г. Ахманова)

Работа допущена к защите:

Научный руководитель
канд. физ.-мат. наук,
доцент кафедры теоретической механики
"___"_____2014 г. _____ (Д.В. Бережной)

Заведующий кафедрой
док. физ.-мат. наук, профессор
"___"_____2014 г. _____ (Ю.Г. Коноплев)

Казань - 2014

Оглавление

Введение……..... 3

Глава 1. Обзор пространственных термомеханических моделей…..……4

1.1. Общая постановка…….……. 4

1.2. Уравнение движения…….……. 6

1.3. Теория пластического течения…….. 8

Глава 2. Вычислительный алгоритм……..…. 11

2.1. Метод переменных параметров упругости……..….. 12

2.2. Метод дополнительных деформаций……..……... 16

Глава 3. Решение модельных задач…… 18

Заключение…….…….. 28

Список литературы…….. 29

Приложение……... 30

Введение

Некоторые технологические процессы (например, сварка) связаны с локальным нагревом материала до высокой температуры. В таких процессах неравномерность теплового расширения создает напряжения, интенсивность которых может превысить предел пластичности материала при текущей температуре. Это приводит к тому, что после охлаждения в материале сохраняются отличные от нуля деформации и напряжения, которые могут отрицательно сказаться на его качествах.

Для описания процессов деформирования материала при переменной температуре существуют различные модели, основанные на теории пластического течения. Согласно этой теории, необратимые деформации в материале возникают при выполнении некоторого условия, задаваемого поверхностью в пространстве напряжений. Форма и положение этой поверхности зависят от температуры, накопленной пластической деформации и некоторых дополнительных параметров.

Данная работа посвящена решению уравнений теории пластического течения с учетом температуры и дополнительных параметров. Для этого используется алгоритм, содержащий два вложенных итерационных процесса.

Внешние итерации представляют собой метод переменных параметров упругости. На каждой итерации находится очередное приближение поля скоростей, по нему вычисляется скорость полной деформации. Для вычисления поля напряжений и приращений пластической деформации используется еще один, вложенный, итерационный процесс.

Глава 1. Обзор пространственных термомеханических моделей

1.1. Общая постановка

Создание механико-математических моделей базируется непосредственно на результатах одномерных экспериментов. Сложность осуществления трехмерных экспериментов делает этот непосредственный подход трудно применимым. Механико-математические модели при сложном напряженном к деформированном состояниях создаются главным образом двумя путями: путем обобщения результатов одномерного случая на трехмерный и при помощи общего феноменологического или микроструктурного подхода. Обобщение одномерных моделей встречает значительные трудности. Существуют разнообразные способы осуществления этого перехода, которые ведут к различным результатам, хотя они базируются на одной и той же модели. Это требует экспериментальной проверки при помощи двумерных экспериментов или при помощи косвенных экспериментов на элементах и деталях, рассчитанных на основе рассматриваемой модели. На современном этапе развития механики чаще всего применяется второй подход. Очень подходящим для этой цели является общий термодинамический подход, примененный в сочетании с теоретико-экспериментальными, микроструктурными и другими исследованиями, уточняющими определяющие уравнения для конкретных тел. Из представленных ранее определяющих уравнений модели тела с внутренними параметрами состояния можно получить механико-математические модели тела с упругими, вязкими и пластическими свойствами. В данном параграфе рассматриваются упругопластические тела при малых деформациях.

Тела, которые деформируются пластически и подвергаются воздействию температурного поля, проявляют следующие эффекты. Температура вызывает, с одной стороны, термическое расширение тела, а с другой — меняет механические свойства материала. Она порождает некоторые структурные изменения, приводящие к изменению упругих и пластических свойств материала. Влияние температуры на пластические свойства более ощутимо и часто учитывают только его одно, принимая в то же время, что упругие характеристики от температуры не зависят.

Пластическая деформация тела связана с диссипацией энергии, которая вполне или частично превращается в тепло. Это тепло является дополнительным внутренним источником, который, вообще говоря, влияет на распределение температуры в теле. Таким образом, механический и термический процессы являются взаимно связанными.

При малых деформациях определяющие уравнения для термоупругопластических тел с упрочнением получаются из общих уравнений модели тела с внутренними параметрами состояния.

В случае тела с кристаллическим строением пластическое деформирование можно описать, например, при помощи следующей системы внутренних параметров состояния: усредненного симметричного тензора

плотности дислокаций ξ_{ij}, представляющего в макромасштабе ориентированные по-разному системы дислокаций в кристаллах, из которых состоит поликристаллический элементарный объем, и параметра упрочнения k, усреднение учитывающего плотность микродефектов в рассматриваемом поликристаллическом агрегате. Эти параметры зависят от пластической деформации, и их скорости равны нулю, когда нет изменения пластической деформации, т.е. $\dot{\xi}_{ij} = 0, \dot{k} = 0$ при $\dot{\varepsilon}_{ij}^{p}$. Определяющие уравнения термоупругопластического тела при этой системе внутренних параметров имеют вид

$$z = \tilde{z}(\sigma_{ij}, \theta, \xi_{ij}, k), (i, j, k, l, m = 1,2,3),$$
$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^{e} + \dot{\varepsilon}_{ij}^{p} + \dot{\varepsilon}_{ij}^{t}, \tag{1.1}$$

где представлены скорости упругих

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{e} = H_{ijkl}\sigma_{kl},$$
$$H_{ijkl}(\sigma_{mn}, \theta, \xi_{mn}, k) = -\rho \frac{\partial}{\partial \sigma_{kl}}\left(\frac{\partial \tilde{z}}{\partial \sigma_{ij}}\right), \tag{1.2}$$

термических

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{t} = \alpha_{ij}^{t}\dot{\theta},$$
$$\alpha_{ij}^{t}(\sigma_{mn}, \theta, \xi_{mn}, k) = -\rho \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial \tilde{z}}{\partial \sigma_{ij}}\right), \tag{1.3}$$

пластических деформаций.

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{p} = Y_{ijkl}\dot{\xi}_{kl} + N_{ij}\dot{k},$$
$$Y_{ijkl}(\sigma_{mn}, \theta, \xi_{mn}, k) = -\rho \frac{\partial}{\partial \xi_{kl}}\left(\frac{\partial \tilde{z}}{\partial \sigma_{ij}}\right), . \tag{1.4}$$
$$N_{ij}(\sigma_{mn}, \theta, \xi_{mn}, k) = -\rho \frac{\partial}{\partial k}\left(\frac{\partial \tilde{z}}{\partial \sigma_{ij}}\right)$$

причем

$$Y_{ijkl} = Y_{jikl} = Y_{klij} = Y_{ijlk},$$
$$H_{ijkl} = H_{jikl} = H_{klij} = H_{jilk}, \tag{1.5}$$
$$N_{ij} = N_{ji}, \alpha_{ij}^{t} = \alpha_{ji}^{t}, \dot{\varepsilon}_{ij}^{p} = 0$$

Можно принять и другие внутренние параметры, по это не изменит общей структуры определяющих уравнений. Так, например, для полимерных материалов е высокомолекулярным строением внутренние параметры будут иметь другой микромеханический смысл, но рассмотрение можно провести аналогичным способом.

Если справедлив линейный закон Фурье $q_i = -k_t\theta_i$, уравнение для температуры будет иметь вид

$$\rho c_t \dot{\theta} = k_t\theta - \alpha_{ij}^{t}\dot{\sigma}_{ij}\theta - \left(\theta\frac{\partial P_{ij}}{\partial \theta} - P_{ij}\right)\dot{\xi}_{ij} - \left(\theta\frac{\partial P_k}{\partial \theta} - P_k\right)\dot{k} + r\rho, \tag{1.6}$$

где

$$c_t = -\theta \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial \hat{z}}{\partial \theta}\right) = c_t\left(\sigma_{mn}, \theta, \xi_{mn}, \kappa\right), \tag{1.7}$$

$$P_{ij} = -\rho \frac{\partial \hat{z}}{\partial \xi_{ij}}, \quad P_\kappa = -\rho \frac{\partial \hat{z}}{\partial \kappa}, \quad P_{ij} = P_{ji}.$$

Второй закон термодинамики выражается неравенством

$$P_{ij}\dot{\xi}_{ij} + P_\kappa \dot{\kappa} \geq 0. \tag{1.8}$$

Уравнение эволюции параметров ξ_{ij} и κ можно представить в параметрическом виде при помощи параметра λ, так что $\dot{\lambda} \geq 0$, причем $\dot{\lambda} = 0$, если $\dot{\varepsilon}_{ij}^p = 0$;

$$\dot{\xi}_{ij} = H_{ij}\left(\sigma_{mn}, \theta, \xi_{mn}, \kappa\right)\dot{\lambda}, \quad H_{ij} = H_{ji}, \tag{1.9}$$

$$\dot{\kappa} = H\left(\sigma_{mn}, \theta, \xi_{mn}, \kappa\right)\dot{\lambda},$$

При помощи (1.4) и (1.9) скорость пластической деформации выражается следующим образом:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = M_{ij}\dot{\lambda}, \tag{1.10}$$

где

$$M_{ij} = Y_{ijkl}H_{kl} + N_{ij}H, \tag{1.11}$$

$$M_{ij} = M_{ji}, \quad M_{kk} = 0.$$

Равенство (1.10) дает изменение пластической деформации и называется законом пластического течения.

Из (1.10) можно определить $\dot{\lambda} = M_{ij}^{-1}\dot{\varepsilon}_{ij}^p$, где M_{ij}^{-1} — тензор, обратный тензору M_{ij}, т.е. $M_{ij}^{-1}M_{ij} = 1$. Подставляя это выражение в (1.9), получаем

$$\dot{\xi}_{ij} = \tilde{Y}_{ijkl}\dot{\varepsilon}_{ij}^p, \quad \tilde{Y}_{ijkl} = \tilde{Y}_{jikl} = \tilde{Y}_{ijlk}, \tag{1.12}$$

$$\dot{\kappa} = \tilde{N}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}^p, \quad \tilde{N}_{ij} = \tilde{N}_{ji} = \tilde{Y}_{ijlk},$$

где

$$\tilde{Y}_{ijkl} = H_{ij}M_{kl}^{-1}, \quad \tilde{N}_{ij} = HM_{ij}^{-1}. \tag{1.13}$$

Уравнения (1.12) связывают линейным образом скорости изменения внутренних параметров состояния со скоростью пластической деформации и удовлетворяют требованию $\dot{\xi}_{ij} = 0$, $\dot{\kappa} = 0$ при $\dot{\varepsilon}_{ij}^p$. Для полного определения уравнений эволюции нужно определить параметр $\dot{\lambda}$, а для закона пластического течения — тензор M_{ij}. Это делается при помощи дополнительных предположений, которые конкретизируют механико-математическую модель для упругопластических тел.

1.2. Уравнения движения

Рассмотрим тонкую пластину из упруго-пластичного материала, свойства которого зависят от температуры. Будем предполагать, что перемещения и деформации, возникающие в пластине, малы. В частности, полные производные по времени будем везде заменять частными и примем,

что $\rho(x) = \rho_0 = const$. На данном этапе температурное поле будем для простоты считать заданной функцией времени и координат.

Тогда уравнения движения среды принимают вид:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \sigma_{ij,j} + f_i(x,t), x = \Omega, t > 0, i, j = 1..3.$$

$$\sigma_{ij} n_j = p_i(x,t), x \in S_p, \qquad (2.1)$$

$$u_i = \mu_i(x,t), x \in S_u, S_u \cap S_p = \varnothing, S_u \cup S_p$$

где $x = (x_1, x_2, x_3)$ - точка пространства, t - время, $u_i(x,t)$ - перемещения частиц среды, $\sigma_{ij}(x,t)$ - тензор напряжений, $f_i(x,t)$ - объемная плотность внешних сил, а $\sigma_{ij,j} = \frac{\partial}{\partial x_i}\sigma_{ij}$. Здесь и далее подразумевается суммирование по повторяющимся индексам. Индексы соответствуют декартовым координатам.

В рассматриваемых условиях можно пренебречь инерционным слагаемым $\rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$ и решать задачу в квазистатическом приближении.

Будем считать, что в начальный момент времени перемещения и скорости частиц среды равны нулю, напряжения в среде отсутствуют:

$$u_i(x,0) = 0, \frac{\partial u_i}{\partial t} = 0,$$

$$\sigma_{ij}(x,0) = 0$$

При малых перемещениях верно следующее соотношение между тензором полной деформации и перемещениями:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}).$$

Связь между деформациями и напряжениями задается законом Гука:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}(T)(\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^0)$$

где $C_{ijkl}(T)$ - тензор коэффициентов упругости, а ε_{ij}^0 - некоторая «начальная» деформация, при которой напряжения равны нулю. Она складывается из деформации теплового расширения (зависящей только от температуры) и необратимой деформации, накопленной в процессе нагрузки:

$$\varepsilon_{ij}^0 = \varepsilon_{ij}^T + \varepsilon_{ij}^p$$

Температурная деформация подчиняется закону теплового расширения:

$$\frac{\partial \varepsilon_{ij}^T}{\partial t} = \alpha_{ij}(T)\frac{\partial T}{\partial t} \quad ,$$

$$\varepsilon_{ij}^T = 0$$

при $T = T_0$. Здесь T_0 - температура естественного состояния среды. Закон изменения ε_{ij}^p можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial \varepsilon_{ij}^p}{\partial t} = E_{ij}, \ \varepsilon_{ij}^p\Big|_{t=0} = 0,$$

где E_{ij} - источник необратимой деформации. Конкретный вид тензора E_{ij} определяется моделью пластичности, используемой для описания материала. Кроме того, можно ввести тензор упругих деформаций ε_{ij}^{e}, линейно связанный с тензором напряжений: $\varepsilon_{ij}^{e} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^{0} = A_{ijkl}(T)\sigma_{kl}, A_{ijkl}(T) = C_{ijkl}^{-1}$.

Тогда скорость изменения полной деформации можно записать в виде:

$$\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} = \frac{\partial \varepsilon_{ij}^{e}}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon_{ij}^{T}}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon_{ij}^{p}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(A_{ijkl}\sigma_{kl}\right) + \alpha_{ij}\frac{\partial T}{\partial t} + E_{ij}. \tag{2.2}$$

В итоге система уравнений принимает вид:

$$\begin{aligned}
&\sigma_{ij,j} + f_i(x,t) = 0, x \in \Omega,\\
&\sigma_{ij} = C_{ijkl}(T)\varepsilon_{kl}^{e},\\
&\frac{\partial \varepsilon_{ij}^{e}}{\partial t} = \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} - \alpha_{ij}\frac{\partial T}{\partial t} - E_{ij}, \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right),\\
&u_i(x,t) = \mu_i(x,t), x \in S_u,\\
&\sigma_{ij}n_j = p_i(x,t), x \in S_p
\end{aligned} \tag{2.3}$$

В дальнейшем мы будем рассматривать изотропную среду, для которой закон Гука имеет вид:

$$\sigma_{ij} = 2G(T)\cdot e_{ij}^{e} + K(T)\varepsilon_{kk}^{e}\delta_{ij}, \varepsilon_{ij}^{e} = \frac{1}{2G}s_{ij} + \frac{1}{K}\sigma_{kk}\delta_{ij},$$

где $G(T)$– модуль сдвига, $K(T)$- модуль объемного сжатия, $e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\varepsilon_{kk}\delta_{ij}, s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij}$, - девиаторы деформаций и напряжений соответственно.

Закон температурного расширения в изотропном случае имеет вид:

$$\frac{\partial \varepsilon_{ij}^{T}}{\partial t} = \alpha(T)\frac{\partial T}{\partial t}\delta_{ij}.$$

1.3. Теория пластического течения

Необратимая деформация возникает в среде лишь при достижении определенного критического уровня напряжений, который зависит от температуры и некоторых дополнительных параметров $\xi^1 \ldots \xi^k$ (среди них могут быть тензорные, векторные и скалярные величины). Условия начала пластического течения можно представить с помощью поверхности в пространстве напряжений, форма и положение которой меняются при пластическом деформировании материала.

В теории пластического течения для описания поведения материала вводят функцию упрочнения $F(\sigma, T, \xi_1 \ldots \xi_k)$

Основные предположения теории пластического течения таковы:

1. Напряжения в любой точке удовлетворяют условию $F(\sigma, T, \xi_1 \ldots \xi_k) \le 0$

2. При $F(\sigma, T, \xi_j) < 0$ материал ведет себя упруго, т.е. $E_{ij} = 0$.

3. Выполнен принцип максимальной мощности: $N_p(\sigma) = \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}^p \to \max$.

4. Изменения объема всегда происходят упруго, т.е. $E_{ii} = 0$.

Таким образом, скорость изменения пластической деформации определяется из условий максимума функционала N_p при ограничении $F \le 0$. Если функция упрочнения $F(\sigma, T, \xi_1 ... \xi_k)$ является непрерывно - дифференцируемой (в дальнейшем будем рассматривать только такие функции), то

$$E_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^p = \begin{cases} \Lambda \dfrac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}, & F = 0,\ F' = \dfrac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}\dot{\sigma}_{ij} + \dfrac{\partial F}{\partial T}\dot{T} > 0, \\ 0, & \text{во всех остальных случаях,} \end{cases} \tag{2.4}$$

где $\Lambda > 0$ имеет смысл множителя Лагранжа, а F' означает производную от F по времени при условии $\xi_1 ... \xi_k = const$. Условие $F' > 0$ называют условием активного нагружения.

Если материал изначально изотропен, то тензорные величины могут входить в функцию F только в виде инвариантов. Изменение объема всегда упруго, поэтому функция упрочнения не зависит от первого инварианта тензора напряжений. Более того, для широкого класса материалов можно считать, что от третьих (кубических) инвариантов напряжений и деформаций эта функция также не зависит.

Для построения конкретной модели пластичности необходимо задать вид функции упрочнения F и указать законы изменения параметров $\xi^1 ... \xi^k$. В классической теории пластичности в функцию F помимо температуры и напряжений входит обычно тензор пластической деформации и дополнительный скалярный параметр, учитывающий накопленные в материале повреждения. Таким параметром может быть, например, энергия, ушедшая на пластическое деформирование: $\dfrac{\partial W}{\partial t} = \sigma_{ij}E_{ij}, W(0) = 0$ или параметр Одквиста q, характеризующий накопленную в материале пластическую деформацию: $\dfrac{\partial q}{\partial t} = \sqrt{2E_{ij}E_{ij}}, q(0) = 0$.

Выпишем явный вид функции упрочнения для некоторых моделей.

Идеальный упруго-пластический материал (материал без упрочнения) :

$$F(\sigma, T) = \frac{1}{2}s_{ij}s_{ij} - \tau_0^2(T) = 0,$$

где $\tau_0(T)$ - предел текучести, зависящий только от температуры.

Материал с изотропным упрочнением :

$$F(\sigma, T, q) = \frac{1}{2}s_{ij}s_{ij} - \tau^2(q, T) = 0,$$

где $\tau(q, T)$ - предел текучести, q - параметр Одквиста.

Материал с трансляционным упрочнением:

$$F(\sigma, T, q) = \frac{1}{2}(s_{ij} - a(T)\varepsilon_{ij}^p)(s_{ij} - a(T)\varepsilon_{ij}^p) - \tau_0^2(T) = 0$$

где $a(T)\varepsilon_{ij}^p$ - тензор микронапряжений.

Модель Кадашевича - Новожилова:

$$F(\sigma,T,q,\varepsilon^p)=\frac{1}{2}(s_{ij}-a(T)\varepsilon_{ij}^p)(s_{ij}-a(T)\varepsilon_{ij}^p)-\tau^2(T,q)=0\,.$$

Модель с учетом несовместности пластических деформаций:

$$F(\sigma,T,R)=\frac{1}{2}(s_{ij}-H_{ijkl}R_{kl})(s_{ij}-H_{ijkl}R_{kl})-\tau^2(T,q)=0$$

$$\frac{\partial R_{ij}}{\partial t}=\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial x_j}E_{ij}+\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_k}E_{kj}-\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}E_{kk}-\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial x_k}E_{ij}$$

Глава 2. Вычислительный алгоритм

Задачи пластичности характерны тем, что в них состояние материала в конкретный момент времени определяется всей предшествующей историей нагружения, а определяющие соотношения записываются лишь для скоростей изменения параметров, а не для их конечных значений. Поэтому вычислительный алгоритм следует строить таким образом, чтобы искомыми величинами в нем были приращения параметров за некоторый (достаточно малый) временной промежуток.

Введем разбиение $t_{k+1} = t_k + \Delta t_k, t_0 = 0, k = 1, 2...$ и усредним уравнения движения по временному интервалу $[t_k; t_{k+1}]$:

$$\frac{1}{\Delta t_k}\int_{t_k}^{t_{k+1}} \left(\sigma_{ij,j} + f_i(x,t)\right)dt = 0,\ x \in \Omega,$$

$$\frac{1}{\Delta t_k}\int_{t_k}^{t_{k+1}} u_i(x,t)dt = \frac{1}{\Delta t_k}\int_{t_k}^{t_{k+1}} \mu_i(x,t)dt,\ x \in S_u,$$

$$\frac{1}{\Delta t_k}\int_{t_k}^{t_{k+1}} \sigma_{ij} n_j dt = \frac{1}{\Delta t_k}\int_{t_k}^{t_{k+1}} p_i(x,t)dt,\ x \in S_p.$$

Интегралы будем аппроксимировать следующим образом:

$$\frac{1}{\Delta t_k}\int_{t_k}^{t_{k+1}} \left(\sigma_{ij,j} + f_i(x,t)\right)dt \approx \omega \cdot \left(\sigma_{ij,j}(t_{k+1}) + f_i(x,t_{k+1})\right) + (1-\omega)\left(\sigma_{ij,j}(t_k) + f_i(x,t_k)\right),\ \omega \in (0;1).$$

Считая известными все значения на предыдущем временном слое, получим уравнения относительно приращений $\Delta_k \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{k+1} - \sigma_{ij}^k$, $\sigma_{ij}^k = \sigma_{ij}(t_k)$:

$$\Delta_k \sigma_{ij,j} + \Delta_k f_i = -\beta\left(\sigma_{ij,j}^k + f_i(x,t_k)\right),\ \beta = 1/\omega.$$

Записав уравнение для невязки $r_i^k = \sigma_{ij,j}^k + f_i^k$, можно указать диапазон значений β, при которых она не возрастает: $0 < \beta < 2$

Граничные условия записываются аналогичным образом:

$$\Delta_k u_i = \Delta_k \mu_i - \beta\left(u_i^k - \mu_i(x,t_k)\right),$$

$$\Delta_k\left(\sigma_{ij} n_j\right) = \Delta_k p_i - \beta\left(\sigma_{ij}^k n_j - p_i(x,t_k)\right).$$

Связь между напряжениями и деформациями задается соотношениями:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}(T)\varepsilon_{ij}^e,$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{ij}^e}{\partial t} = \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} - \alpha_{ij}\frac{\partial T}{\partial t} - E_{ij},$$

где

$$E_{ij} = \begin{cases} \Lambda \dfrac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}, & F = 0,\ F' = \dfrac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}\dot{\sigma}_{ij} + \dfrac{\partial F}{\partial T}\dot{T} > 0, \\ 0, & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases}$$

Значения параметра Λ заранее неизвестны. Их следует подбирать в процессе решения задачи из условий выполнения ограничения $F = 0$ при активном нагружении.

В классических моделях пластичности удается получить явное выражение для параметра Λ в зависимости от скорости изменения напряжений и температуры. Тогда при выполнении условий активного нагружения можно выписать нелинейные уравнения относительно перемещений и решать их методом простой итерации (он же метод переменных параметров упругости) или методом Ньютона.

В модели с учетом несовместности пластических деформаций в закон изменения дополнительного параметра R_{ij} входят производные по пространству. Выписать явное выражение для Λ в этом случае невозможно, для его вычисления придется использовать метод типа проекции на ограничение. Смысл его заключается в следующем: вначале решают задачу без учета ограничений, а затем методом последовательных приближений определяют приращение пластической деформации, обеспечивающее выполнение ограничения. При этом учитывается смещение поверхности нагружения за счет зависимости дополнительных параметров от поля пластических деформаций.

2.1. Метод переменных параметров упругости.

Будем считать, что функция упрочнения задана в виде $F = F(\sigma, T, \varepsilon^p, q)$. Чтобы выписать уравнения движения в явном виде, необходимо получить выражение для скорости пластической деформации через скорости изменения напряжений и температуры. Для этого запишем полную производную по времени от функции F при условии $F' > 0$:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}^p}E_{ij} + \frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial t} = 0.$$

Учитывая, что $\frac{\partial q}{\partial t} = \sqrt{2E_{ij}E_{ij}}$, а $E_{ij} = \Lambda\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}$, получим следующее выражение для параметра Λ:

$$\Lambda = \frac{\frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}}\dot{\sigma}_{kl} + \frac{\partial F}{\partial T}\dot{T}}{-\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}^p} - \frac{\partial F}{\partial q}\sqrt{\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}}}. \qquad (2.5)$$

Тогда скорость пластической деформации при активном нагружении имеет вид:

$$\frac{\partial \varepsilon_{ij}^p}{\partial t} = E_{ij} = C_{ijkl}^p\dot{\sigma}_{kl} + \psi_{ij}^P\dot{T},$$

$$C_{ijkl}^p = \frac{\sigma_{ij}^*\sigma_{kl}^*}{\varphi},\ \psi_{ij}^P = \frac{\partial F/\partial T\,\sigma_{kl}^*}{\varphi}, \qquad (2.6)$$

где $\sigma_{ij}^* = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}$ - тензор активных напряжений, а $\varphi = -\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{kl}^p}\sigma_{kl}^* - \frac{\partial F}{\partial q}\sqrt{2\sigma_{kl}^*\sigma_{kl}^*}$ - параметр упрочнения.

С учетом (2.4) равенство (2.2) можно записать в виде:

$$\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} = \left(A_{ijkl} \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial t} + \sigma_{kl} \frac{\partial A_{ijkl}}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} \right) + \alpha_{ij} \frac{\partial T}{\partial t} + \left(C^{p}_{ijkl} \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial t} + \psi^{P}_{ij} \frac{\partial T}{\partial t} \right).$$

После преобразований получим:

$$\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} = \left(A_{ijkl} + C^{p}_{ijkl} \right) \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial t} + \left(\frac{\partial A_{ijkl}}{\partial T} \sigma_{kl} + \psi^{P}_{ij} + \alpha_{ij} \right) \frac{\partial T}{\partial t}.$$

Отсюда:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} = P_{ijkl} \left(\frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial t} - \psi^{T}_{kl} \frac{\partial T}{\partial t} \right),$$

$$P_{ijkl}(\sigma, \dot{\sigma}, T, \dot{T}, q, \varepsilon^{p}) = \begin{cases} (A_{ijkl} + C^{p}_{ijkl})^{-1}, F(\sigma, T, q, \varepsilon^{p}) = 0, \dot{\sigma}_{ij} \dfrac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} + \dot{T} \dfrac{\partial F}{\partial T} > 0, \\ C_{ijkl}, \end{cases}$$

$$\psi^{T}_{ij}(\sigma, \dot{\sigma}, T, \dot{T}, q, \varepsilon^{p}) = \begin{cases} \dfrac{\partial A_{ijkl}}{\partial T} \sigma_{kl} + \alpha_{ij} + \psi^{p}_{ij}, F(\sigma, T, q, \varepsilon^{p}) = 0, \dot{\sigma}_{ij} \dfrac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} + \dot{T} \dfrac{\partial F}{\partial T} > 0 \\ \dfrac{\partial A_{ijkl}}{\partial T} \sigma_{kl} + \alpha_{ij}, \end{cases}$$

Чтобы получить связь между приращениями напряжений и деформаций, проинтегрируем это уравнение по $t \in [t_k; t_{k+1}]$:

$$\Delta_k \sigma_{ij} = \int_{t_k}^{t_{k+1}} P_{ijmn} \left(\frac{\partial \varepsilon_{mn}}{\partial t} - \psi^{T}_{mn} \frac{\partial T}{\partial t} \right) dt.$$

Тогда в предположении о монотонности функций P_{ijmn}, ψ^{T}_{ij} получим

$$\Delta \sigma_{ij} \approx \overline{P_{ijmn}} \Delta \varepsilon_{mn} - \overline{P_{ijmn} \psi^{T}_{mn}} \Delta T,$$

где

$$\overline{P_{ijmn}} = P_{ijmn}\left(\sigma + \gamma \sigma, \Delta \sigma, T + \gamma_1 \Delta T, \Delta T, \varepsilon^{p} + \gamma \Delta \varepsilon^{p} \right),$$

$$\overline{\psi^{T}_{mn}} = \psi_{mn}\left(\sigma + \gamma \sigma, \Delta \sigma, T + \gamma_1 \Delta T, \Delta T, \varepsilon^{p} + \gamma \Delta \varepsilon^{p} \right), \ \gamma, \gamma_1 \in (0;1)$$ -

значения в некоторой промежуточной точке. Здесь и далее индекс k при Δ опущен для краткости.

Вычислим приращение пластической деформации за шаг по времени, считая, что тензорные функции $C^{p}_{ijkl}, \psi^{p}_{ij}$ монотонны по t при $t \in [t_k; t_{k+1}]$:

$$\Delta \varepsilon^{p}_{ij} = \left(\overline{C^{p}_{ijkl}} \Delta \sigma_{kl} + \overline{\psi^{p}_{ij}} \Delta T \right),$$

Где $\overline{C^{p}_{ijkl}}, \overline{\psi^{p}_{ij}}$ - значения в некоторой промежуточной точке. Теперь проинтегрируем соотношения (2.2) по t, зафиксировав некоторую среднюю поверхность пластичности, соответствующую значению $\varepsilon^{p}_{ij} + \gamma \Delta \varepsilon^{p}_{ij}$:

$$\Delta \varepsilon_{ij} = \left(\overline{P_{ijmn}} \right)^{-1} \Delta \sigma_{mn} + \overline{\psi^{T}_{mn}} \Delta T = \overline{A_{ijkl}} (\Delta \sigma_{kl}) + \left(\overline{\frac{\partial A_{ijkl}}{\partial T}} (\overline{\sigma}_{kl}) + \overline{\alpha}_{ij} \right) \Delta T + \gamma \Delta \varepsilon^{p}_{ij}$$

Отсюда

$$\overline{P_{ijmn}} = (\bar{A}_{ijkl} + \gamma C^p_{ijkl})^{-1},$$

$$\overline{P_{ijmn}\psi^T_{mn}} = \overline{P_{ijmn}}\left(\overline{\frac{\partial A_{ijkl}}{\partial T}}\left(\sigma_{kl} + \gamma\Delta\sigma_{kl}\right) + \bar{\alpha}_{ij} + \gamma\psi^P_{ij}\right), \tag{2.7}$$

где $\bar{A}_{ijkl}$, $\bar{\alpha}_{ij}$ - средние значения, зависящие только от температуры, тензоры C^p_{ijkl}, ψ^p_{ij} вычисляются в конечной точке $t_{k+1} = t_k + \Delta t$. В расчетах использовано значение параметра $\gamma = \frac{1}{2}$ При этом ограничение $F = 0$ при t_{k+1} не выполнено точно, его выполнение обеспечивается лишь в некоторой промежуточной точке временного интервала.

Таким образом, на каждом временном шаге имеем систему уравнений вида:

$$\Delta\sigma_{ij,j} + \Delta f_i = -\beta r_i,$$

$$\Delta\sigma_{ij} = \overline{P_{ijkl}}\Delta\varepsilon_{kl} - \overline{P_{ijkl}\psi^T_{ij}}\Delta T,$$

$$\overline{P}_{ijkl} = P_{ijkl}(\sigma, \dot{\sigma}, q, \varepsilon^p, T, \dot{T}), \psi^T_{ij} = \psi^T_{ij}(\sigma, \dot{\sigma}, q, \varepsilon^p, T, \dot{T});$$

$$\Delta\varepsilon^p_{ij} = \overline{C}^p_{ijkl}\Delta\sigma_{ij} + \overline{\psi}^p_{ij}\Delta T, \Delta q = \sqrt{2\Delta\varepsilon^p_{ij}\Delta\varepsilon^p_{ij}},$$

$$r_i = \sigma_{ij,j} + f_i.$$

дополненную граничными условиями:

$$\begin{cases} \Delta u_i = \Delta\mu_i - \beta\left(u^k_i - \mu_i(x, t_k)\right), \\ \Delta\sigma_{ij} n_j = \Delta p_i - \beta\left(\sigma^k_{ij} n_j - p_i(x, t_k)\right). \end{cases}$$

Тензоры $P_{ijkl}, \psi^T_{ij}, C^p_{ijkl}, \psi^p_{ij}$ определены выше. Их средние значения вычисляются по формулам (2.7).

Эти уравнения являются, очевидно, нелинейными. Для их решения используется метод простой итерации, на каждом шаге которого можно определить очередное приближение поля перемещений. Далее, по этому полю следует вычислить поле напряжений и приращение пластической деформации за временной шаг [4]. Таким образом, на каждом временном слое возникают два вложенных итерационных процесса.

На каждой итерации $s = 0, 1, 2...$ метода переменных параметров упругости решаем уравнение следующего вида:

$$L\left(\Delta u^{s+1}_i, \overline{P^s_{ijkl}}\right) = \Delta f^T_i\left(\overline{P^s_{ijkl}}, \overline{\psi^{T,s}_{ij}}\right), \text{ где}$$

$$L\left(\Delta u_i, P_{ijkl}\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(P_{ijkl}\Delta\varepsilon_{kl}\right), \quad \Delta f^T_i\left(P_{ijkl}, \psi^T_{ij}\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{P_{ijkl}\psi^T_{ij}}\Delta T\right) - \Delta f_i - \beta\left(\sigma_{ij,j} + f_i\right),$$

с соответствующими граничными условиями.

В качестве нулевого приближения задается $P^0_{ijkl} = A^{-1}_{ijkl} = C_{ijkl}$.

Результатом его решения являются приращения перемещений на очередном временном интервале. По ним можно вычислить приращение полной деформации. Далее следует выделить из этой деформации отдельно упругую и пластическую части. Тензор напряжений, необходимый для вычисления пластической деформации, сам зависит от нее, причем эта

зависимость нелинейна. Для вычисления напряжений организуем итерационный процесс следующего вида:

$$\Delta\sigma_{ij}^{s+1,q+1} = \bar{P}_{ijkl}^{s+1,q}\left(\frac{1}{2}\left(\Delta u_{i,j}^{s+1} + \Delta u_{j,i}^{s+1}\right) - \bar{\psi}_{kl}^{T,s+1,q}\Delta T\right);$$

$$\Delta\varepsilon_{ij}^{p,s+1,q+1} = \bar{C}_{ijkl}^{p}\left(\sigma_{ij}, \Delta\sigma_{ij}^{s+1,q+1}, \varepsilon_{ij}^{p}, \Delta\varepsilon_{ij}^{p,s+1,q}, T, \Delta T\right)\Delta\sigma_{ij}^{s+1,q+1};$$

Критериями прекращения итераций выбраны:

по q - $$d_S(\sigma_{ij}^{s+1,q+1}, \sigma_{ij}^{s+1,q}) = \frac{\left\|\sigma_{ij}^{s+1,q+1} - \sigma_{ij}^{s+1,q}\right\|_{\hat{L}_2(\Omega)}}{\left\|\sigma_{ij}^{s+1,q+1}\right\|_{\hat{L}_2(\Omega)} + \varepsilon_0} < \varepsilon_q,$$

по s – $$d_u\left(\Delta u_i^{s+1}, \Delta u_i^{s}\right)\frac{\left\|\Delta u_i^{s+1} - \Delta u_i^{s}\right\|_{\vec{L}_2(\Omega)}}{\left\|\Delta u_i^{s+1}\right\|_{\vec{L}_2(\Omega)} + \varepsilon_0} < \varepsilon_s.$$

Таким образом, алгоритм решения задачи на очередном временном слое выглядит следующим образом:

0. Начало временного слоя: $t = t + \Delta t$, $u_i = u_i + \Delta u_i$, $\sigma_{ij} = \sigma_{ij} + \Delta\sigma_{ij}$, $\varepsilon_{ij}^p = \varepsilon_{ij}^p + \Delta\varepsilon_{ij}^p$.
(равенство понимается здесь в смысле присваивания)
1. Вычисление невязок предыдущего слоя:

$$r_i = \sigma_{ij,j} + f_i,\ r_i^u = u_i^k - \mu_i(x,t_k),\ r_i^p = \sigma_{ij}^k n_j - p_i(x,t_k).$$

2. Вычисление правой части: $\Delta f_i^* = \Delta f_i - \beta r_i, \Delta\mu_i^* = \Delta\mu - \beta r_i^u, \Delta p_i^* = \Delta p_i - \beta r_i^p$.
3. Решение задачи в предположении об упругости материала:

$$\Delta\sigma_{ij} + \Delta f_i^* = 0, x \in \Omega,$$
$$\Delta u_i = \Delta\mu_i^*, x \in S_u,$$
$$\Delta\sigma_{ij} n_j = \Delta p_i^*, x \in S_p,$$ где $\Delta\sigma_{ij} = 2G\Delta e_{ij} + K\left(\Delta\varepsilon_{kk} - \bar{\alpha}_{ij}\Delta T\right)\delta_{ij}$, $\Delta\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\Delta u_{i,j} + \Delta u_{j,i}\right)$.

4. Вычисление нулевого приближения напряжений: $\sigma_{ij}^0 = \sigma_{ij} + \Delta\sigma_{ij}$.
5. Нахождение областей активного нагружения, в которых выполняются условия $F(\sigma_{ij}^0, \varepsilon_{ij}^p, T, \xi) > 0$ и $F(\sigma_{ij}^0, \varepsilon_{ij}^p, T + \Delta T, \xi) > 0$.
6. Пересчет в этих областях тензоров $\bar{C}_{ijkl}^p$, $\overline{\psi_{ij}^p}$, $\bar{P}_{ijkl}$, $\overline{P_{ijkl}\psi_{kl}^T}$ по значениям $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p$ на предыдущем временном слое и при $\Delta\sigma_{ij} = \Delta\sigma_{ij}^0$.
7. Расчет очередной итерации метода переменных параметров упругости:

$$\Delta\sigma_{ij} + \Delta f_i^* = 0, x \in \Omega,$$
$$\Delta u_i = \Delta\mu_i^*, x \in S_u,$$
$$\Delta\sigma_{ij} n_j = \Delta p_i^*, x \in S_p,$$ где $\Delta\sigma_{ij} = \overline{P_{ijkl}}\Delta\varepsilon_{ij} + \overline{P_{ijkl}\psi_{kl}^T}\Delta T.$

8. Вычисление $\Delta\sigma_{ij}$ и $\Delta\varepsilon_{ij}^p$ по текущим значениям $\bar{C}_{ijkl}^p$, $\overline{\psi_{ij}^p}$, $\bar{P}_{ijkl}$.
9. Пересчет $\bar{C}_{ijkl}^p$, $\overline{\psi_{ij}^p}$, $\bar{P}_{ijkl}$ с учетом новых значений $\Delta\sigma_{ij}$ и $\Delta\varepsilon_{ij}^p$.
10. Проверка условия сходимости итераций по p:
если выполнено, переход на 11, если не выполнено – на 8.
11. Проверка условия сходимости итераций по s:
если выполнено, переход на 0, если не выполнено – на 6.

Для дискретизации уравнений по пространству использованы конечные элементы первого порядка на треугольной сетке. При этом перемещения являются кусочно-линейными функциями, а деформации и напряжения постоянны на элементе.

Конечномерное вариационное уравнение на каждой из итераций выглядит следующим образом:

$$\forall J : x_K \in \Omega \cup S_p \qquad \int_\Omega \left(\overline{P_{ijkl}} \Delta\varepsilon_{kl} \right) \varphi^J_{,j} d\Omega =$$

$$= \int_\Omega \left(\Delta f_i + \beta r_i \right) \varphi^J d\Omega + \int_{S_P} \left(\Delta p_i + \beta r_i^P \right) \varphi^J dS + \int_\Omega \left(\overline{P_{ijkl} \psi^T_{kl}} \Delta T \right) \varphi^J_{,j} d\Omega,$$

$$\forall J : x_J \in S_{u,} \qquad \Delta U_i^J = \Delta\mu_i(x_J),\ x_J \in S_u,$$

$$\Delta\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\Delta u_{i,j} + \Delta u_{j,i} \right),\ \Delta u_i = \sum_{M=0}^{N} \Delta U_i^M \varphi^M .$$

где x_J - координаты J-го узла сетки (общее число узлов – N), ΔU_i^J приращение перемещений в J-м узле, φ^J - кусочно-линейные базисные функции, удовлетворяющие условиям $\varphi^J(x_M) = \delta_{JM}$.

Так как деформации и напряжения (а, значит, и тензоры $P_{ijkl},\ \psi^T_{ij},\ C^p_{ijkl},\ \psi^P_{ij}$) постоянны на треугольнике, то нахождение областей активного нагружения сводится к перебору треугольников и проверке в каждом из них условий $F(\sigma^0_{ij}, \varepsilon^p_{ij}, T, \xi) > 0$ и $F(\sigma^0_{ij}, \varepsilon^p_{ij}, T + \Delta T, \xi) > 0$. Если в каком-либо из треугольников выполнено условие $F(\sigma^0_{ij}, \varepsilon^p_{ij}, T, \xi) \cdot F(\sigma^0_{ij}, \varepsilon^p_{ij}, T + \Delta T, \xi) < 0$, то следует уменьшить шаг по времени так, чтобы обеспечить монотонность нагружения на этом шаге. Пункт 6 алгоритма сводится к пересчету коэффициентов матрицы жесткости в «активных» элементах .

2.2. Метод дополнительных деформаций.

Для реализации метода переменных параметров упругости необходимо знать явное выражение для Λ. Если такое выражение записать не удается, можно использовать метод дополнительных деформаций.

Решение на каждой итерации этого метода находят в два этапа [5]. На первом этапе рассматривают упругую (без учета ограничений) задачу и находят нулевое приближение деформаций и напряжений:

$$\Delta\varepsilon^0_{ij} = \frac{1}{2}\left(\Delta u^0_{i,j} + \Delta u^0_{j,i} \right);\ \varepsilon^0_{ij} = \varepsilon_{ij}(t_k) + \Delta\varepsilon^0_{ij},\ \ \sigma^0_{ij} = \sigma_{ij}(t_k) + \Delta\sigma^0_{ij}.$$

Если полученное поле напряжений σ^0_{ij} не нарушает нигде ограничений $F\left(\sigma^0_{ij}, T, \xi_1 ... \xi_k\right) \le 0$, $F\left(\sigma^0_{ij}, T + \Delta T, \xi_1 ... \xi_k\right) \le 0$, то тело находится в упругом состоянии и можно переходить к следующему временному слою.

Если одно из этих условий нарушено, на шаге возникает пластическая деформации, «корректирующая» напряжения и дополнительные параметры так, что $F\left(\sigma^0_{ij} - 2G\Delta e^p_{ij}, T + \Delta T, \xi_i(e^p_{ij}(t_k) + \Delta e^p_{ij})\right) = 0$.

Второй этап состоит в вычислении этой пластической деформации. Для этого вычисляем проекцию σ_{ij}^0 на ограничение при фиксированных ξ_i и определяем Δe_{ij}^p. Далее по Δe_{ij}^p вычисляем приращение $\xi_i\left(e_{ij}^p + \Delta e_{ij}^p\right)$. Затем снова вычисляем поле напряжений, проецируем его на ограничение и повторяем эту процедуру до выполнения критерия останова.

1. Начало временного слоя: $t = t + \Delta t$, $u_i = u_i + \Delta u_i$, $\sigma_{ij} = \sigma_{ij} + \Delta\sigma_{ij}$, $\varepsilon_{ij}^p = \varepsilon_{ij}^p + \Delta\varepsilon_{ij}^p$.
(равенство понимается здесь в смысле присваивания)
2. Вычисление невязок предыдущего слоя:

$$r_i = \sigma_{ij,j} + f_i,\ r_i^u = u_i^k - \mu_i(x,t_k),\ r_i^p = \sigma_{ij}^k n_j - p_i(x,t_k).$$

3. Вычисление правой части: $\Delta f_i^* = \Delta f_i - \beta r_i, \Delta\mu_i^* = \Delta\mu - \beta r_i^u, \Delta p_i^* = \Delta p_i - \beta r_i^p$.
4. Решение задачи в предположении об упругости материала:

$$\Delta\sigma_{ij} + \Delta f_i^* = 0, x \in \Omega,$$
$$\Delta u_i = \Delta\mu_i^*, x \in S_u,$$
$$\Delta\sigma_{ij} n_j = \Delta p_i^*, x \in S_p, \quad \text{где}\ \Delta\sigma_{ij} = 2G\Delta e_{ij} + K\Delta\varepsilon_{kk}\delta_{ij},\ \Delta\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\Delta u_{i,j} + \Delta u_{j,i}\right).$$

5. Вычисление предиктора: $\sigma_{ij}^0 = \sigma_{ij} + \Delta\sigma_{ij}^0$.
6. Нахождение областей активного нагружения, в которых выполняются условия $F(\sigma_{ij}^0, \varepsilon_{ij}^p, T, \xi) > 0$ и $F(\sigma_{ij}^0, \varepsilon_{ij}^p, T + \Delta T, \xi) > 0$.
7. Вычисление в активных областях первого приближения пластической деформации из условия $F\left(\sigma_{ij}^0 + \Delta\sigma_{ij}^{corr}, T + \Delta T, \xi\big|_{t_k}\right) = 0$, $\Delta\sigma_{ij}^{corr} = -2G(\overline{T})\Delta e_{ij}^p$.
8. Пересчет $\Delta\xi^s = \xi(\varepsilon^p + \Delta\varepsilon_s^p)$.
9. Вычисление очередной итерации Δu_i^s:

$$\Delta\sigma_{ij} + \Delta f_i^* = 0, x \in \Omega,$$
$$\Delta u_i = \Delta\mu_i^*, x \in S_u,$$
$$\Delta\sigma_{ij} n_j = \Delta p_i^*, x \in S_p, \quad \text{где}\ \Delta\sigma_{ij} = 2G\left(\Delta e_{ij} - \Delta e_{ij}^{p,s}\right) + K\left(\Delta\varepsilon_{kk} - \overline{\alpha}_{ij}\Delta T\right)\delta_{ij}.$$

10. Вычисление напряжений: $\Delta\sigma_{ij}^s = 2G\left(\Delta e_{ij} - \Delta e_{ij}^{p,s}\right) + K\left(\Delta\varepsilon_{kk} - \overline{\alpha}_{ij}\Delta T\right)\delta_{ij}$.
11. Вычисление очередного приближения пластической деформации из условия $F\left(\sigma_{ij}^0 + \Delta\sigma_{ij}^{corr}, T + \Delta T, \xi^s\right) = 0$, $\Delta\sigma_{ij}^{corr} = -2G(\overline{T})\Delta e_{ij}^{p,s+1}$.
12. Проверка условия $d_S(\varepsilon_{ij}^{p,s+1}, \varepsilon_{ij}^{p,s}) < \varepsilon$:
если выполнено, переход на 0, если не выполнено – на 8.

Глава 3. Решение модельной задачи.

В работе приводится расчет трехмерной модели, деформирующейся под действием теплового нагружения. Сама расчетная область приведена на рисунке 1, геометрические размеры которой следующие: a=2м, b= 4м, c=1м. Конструкция закреплена по левому торцу и к ней мгновенно прикладывается температура T. Расчет проводится для упругопластического материала со следующими механическими характеристиками: модуль Юнга E=2*10^5 МПа, коэффициент Пуассона $\mu = 0.3$, предел текучести $\sigma_T = 350$ МПа, коэффициент температурного расширения $\alpha_T = 0{,}00003$, температура нагрева $T =$ 200˚С. Задача решается в геометрически и физически нелинейной постановке, рассматривается модель идеально-пластического тела.

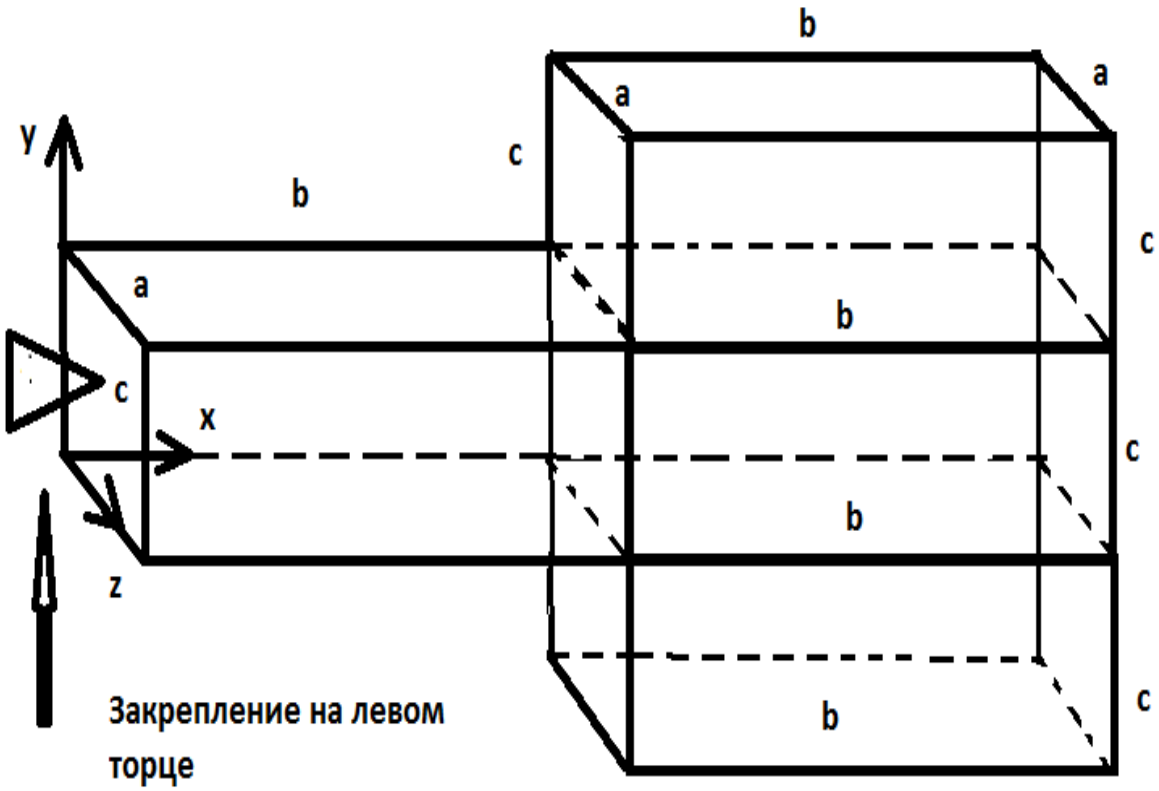

Рис.1. Расчетная область.

Первоначально исследовалась сходимость решения задачи. Используемые сетки конечных элементов приведены на рисунках 2-4.

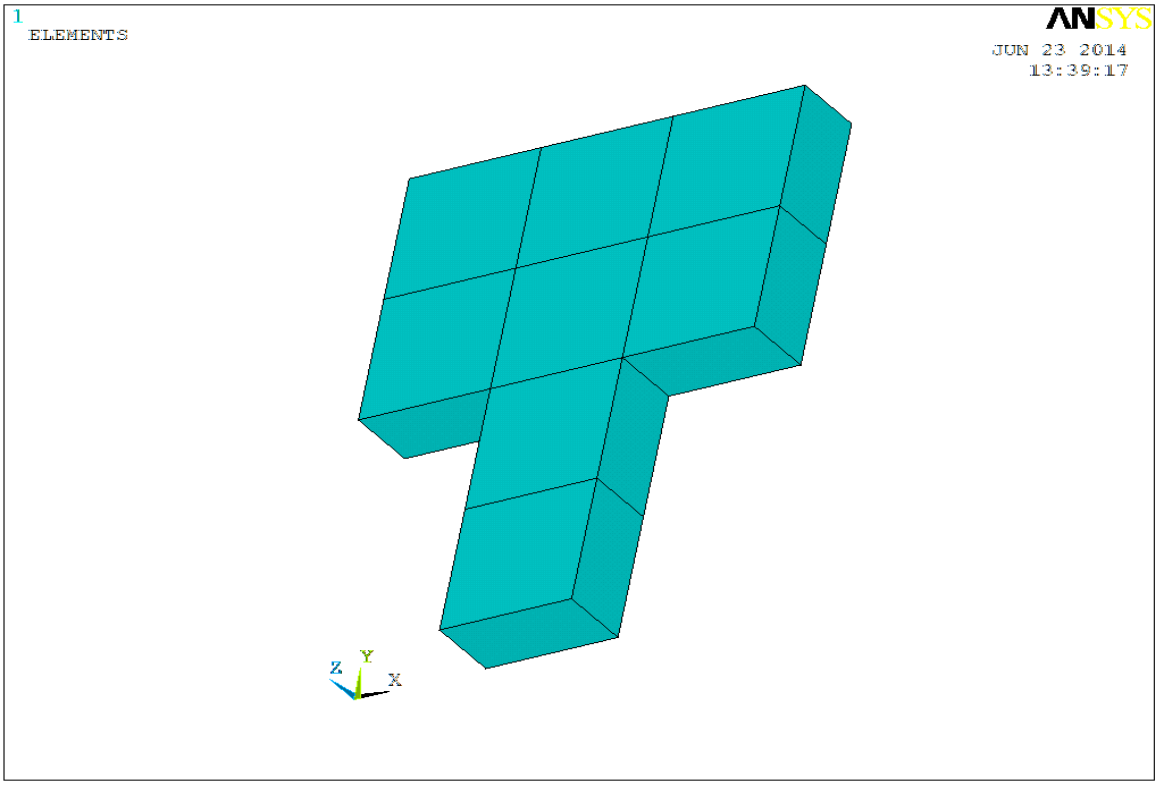

Рис.2. Сетка 1.

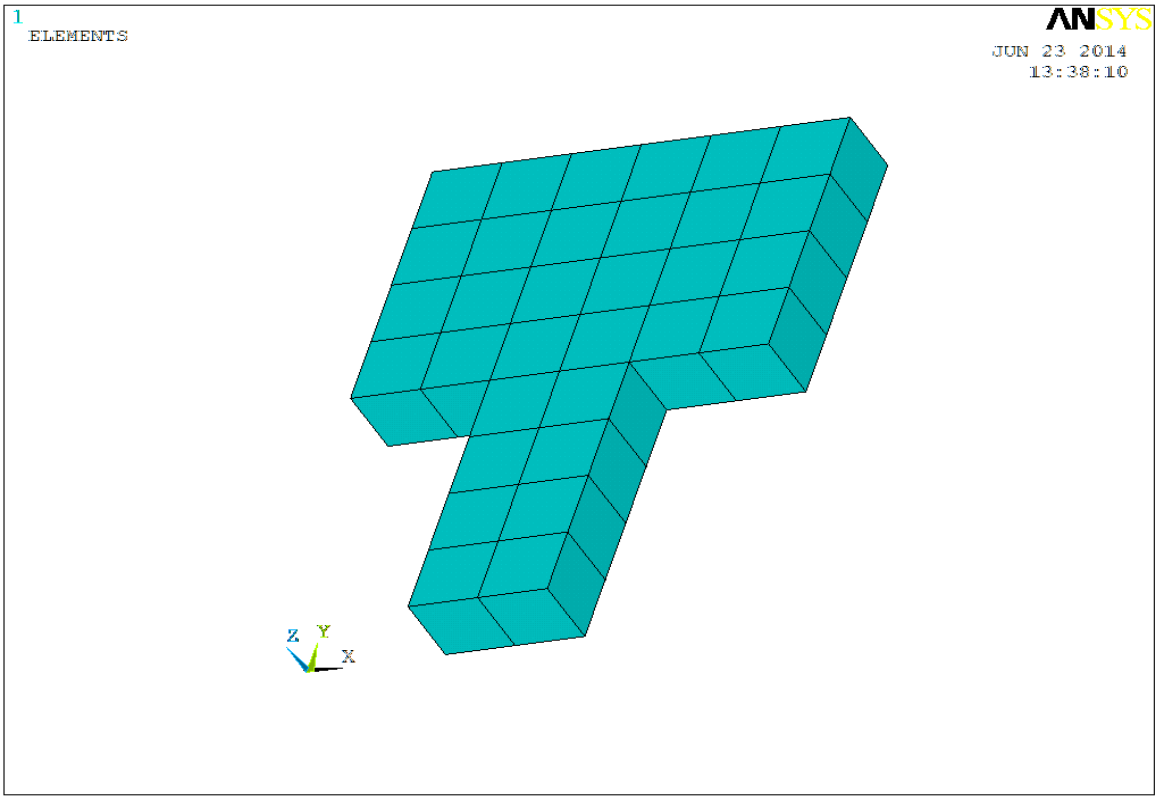

Рис.3. Сетка 2.

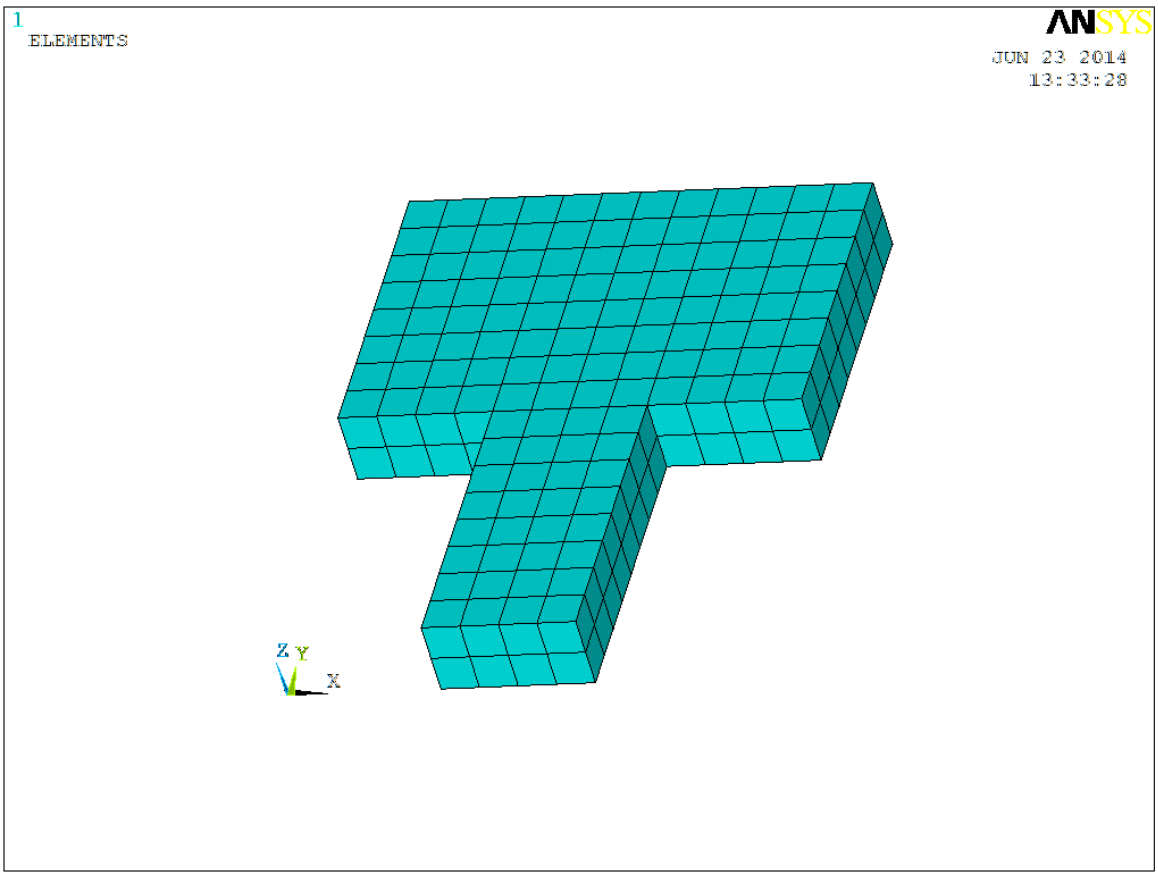

Рис.4. Сетка 3.

На рисунках 5-7 приведены распределения осевых смещений в расчетной модели для сеток 1-3 соответственно.

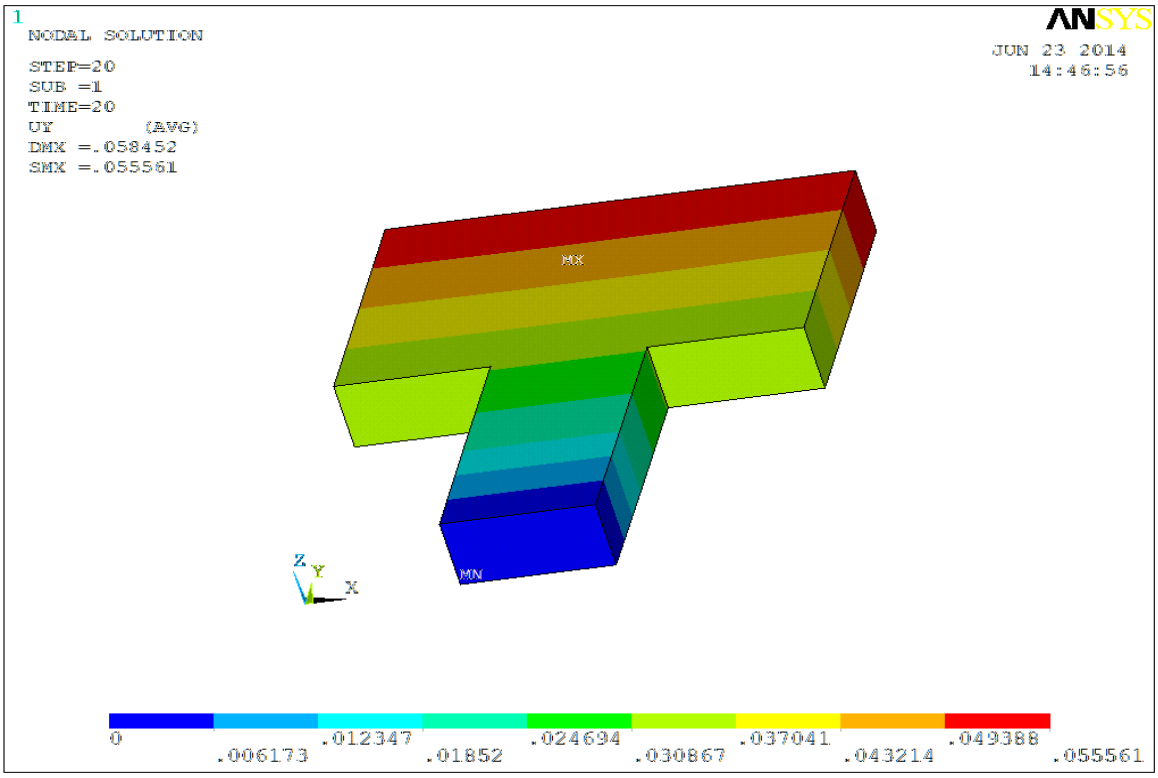

Рис.5. Осевые смещения. Сетка 1.

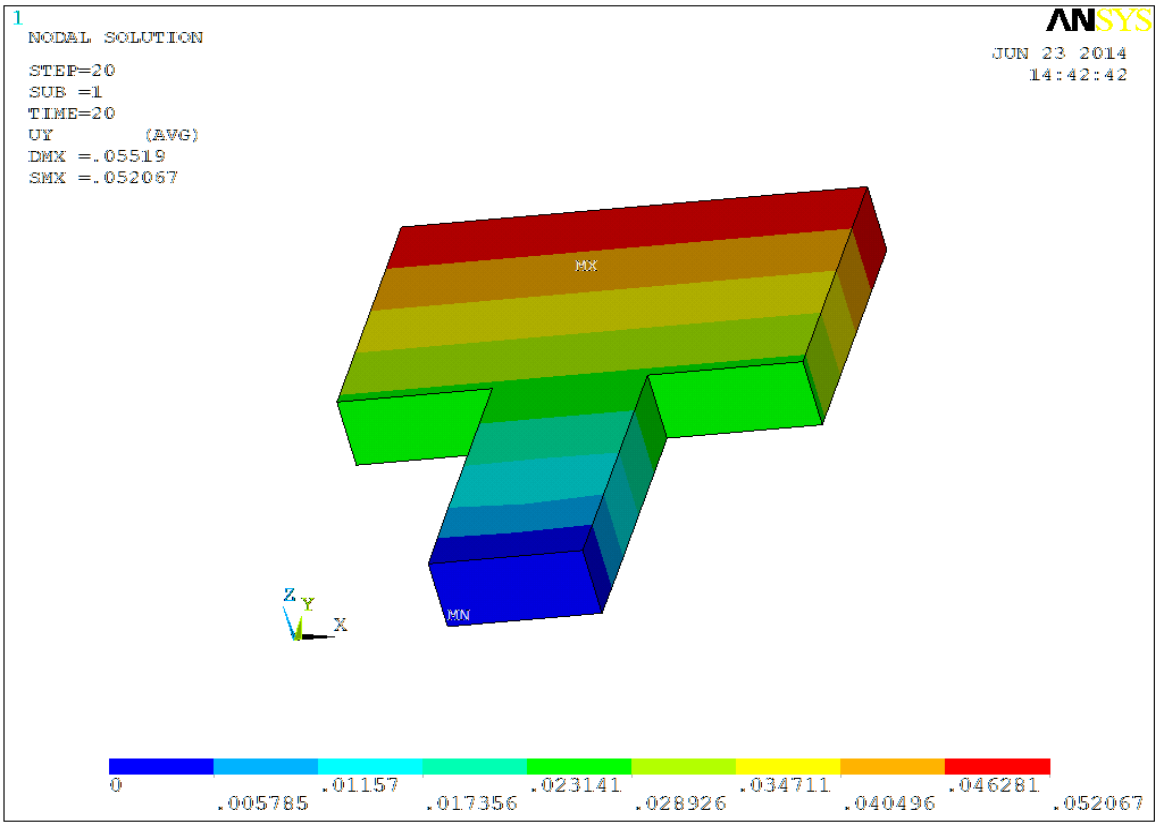

Рис.6. Осевые смещения. Сетка 2.

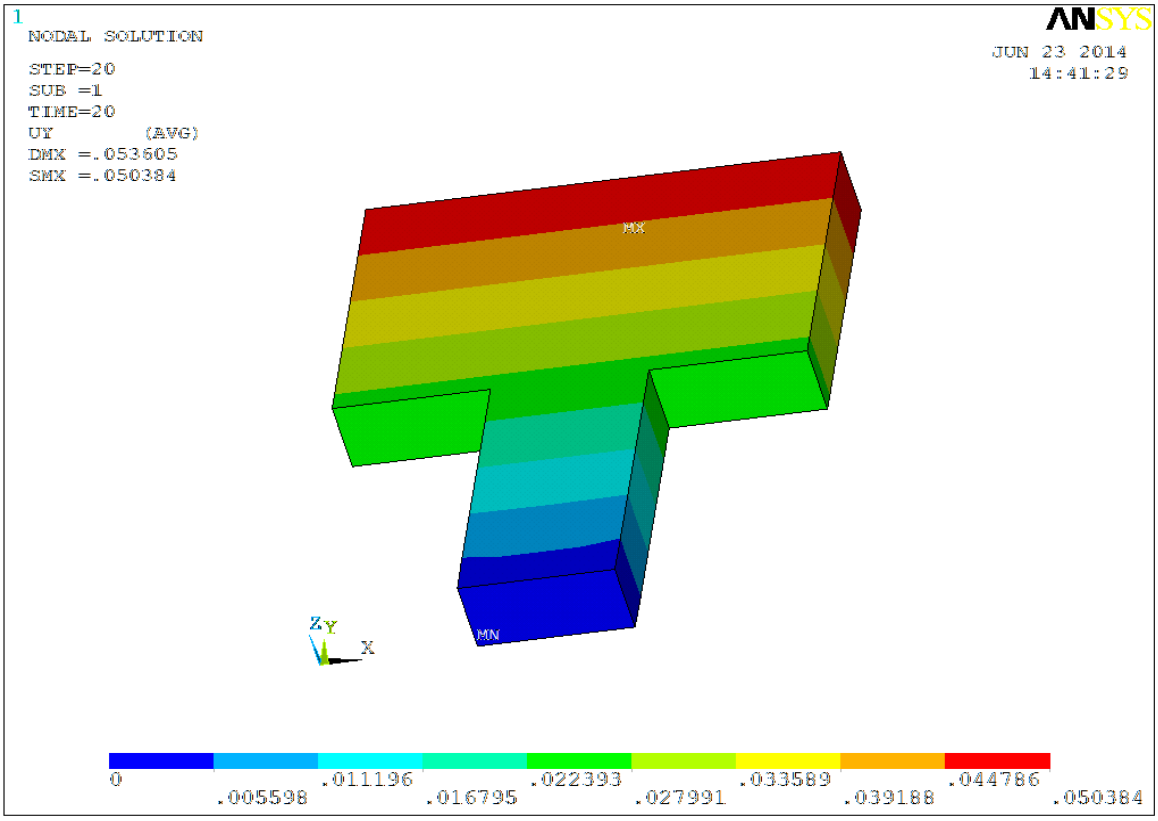

Рис.7. Осевые смещения. Сетка 3.

На рисунке 8 приведена зависимость осевых смещений от степени дискретизации конструкции. Можно сделать вывод, что при сгущении сетки решение сходится.

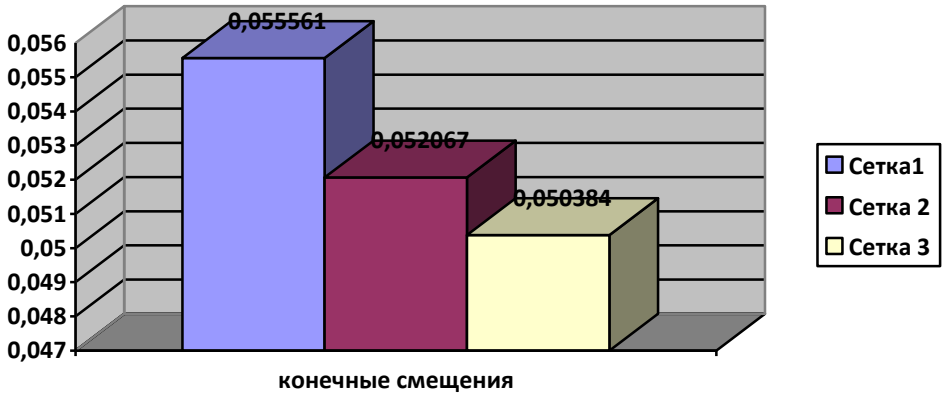

Рис.8. Зависимость осевых смещений от степени дискретизации конструкции.

Дальнейшие расчеты проводятся для сетки 3.

На рисунках 9-10 приведены распределения интенсивности напряжений (по Мизесу), интенсивности пластических деформаций (по Мизесу) для максимальной температуры.

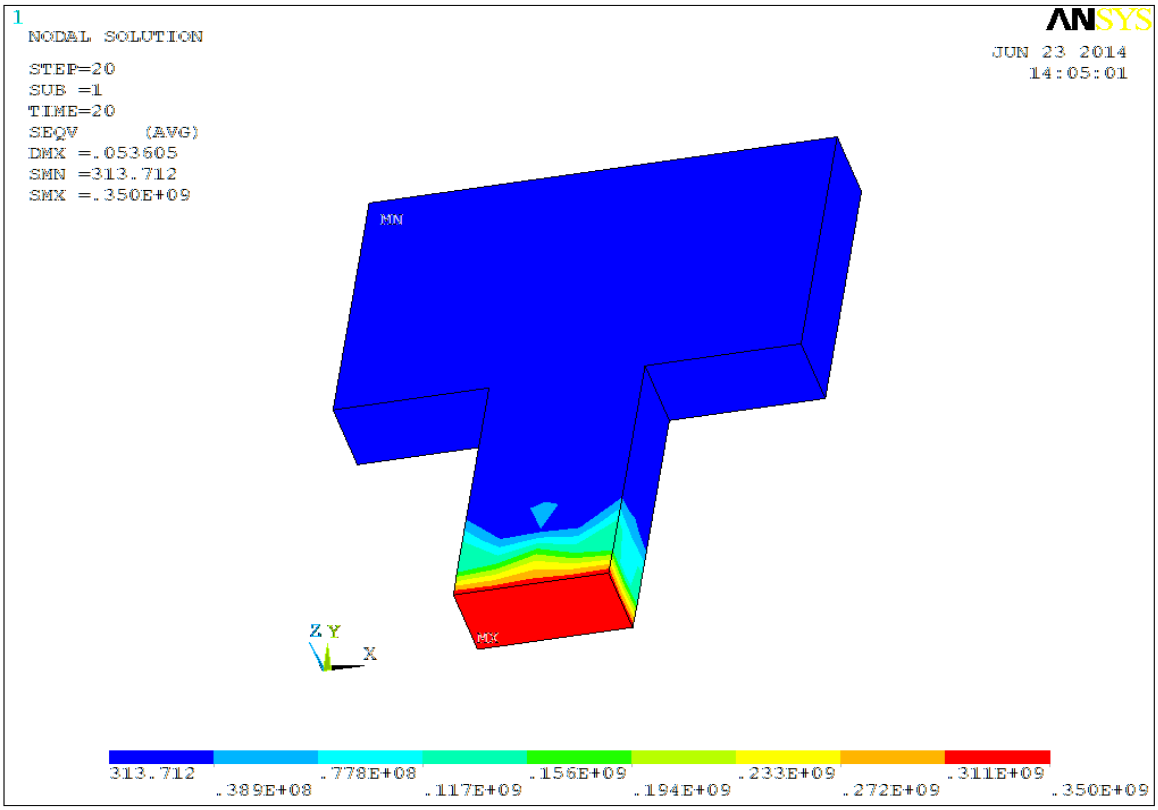

Рис.9. Распределение интенсивности напряжений для максимальной температуры.

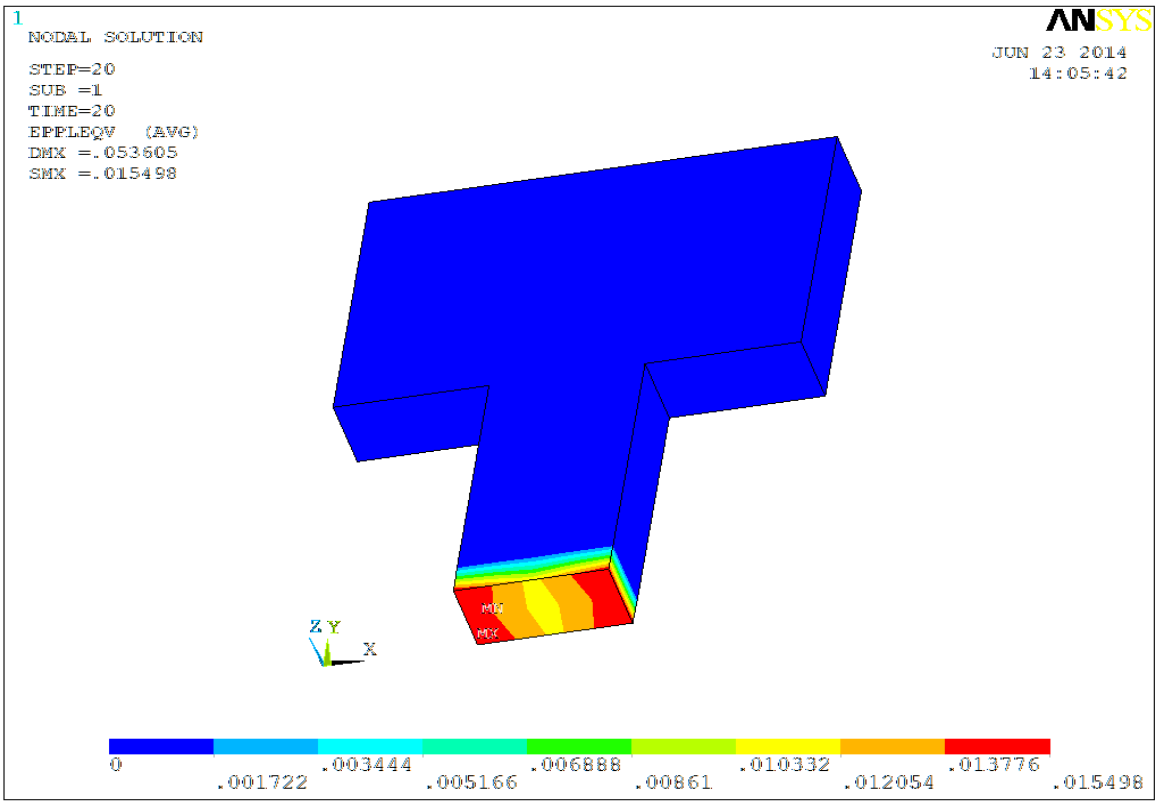

Рис.10. Распределение интенсивности пластических деформаций для максимальной температуры.

Для иллюстрации характера напряженного состояния в зоне заделки на рисунках 11-13 приведены распределения нормальных напряжений $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$.

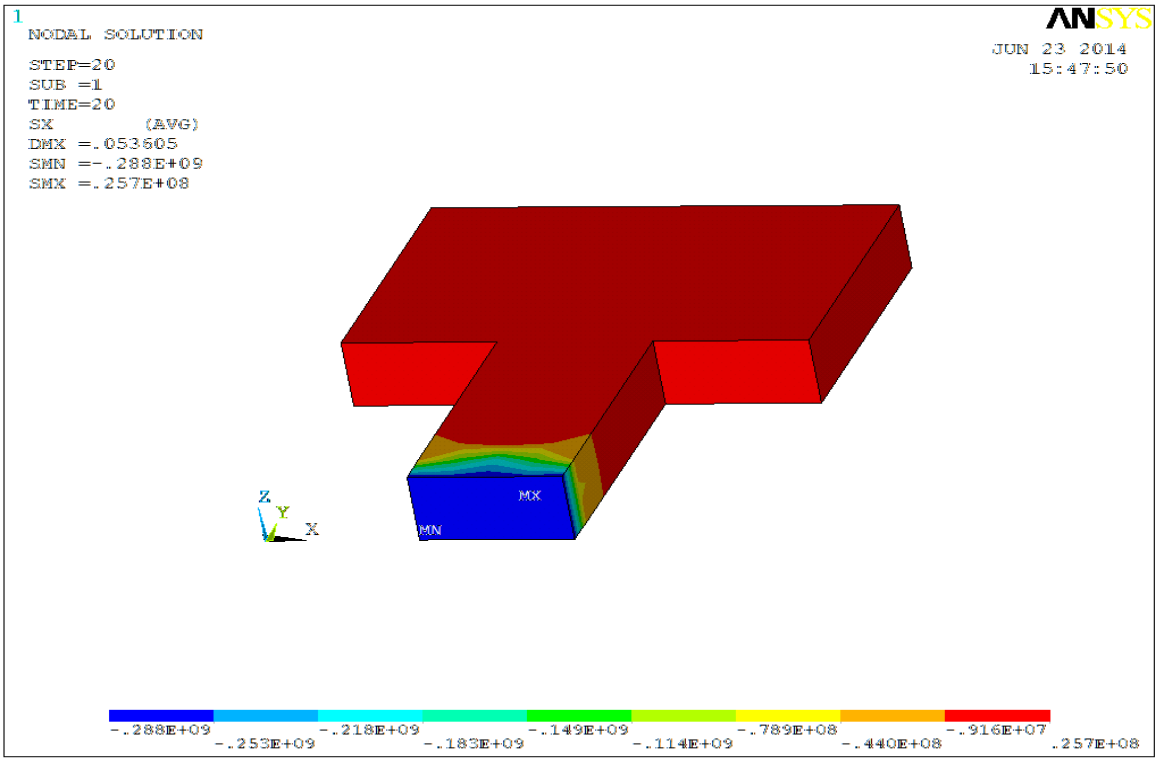

Рис.11. Распределение напряжений σ_{xx} для максимальной температуры.

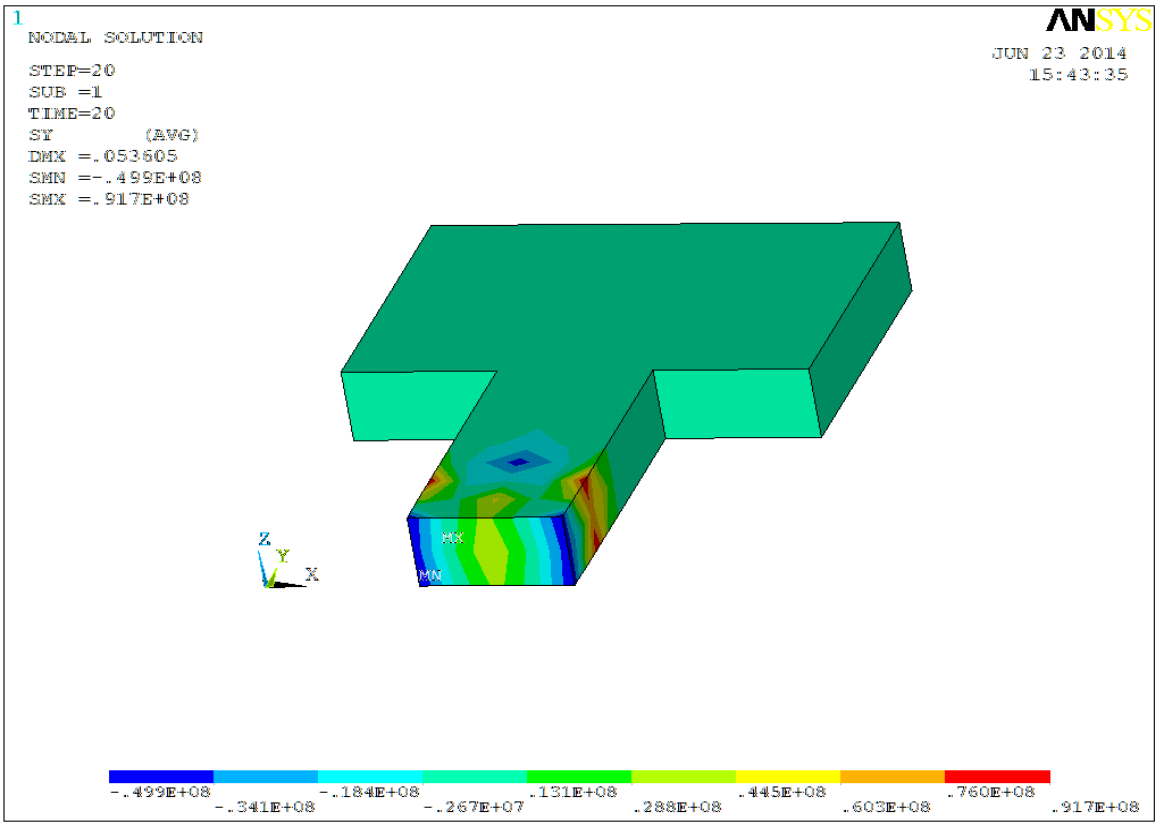

Рис.12. Распределение напряжений σ_{yy} для максимальной температуры.

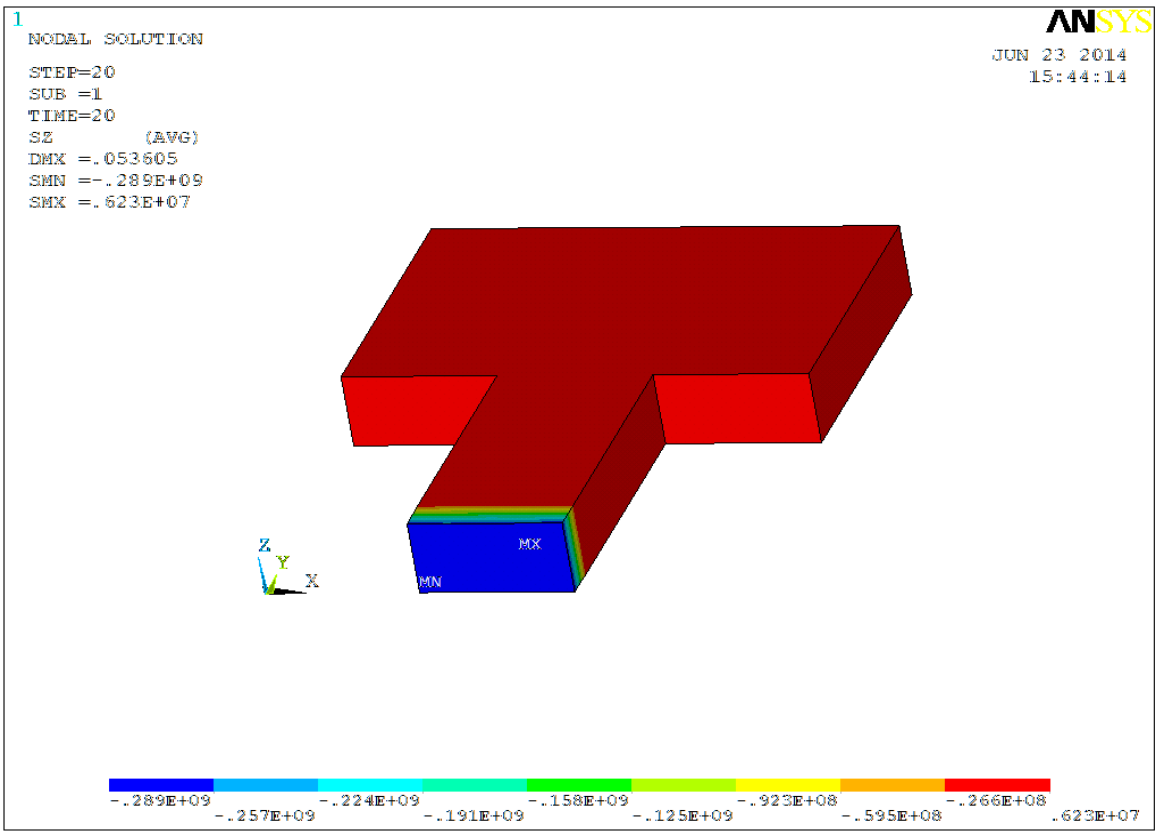

Рис.13. Распределение напряжений σ_{zz} для максимальной температуры.

Видно, что максимальными напряжениями будут σ_{xx} и σ_{zz}, так как закрепление конструкции не дает материалу расшириться (возникают напряжения сжатия).

Далее снимаем температурную нагрузку (температура тела опускается до нуля). На рисунках 14-15 приведены распределения интенсивности напряжений (по Мизесу), интенсивности пластических деформаций (по Мизесу) для нулевой температуры.

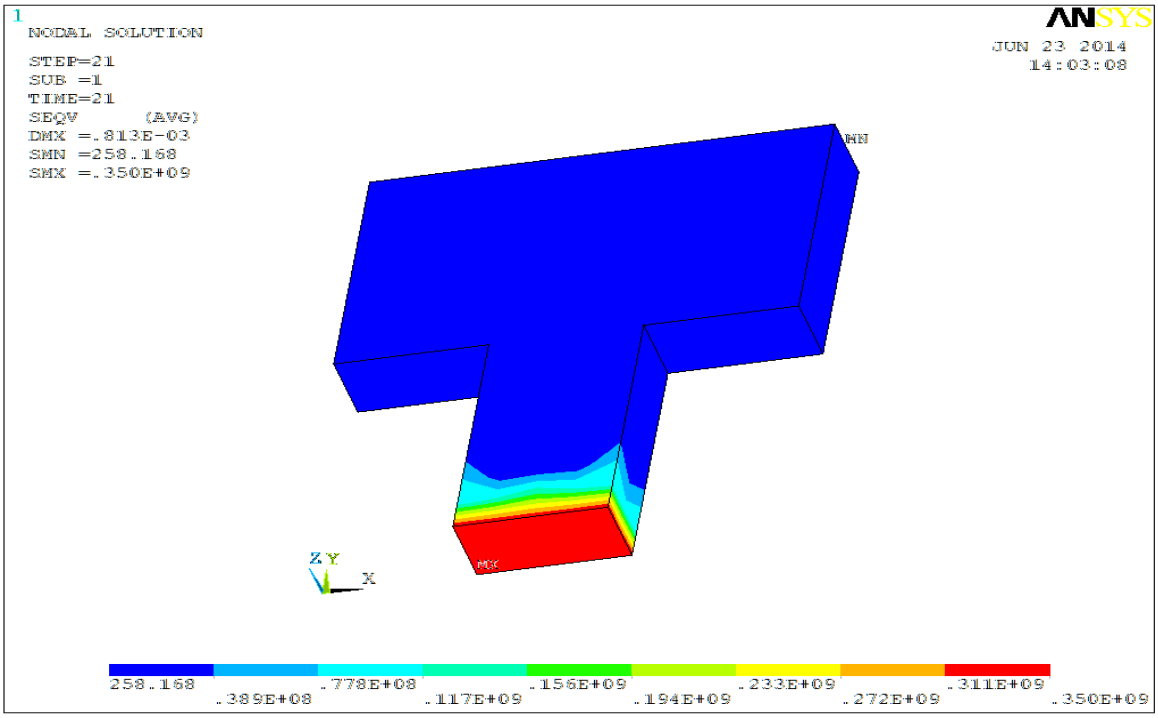

Рис.14. Распределение интенсивности напряжений для нулевой температуры.

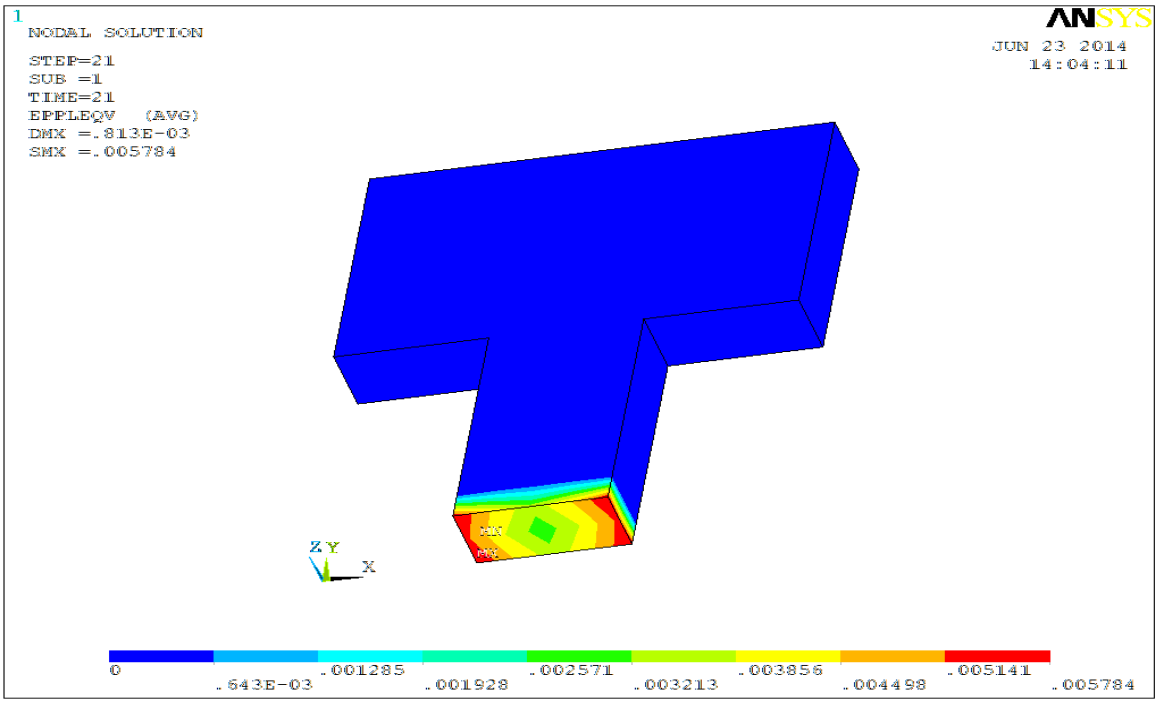

Рис.15. Распределение интенсивности пластических деформаций для нулевой температуры.

Для иллюстрации характера напряженного состояния в зоне заделки после снятия теплового нагружения на рисунках 16-18 приведены распределения нормальных напряжений $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$.

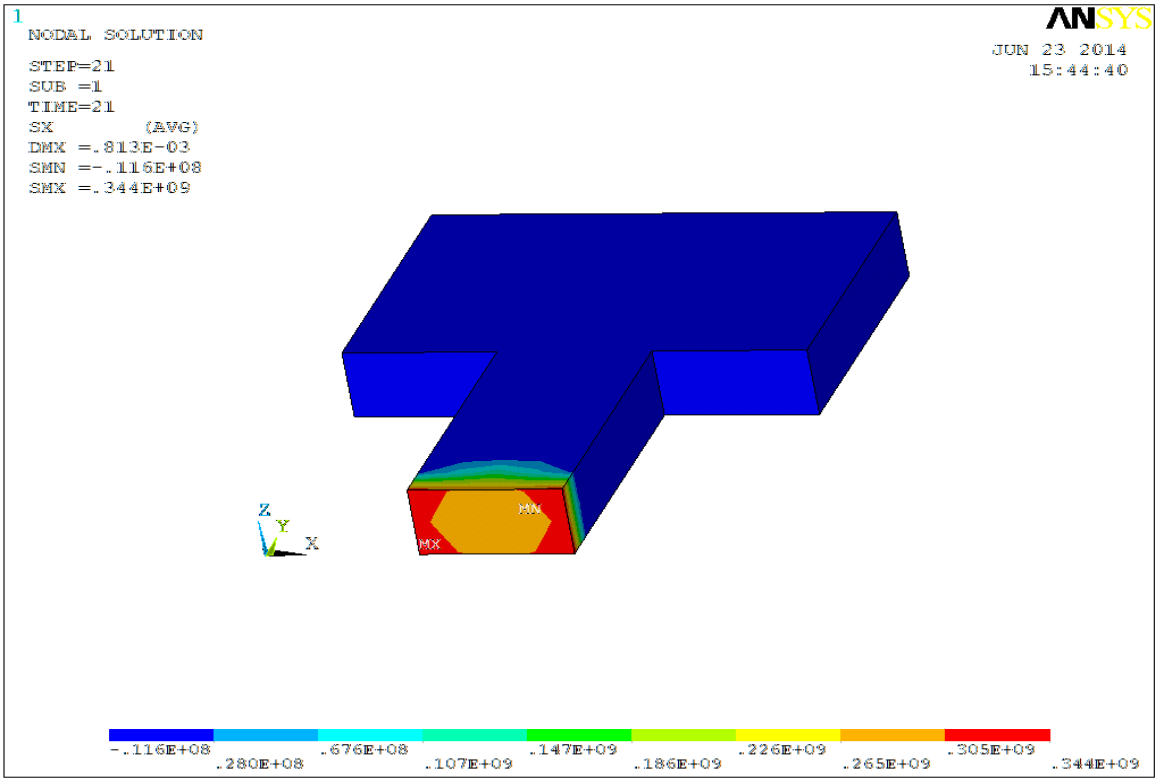

Рис.16. Распределение напряжений σ_{xx} для нулевой температуры.

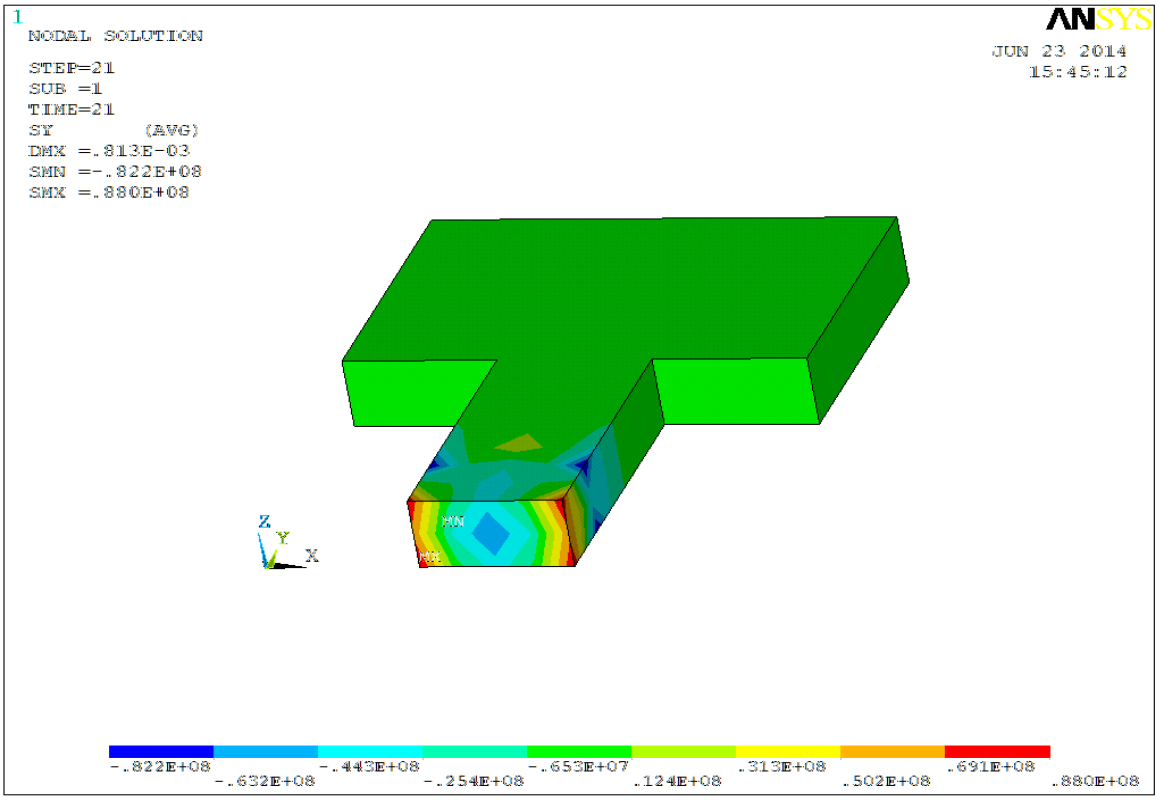

Рис.17. Распределение напряжений σ_{yy} для нулевой температуры.

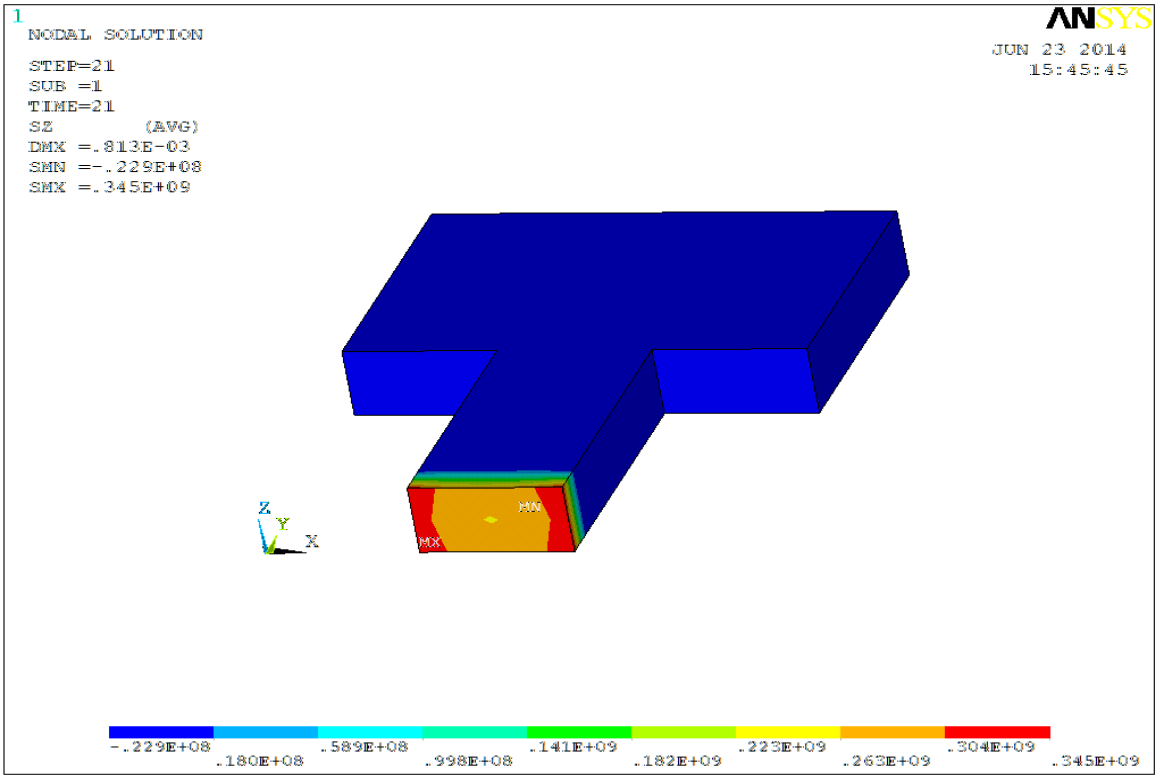

Рис.18. Распределение напряжений σ_{zz} для нулевой температуры.

Видно, что максимальными напряжениями будут σ_{xx} и σ_{zz}, но они бут уже положительными (растягивающими), так как материал конструкции в зоне заделки после снятии тепловой нагрузки пытается сжаться, но появившиеся там остаточные пластические деформации препятствуют этому.

Анализ результатов показывает, что, несмотря на снижение нагрузки до нуля, в расчетной области наблюдаются пластические деформации и остаточные напряжения. Они локализуются около зоны закрепления конструкции.

Заключение.

В работе приведен обзор моделей термоупругопластического деформирования конструкционных материалов. Рассмотрены различные методики решения задачи неизотермического деформирования конструкций с учетом физической нелинейности материала.

Решена модельная задача упругопластического деформирования трехмерной конструкции при воздействии теплового нагружения для полного цикла нагружения и разгрузки, исследована сходимость решения, определены зоны пластических деформаций и остаточных напряжений при полном снятии тепловой нагрузки.

Список литературы

1. Быковцев Г.И., Ивлев Д.Д. Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998,с. 528.
2. Клюшников В.Д. Физико-математические основы прочности и пластичности. Москва: Изд-во МГУ, 1994, с. 189.
3. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Математические модели термомеханики. Москва: Физматлит, 2002, с .168 .
4. Галанин М.П., Гузев М.А., Низкая Т.В. Разработка и реализация вычислительного алгоритма для расчета температурных напряжений, возникающих при нагреве металла, с учетом фазовых переходов. Москва: Препр. Ин-та прикл. матем. им. М.В. Келдыша РАН. , 2005, № 139, с.19 .
5. Кректулева Р.А., Черепанов О.И., Черепанов Р.О. Компьютерные исследования и моделирование. Москва: Изд-во МГУ, 2012, т. 4, № 2, с. 345
6. Леоненко Д.В., Старовойтов Э.И. Термопластическое деформирование круговых трехслойных пластин на упругом основании. Москва: Изв. РАН. МТТ. , 2009, № 5, с. 106-119.
7. Бережной Д.В., Биряльцева Т.Е. Численное решение задачи распространения волн в блочно-слоистых средах.// "Математическое моделирование и краевые задачи": тр. Всерос. науч. конф. (Самара, 29-31 мая, 2007 г.). - Самара, 2007. - Ч. 1. - С. 45-47.
8. Бережной Д.В., Кузнецова И.С. Исследование геометрически нелинейного поведения трехмерных конструкций // Материалы Седьмой молодежной научной школы-конференции "Лобачевские чтения - 2008". Казань: Изд-во Казанского университета, 2008. С.24-25.
9. Голованов А.И., Бережной Д.В. Метод конечных элементов в механике деформируемых твердых тел. Казань: изд-во «ДАС», 2001. с. 300.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Программа поиска

```
!Начало работы, очистка данных
fini
/clear
/units,si

!Вид материала
/PREP7
ET,1,Solid45

!Введение коэффициентов и данных материала
MP,EX,1,2.e11
MP,NUXY,1,0.3
MP,ALPX,1,0.00003
tb,miso,1,1
tbpt,,0.175e-02,3.5e8
tbpt,,0.175e1+0.175e-02,3.5e8+0.000001*3.5e11

!Введение данных
*SET,a,2
*SET,b,4
*SET,c,1

!Введение координат точек
k,,0,0,0,
k,,a,0,0,
k,,2*a,0,0,
k,,3*a,0,0,
k,,0,0,c,
k,,a,0,c,
k,,2*a,0,c,
k,,3*a,0,c,
k,,0,b,0,
k,,a,b,0,
```

```
k,,2*a,b,0,
k,,3*a,b,0,
k,,0,b,c,
k,,a,b,c,
k,,2*a,b,c,
k,,3*a,b,c,
k,,0,2*b,0,
k,,a,2*b,0,
k,,2*a,2*b,0,
k,,3*a,2*b,0,
k,,0,2*b,c,
k,,a,2*b,c,
k,,2*a,2*b,c,
k,,3*a,2*b,c,

!Создание объемных деталей объекта
V,    2,    10,    11,    3,    6,    14,    15,    7
V,    9,    17,    18,    10,    13,    21,    22,    14

V,    10,    18,    19,    11,    14,    22,    23,    15
V,    11,    19,    20,    12,    15,    23,    24,    16

!Разбиение объекта сеткой
MSHAPE,0,3D
MSHKEY,1
ESIZE,0.5,0,
vmesh,1
vmesh,2
vmesh,3
vmesh,4

!Закрепление объекта
/SOLU
FLST,2,1,5,ORDE,1
FITEM,2,5
```

```
DA,P51X,ALL,

nropt,auto
pred,on,,on
nlgeom,on !n !on
autots,on

!Цикл нагржения тепловой нагрузки
*do,i,10,200,10
FLST,2,4,6,ORDE,2
FITEM,2,1
FITEM,2,-4
BFV,P51X,TEMP,i

solve
save
*enddo

!Цикл разгружения тепловой нагрузки
FLST,2,4,6,ORDE,2
FITEM,2,1
FITEM,2,-4
BFV,P51X,TEMP,0

solve
save
fini
/POST1
SET,FIRST
/EFACE,1
AVPRIN,0,0,

PLNSOL,S,EQV,0,1
:ttt
```