ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2004 МАТЕМАТИКА № 1 (500)

УДК 519.711:681.5

А.И. МАЛИКОВ

ЭЛЛИПСОИДАЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ СОСТОЯНИЯ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ МАТРИЧНЫХ СИСТЕМ СРАВНЕНИЯ

Введение

Последние годы характеризуются существенным прогрессом в области дискретных и цифровых систем управления [1], [2]. Популярность этих систем в отраслях промышленности объясняется как развитием микропроцессорной и вычислительной техники, так и преимуществами работы с цифровыми системами.

Рассматриваются дискретные системы автоматического управления, представленные разностными уравнениями с неопределенными нелинейностями из сектора. Начальное состояние системы является неопределенным. Известно только, что оно принадлежит заданному эллипсоиду. Учитываются неопределенные возмущения. Метод матричных систем сравнения (МСС), предложенный в [3] и развитый в [4]–[7] для анализа динамики и оценивания состояния непрерывных нелинейных регулируемых систем, распространяется на указанный класс дискретных систем. Отметим, что систематическое изучение дискретных систем с помощью метода функций Ляпунова было выполнено в [8]. Первая теорема о разностных неравенствах была получена в [9], ее обобщения сделаны в [10]. Метод векторных систем сравнения в анализе динамики дискретных процессов был развит в [11], исследование векторных разностных систем сравнения проведено в [12]. Способы построения вектор-функций Ляпунова с компонентами из модулей линейных форм и векторных систем сравнения для нелинейных дискретных управляемых систем разработаны в [13].

В данной статье дается обоснование метода матричных систем сравнения для дискретных моделей систем управления, доказывается теорема о матричных разностных неравенствах. Изучаются свойства матричных разностных уравнений с правой частью, монотонной относительно конуса неотрицательно определенных симметрических матриц. Предлагаются способы построения матричных разностных систем сравнения, процедуры получения эллипсоидальных оценок множества дискретных процессов. Показано, что положительно определенные решения МСС определяют квадратичные функции Ляпунова, выделяющие инвариантные множества в фазовом пространстве исходной системы. Для линейных неавтономных разностных уравнений установлена связь матричных систем сравнения с эволюционными уравнениями метода эллипсоидов [14].

Способы и алгоритмы построения МСС, эллипсоидальных оценок дискретных процессов нелинейных регулируемых систем реализованы в пакете MATLAB. Результаты иллюстрируются примерами.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 00-01-00293) и Федеральной целевой программы “Интеграция” (проект № И0312).

1. Постановка задачи

Пусть $T \subseteq N$ — конечный или бесконечный интервал множества целых чисел $N = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$, $T_0 \subseteq N$ — множество начальных моментов времени, R^n — n-мерное векторное пространство, $T_{t_0} = \{t \in T : t \geq t_0\}$, $t_0 \in T_0$.

Рассмотрим дискретную модель системы автоматического управления, заданную системой разностных уравнений

$$x(t+1) = f(t, x(t)), \tag{1.1}$$

где $t \geq t_0$, $x(t), x(t+1) \in R^n$ — векторы состояния в момент времени t и $t+1$ соответственно, вектор-функция $f : T \times R^n \to R^n$ удовлетворяет условиям существования, единственности и продолжимости решений при $t \in T_{t_0}$.

Наряду с задачами анализа динамических свойств устойчивости, ограниченности и инвариантности решений системы (1.1) ставится и решается задача построения оценок множества, где находятся процессы в текущий момент времени, если в начальный момент времени $t = t_0$ состояние системы принадлежит эллипсоиду $E(a_0, Q_0)$, т. е.

$$x(t_0) = x_0 \in E(a_0, Q_0) = \{x : (x - a_0)^T Q_0^{-1} (x - a_0) \leq 1\}, \tag{1.2}$$

где заданный n-мерный вектор a_0 — центр эллипсоида, Q_0 — заданная симметрическая положительно определенная $n \times n$-матрица, определяющая размеры эллипсоида.

Данная задача рассматривалась в [14], где для ее решения был разработан метод эллипсоидов. Аналогичная задача была решена в [5] для непрерывных регулируемых систем с нелинейностями и неопределенностями. В [6] изучены свойства матричных дифференциальных уравнений с условием квазимонотонности. В [7] метод матричных систем сравнения был развит применительно к задачам анализа динамики и оценивания состояния непрерывных систем управления со структурными изменениями.

В данной статье метод матричных систем сравнения развивается и применяется для анализа динамики и оценивания состояния дискретных систем управления с неопределенностями. При этом изучаются некоторые свойства матричных разностных уравнений с монотонной правой частью.

2. Матричные системы разностных уравнений с условием монотонности и их свойства

Обозначим линейное пространство симметрических $n \times n$-матриц Q через G. В G определим функцию $\psi(Q) = \psi^T Q \psi$, где $\psi \in R^n$, $Q \in G$, которая будет являться квадратичной формой. Для каждого $\psi \in R^n$ определена норма $\|\psi\| = \sqrt{\psi^T \psi}$. Положим $\Phi = \{\psi \in R^n : \|\psi\| = 1\}$. В пространстве G выделим конус $G_+ = \{Q \in G : \psi^T Q \psi \geq 0,\, \psi \in \Phi\}$ неотрицательно определенных матриц.

Как известно [3], конус G_+ является телесным, воспроизводящим и нормальным. Обозначим конус положительно определенных матриц через G^+. Отношение частичного порядка в G вводится с помощью конуса G_+ обычным образом. В G введем норму $\|Q\| = \sup\limits_{\psi \in \Psi} |\psi^T Q \psi|$.

Будем изучать решения $Y(t)$ задачи

$$Y(t+1) = F(t, Y(t)), \quad Y(t_0) = Y_0, \quad Y_0 \in \mathbf{B}_0 \subseteq \mathbf{B}, \tag{2.1}$$

на промежутках определения $T = [t_0, t_0 + \tau)$: $(\forall t \in T)\ Y(t) \in \mathbf{B} \subseteq G$. Здесь матричная функция $F : \mathbf{A} \to G$ предполагается однозначной и определенной в области $\mathbf{A} = T \times \mathbf{B}$.

Относительно области определения $\mathbf{B}$ далее предполагается следующее (вполне естественное, если учесть монотонность $F(t, Y)$ по Y) условие:

$$(\forall Y_1, Y_2 \in \mathbf{B} : Y_1 \leq Y_2)\ \ \{Y \in G : Y_1 \leq Y \leq Y_2\} \subseteq \mathbf{B}.$$

Дискретным матричным процессом с начальными данными $Y(t_0) = Y_0$ называется матричная функция $Y(\cdot) : t \to Y(t)$, $\operatorname{dom} Y(\cdot) \to G$, удовлетворяющая условиям

$$\operatorname{dom} Y(\cdot) = T(Y) = \overline{(0, \tau(Y))} \vee N, \quad 0 \le \tau(Y) < +\infty,$$
$$(\forall t \in T(Y)) Y(t) \in \mathbf{B}, \quad (Y(\tau(Y)+1) \in \mathbf{B}), \quad Y(t+1) := F(t, Y(t)).$$

Множество $\mathbf{B} \in G$ называют *ограниченным по конусу* G_+, если найдется такая матрица $Y \in G_+$, что $Z \le Y$ при всех $Z \in \mathbf{B}$.

Рассмотрим *монотонно неубывающую последовательность* $\{P_m\}$ *матриц* $P_m \in G$, которую будем обозначать $P_m \uparrow$ и для которой $P_{m+1} \ge P_m$ $(m = 1, 2, \dots)$. Аналогично можно определить монотонно невозрастающую последовательность $P_m \downarrow$.

Лемма 1 (о поточечной сходимости монотонных ограниченных последовательностей матриц [15]). *Если все матрицы* P_m *симметрические и таковы, что найдется* $Q \in G : P_m \ge Q$ $(m = 1, 2, \dots)$ *и* $P_m \downarrow$, *то существует матрица* $P = \lim\limits_{m\to\infty} P_m$.

Здесь предел в правой части означает [15], что $y^T P x = \lim\limits_{m\to\infty} y^T P_m x$ для любых $x, y \in R^n$.

Таким образом, конус G_+ является правильным, поскольку каждая монотонная и ограниченная по конусу G_+ последовательность матриц имеет предел. Если последовательность Z_m сходится к элементу $Z \in G$ и $Z_m \in G_+$ при $m = 1, 2, \dots$, то и $Z \in G_+$.

Определение 1. Будем говорить, что функция F *монотонно неубывающая относительно конуса* G_+, если для любых $Z, Y \in \mathbf{B}$ из условия $Y - Z \in G_+$ следует $F(t, Y) - F(t, Z) \in G_+$ (или если для любых $Z, Y \in \mathbf{B}$ и всех $\psi \in \Phi$ из условия $\psi^T (Y - Z)\psi \ge 0$ следует $\psi^T (F(t, Y) - F(t, Z))\psi \ge 0$ для всех $t \in T$).

Обозначим класс матричных функций на T, монотонно неубывающих относительно конуса G_+, через $W(G_+)$.

Теорема 1. *При любом* $Y_0 \in \mathbf{B}_0$ *для системы* (2.1) *существует единственный дискретный процесс* $Y(\cdot)$ *на некотором* $T(Y)$. *Если функция* $U(\cdot) : t \to U(t)$, $T(U) \to G$, *удовлетворяет условиям*

$$(\forall t \in T(U))\ U(t) \in \mathbf{B}\ (U(\tau(U)+1) \in \mathbf{B}, U(0) \in \mathbf{B}_0),\ U(t+1) \le F(t, U(t)),\ U(0) \le Y(0), \quad (2.2)$$

то $U(t) \le Y(t)$ *при всех* $t \in T(U) \cap T(Y)$.

Доказательство. Существование и единственность дискретного процесса $Y(\cdot)$ получается по индукции с учетом однозначности функций $F(t, \cdot)$ на $\mathbf{B}$ и $Y(0) \in \mathbf{B}_0$. Действительно, если $F(0, Y(0)) \notin \mathbf{B}$, то $Y(1) \notin \mathbf{B}$, $\tau(Y) = 0$, $1 \notin T(Y)$, $Y(\cdot) = \{(0, Y(0))\}$ — единственная точка. Если же $F(0, Y(0)) \in \mathbf{B}$, то $Y(1) \in \mathbf{B}$, $\tau(Y) = 0$, $1 \in T(Y)$ и однозначно определено $Y(2) = F(1, Y(1)) \in G$. Пусть $0 \in T(Y)$, $1 \in T(Y), \dots, t \in T(Y)$; по (2.1) последовательно из $Y_0 \in \mathbf{B}_0$ определены $Y(1) \in \mathbf{B}$, $Y(2) \in \mathbf{B}, \dots, Y(t) \in \mathbf{B}$. Тогда однозначно определяется $Y(t+1) = F(t, Y(t)) \in G$.

Пусть теперь $U(0) \le Y(0)$, $U(0) \in \mathbf{B}_0$, $Y(0) \in \mathbf{B}_0$. В силу (2.2) и неубывания по Y относительно G_+ $F(t, Y)$ имеем $U(1) \le F(0, U(0)) \le F(0, Y(0)) = Y(1)$. Отметим, что здесь и далее, если не оговорено особо, неравенства между матрицами понимаются относительно конуса G_+.

Пусть $0 \in T(U) \cap T(Y)$, $1 \in T(U) \cap T(Y), \dots, t \in T(U) \cap T(Y)$; однозначно определены $U(0) \in \mathbf{B}_0$, $Y(0) \in \mathbf{B}_0$, $U(1) \in \mathbf{B}$, $Y(1) \in \mathbf{B}, \dots, U(t) \in \mathbf{B}$, $Y(t) \in \mathbf{B}$, причем $U(0) \le Y(0)$, $U(1) \le Y(1), \dots, U(t) \le Y(t)$. Тогда $U(t+1) \le F(t, U(t)) \le F(t, Y(t)) \le Y(t+1)$ в силу (2.2) и неубывания $F(t, Y)$ по Y. Это завершает доказательство теоремы по индукции. $\square$

Рассмотрим теперь вопрос о существовании положительных относительно конуса G_+ решений уравнения (2.1).

Теорема 2. *Пусть выполняются условия теоремы* 1. *Если, кроме того,* $F(t,0) \in G_+$, *то каждому начальному условию* $Y_0 \in G_+ \cap \mathbf{B}$ *соответствует решение уравнения* (2.1), *принадлежащее* $\mathbf{B}$ *на некотором не равном нулю интервале значений* $T(Y)$ *и* $Y(t,t_0,Y_0) \in G_+$ *при всех* $t \in T$.

Доказательство. То, что решение существует и принадлежит $\mathbf{B}$, следует из теоремы 1. Остается показать, что оно будет принадлежать G_+, если $Y_0 \in G_+$.

Из условия $F(t,0) \in G_+$ и монотонного неубывания по Y функции $F(t,Y)$ относительно конуса G_+ получаем $0 \le F(t_0,0) \le F(t_0,Y_0) = Y(t_0+1)$.

Предположим по индукции, что $Y(t_0+1) \ge 0, \dots, Y(t_0+k) \ge 0$. Тогда снова из условия $F(t,0) \in G_+$ и неубывания по Y функции $F(t,Y)$ относительно G_+ получаем $0 \le F(t_0+k,0) \le F(t_0+k, Y(t_0+k)) = Y(t_0+k+1)$. $\square$

Рассмотрим свойства матричных систем разностных уравнений с условием монотонности правой части.

Будем говорить, что уравнение (2.1) на T обладает *свойством монотонности решений по начальным данным*, если из $Y_0' \le Y_0''$ следует $Y(t,t_0,Y_0') \le Y(t,t_0,Y_0'')$.

Правые части таких систем будем обозначать $F(t,Y) \in \mathbf{M}(G_+)$.

Из теоремы 2 вытекает

Следствие 1. Пусть правая часть $F(t,Y)$ уравнения (2.1) является однозначной и монотонно неубывающей по Y относительно G_+. Тогда $F(t,Y) \in \mathbf{M}(G_+)$.

Доказательство. Возьмем $Y_0' \le Y_0''$ и обозначим $Z(t) = Y(t,t_0,Y_0'') - Y(t,t_0,Y_0')$. Тогда для $Z(t)$ справедливо уравнение $Z(t+1) = F'(t,Z(t)) = F(t, Z(t) + Y(t,t_0,Y_0')) - F(t, Y(t,t_0,Y_0'))$, правая часть которого при $Z(t) = 0$ является неотрицательно определенной матричной функцией. Поскольку $Z(t_0) \in G_+$, то по теореме 2 имеем $Z(t) \in G_+$ при всех $t \in T$.

С помощью теоремы 1 о матричных конечно-разностных неравенствах можно установить инвариантность некоторых множеств и получить оценки решений системы (2.1) с $F \in W(G_+)$ аналогично тому, как это было сделано в [12] для векторных разностных уравнений и в [6] для матричных дифференциальных уравнений.

Обозначим через $G_- = \{Y \in G : -Y \in G_+\}$ конус неположительно определенных матриц из G, через $G_+ + Y_0$ — конус с вершиной в точке $Y_0 \in G_+$; для произвольного множества $\mathbf{N} \subset G$ [12], [16] введем следующие обозначения:

$\mathbf{N}_+ = \mathbf{N} \cap G_+$, $\mathbf{N}_- = \mathbf{N} \cap G_-$, $\mathbf{N}^+ = \mathbf{N} \cap G^+$;

$S_+(\mathbf{N}) = \bigcup\limits_{Y \in \mathbf{N}} (G_+ + Y)$ — положительный шлейф множества $\mathbf{N}$,

$S_-(\mathbf{N}) = \bigcup\limits_{Y \in \mathbf{N}} (G_- + Y)$ — отрицательный шлейф множества $\mathbf{N}$.

Пусть $\mathbf{H} = \{Y \in \mathbf{B}$: для всех $t \in T \quad F(t,Y) \le Y\}$;

$\mathbf{G} = \{Y \in \mathbf{B}$: для всех $t \in T \quad F(t,Y) \ge Y\}$;

$\mathbf{Q} = \{Y \in \mathbf{H}: \forall t \in T \quad F(t,Y) < Y\}$;

$\Omega = \mathbf{H} \cap \mathbf{G}$ — множество точек покоя системы (2.1).

Множество $\mathbf{N} \subset G$ назовем *положительно инвариантным*, если для решения $Y(t)$: $Y(t_0) = Y_0 \in \mathbf{N} \Rightarrow (\forall t \in T(Y))\ Y(t) \in \mathbf{N}$.

Лемма 2. *Для любых* $t \in T$, $P \in \mathbf{H}$, $U \in \mathbf{G}$ *множества* $G_- + P$, $G_+ + U$ *положительно инвариантны для решений уравнения* (2.1).

Для автономного разностного уравнения

$$Y(t+1) = F(Y(t)) \tag{2.3}$$

так же, как в [12], удается установить ряд дополнительных сведений о поведении решений. Здесь $F : \mathbf{B} \to G$, где $\mathbf{B}$ — область в G. В определениях свойств функции F (однозначности, монотонности) и множеств $\mathbf{H}$, $\mathbf{G}$, $\mathbf{Q}$, Ω считается, если не оговорено противное, $t_0 = 0$ и решение с $Y(0) = Y_0$ записывается как $Y(t, Y_0)$.

Лемма 3. *Для автономного уравнения* (2.3) *с однозначной функцией* $F \in W(G_+)$ *множества* $\mathbf{H}$ *и* $\mathbf{G}$ *положительно инвариантны.*

Лемма 3 распространяет результаты Козлова Р.И. [12] об инвариантности указанных множеств на случай матричных систем разностных уравнений с условием монотонности относительно G_+. Доказательство является типовым [12], [17]. Особенность состоит только в том, что основой для доказательства служит полученная здесь теорема 1.

Очевидно

Следствие 2. Пусть $F(t, Y)$ — однозначная и монотонно неубывающая относительно G_+ матричная функция и $Y \in \Omega$ (Y — точка покоя системы (2.1)). Тогда конусы $G_+ + Y$, $G_- + Y$ положительно инвариантны для решений системы (2.1).

Согласно следствиям 1, 2 оценка решений системы (2.1), начинающихся из множества $P_0 = \{Y \in G : Y_1 \le Y \le Y_2\}$ ($Y_1, Y_2 \in G$ заданы), имеет вид

$$(\forall t \in T,\ Y_0 \in P_0)\ \ Y(t, t_0, Y_1) \le Y(t, t_0, Y_0) \le Y(t, t_0, Y_2),$$

где $Y(t, t_0, Y_1)$, $Y(t, t_0, Y_2)$ — частные решения системы (2.1) с $Y(t_0) = Y_1$ и $Y(t_0) = Y_2$ соответственно.

Оценка множества достижимости в заданный момент времени t для решений из P_0 определяется множеством

$$\{Y \in G : Y(t, t_0, Y_1) \le Y \le Y(t, t_0, Y_2)\}.$$

Далее для автономного уравнения (2.3) рассматриваются оценки области притяжения. Под *областью притяжения* понимается множество $\Pi = \{Y_0 \in G : \lim\limits_{t \to \infty} Y(t, t_0, Y_0) = 0\}$.

Теорема 3. *Пусть множество* $G_+ \cap \mathbf{H}$ ($G_- \cap \mathbf{G}$) *содержит точку* 0 *и не содержит других особых точек уравнения* (2.3), *где* $F \in W(G_+)$ *и удовлетворяет условиям теоремы* 1. *Тогда* $G_+ \cap \mathbf{H}$ ($G_- \cap \mathbf{G}$) *лежит в области притяжения* Π *системы* (2.3).

Доказательство проводится так же, как для утверждения 3 из [16], но с использованием приведенных выше лемм 1, 2 и следствия 2.

Следующий результат может быть положен в основу численных алгоритмов построения оценок области притяжения уравнения (2.3) с однозначной функцией $F \in W(G_+)$ по его частным решениям.

Следствие 3. Пусть выполнены условия теоремы 3. Тогда, для того чтобы точка $Y_0 \in G_+$ ($Z_0 \in G_-$) принадлежала Π системы (2.3), достаточно, чтобы при некотором τ было $Y(\tau, Y_0) \in G_+ \cap \mathbf{H}$ ($Y(\tau, Z_0) \in G_- \cap \mathbf{G}$). Точка $Y_0 \in G_+$ ($Z_0 \in G_-$) не лежит в Π, если $Y(\tau', Y_0) \in G_+ \cap \mathbf{G}$ ($Y(\tau', Z_0) \in G_- \cap \mathbf{H}$) при некотором τ'.

Далее будем считать $T = N_+$, при каждом $t_0 \in T$ начальные значения $Y_0 \in V(t_0)$, где V — некоторое наперед заданное множество в $\mathbf{B}$ (обычно это множество значений вектор-функции Ляпунова [17], а в нашем случае — множество значений матричной функции сравнения), $Y(t)$ обозначает решение уравнения (2.1) или (2.3) с $Y(t_0) = Y_0$, $T_{t_0} = [t_0, t_0 + 1, \ldots, +\infty)$.

Аналогично векторному случаю [12] рассматриваются свойства сравнения для матричной системы (2.1) с $F \in W(G_+)$.

1°. Полуограниченность решений сверху:

$$\begin{gathered}(\exists \Delta_0 \in G^+)\ (\forall \Delta \in G^+ : \Delta \le \Delta_0)\ (\exists E \in G^+)\ (\forall t_0 \in T)\ (\forall Y_0 \in V(t_0) : Y_0 \le \Delta) \\ (T(Y) = T_{t_0}) \& (\forall t \in T(Y))\ \Rightarrow\ (Y(t) \le E).\end{gathered}$$

2°. Полуинвариантность сверху:

$$(\exists \Delta \in G^+)\ (\forall t_0 \in T)\ (\forall Y_0 \in V(t_0) : Y_0 \le \Delta)\ (T(Y) = T_{t_0}) \& (\forall t \in T(Y))\ \Rightarrow\ (Y(t) \le E_0),$$

где $E_0 \in G_+$ наперед задано.

3°. Полуустойчивость сверху:

$$(\forall E \in G_+)\ (\exists \Delta \in G^+)\ (\forall t_0 \in T)\ (\forall Y_0 \in V(t_0) : Y_0 \leq \Delta)\ (T(Y) = T_{t_0}) \& (\forall t \in T(Y))\ \Rightarrow\ (Y(t) \leq E).$$

Для уравнения (2.3) так же, как в случае дифференциальных матричных систем сравнения [6], имеет место теорема о свойствах предельной полуограниченности, полуинвариантности и полупритяжения.

Теорема 4 (аналог теоремы 1.3 из [6]). *Пусть* $F \in W(G_+)$ *и выполнены условия единственности и продолжимости решений системы* (2.1).

А. *Если* $\mathbf{H}^+ \neq \emptyset$, *то имеет место полуограниченность сверху. В качестве* Δ_0 *можно принять какую-либо матрицу из* $\mathbf{H}^+$, E *— произвольная матрица из* $\mathbf{H} \cap S_+(\Delta)$.

Б. *Если* $\mathbf{H}^+ \cap S_-(E_0) \neq \emptyset$, *то имеет место полуинвариантность сверху. В качестве* Δ *можно принять какую-либо матрицу из* $\mathbf{H}^+ \cap S_-(E_0)$.

В. *Если* $\mathbf{H}^+ \neq \emptyset$ *и* $0 \in \mathbf{H}^+$, *то имеет место полуустойчивость сверху. При этом* Δ *— любая матрица из* $\mathbf{H}^+$ *такая, что* $\Delta < E$.

Доказательство представляет прямое применение леммы 1 о положительной инвариантности $G_- + P$ при $P \in \mathbf{H}$, которая в силу единственности будет иметь место для всех решений.

3. Матричные конечно-разностные системы сравнения

Матричные системы разностных уравнений с условием монотонности относительно конуса G_+ можно использовать в качестве систем сравнения для получения достаточных условий устойчивости, ограниченности, инвариантности и других динамических свойств, а также для нахождения различных оценок решений исходной дискретной системы.

Пусть задана система (1.1), где $f : \Gamma \subseteq T \times R^n \to R^n$ — непрерывная и однозначная функция. С использованием теоремы 1 о матричных конечно-разностных неравенствах получаем стандартную в методе сравнения [10] лемму сравнения.

Лемма 4. *Пусть для системы* (1.1) *на интервале* T *существует непрерывная матричная функция* $V(t,x)$ *такая, что* $V : \Gamma \to G_+$, *а для* $V(t+1, x(t+1))$, *вычисленной в силу системы* (1.1), *справедливо при всех* $t \in T$ *конечно-разностное неравенство*

$$V(t+1, x(t+1)) \leq F(t, V(t, x(t))), \tag{3.1}$$

где $F(t,V)$ *— непрерывная однозначная матричная функция, монотонно неубывающая относительно* G_+. *Тогда из условия* $V(t_0, x_0) \leq Y_0$ *следует*

$$V(t, x(t, t_0, x_0)) \leq Y(t, t_0, Y_0),$$

где $Y(t, t_0, Y_0)$ *— решение системы* (2.1) *с функцией* F *из* (3.1).

При этом $V(t,x)$ будет являться *матричной функцией сравнения* для системы (1.1) (при некоторых дополнительных условиях, зависящих от изучаемого свойства, — матричной функцией сравнения относительно рассматриваемого динамического свойства), а система (2.1), правая часть которой берется из (3.1) и является монотонно неубывающей относительно конуса G_+, называется *матричной системой сравнения* для уравнения (1.1).

Итак, согласно лемме 4 в качестве матричной системы сравнения можно выбирать систему (2.1) с правой частью F из (3.1), для которой должно выполняться условие монотонного неубывания относительно G_+.

4. Связь матричных разностных систем сравнения с квадратичными функциями Ляпунова

Пусть для системы (1.1) с матричной функцией

$$V(t,x)=[x-a(t)][x-a(t)]^T \tag{4.1}$$

получена конечно-разностная система сравнения

$$Q(t+1)=F(t,Q(t)),\quad Q\in G,\ \ t\geq t_0, \tag{4.2}$$

где F — непрерывная однозначная и монотонно неубывающая относительно конуса G_+ матричная функция, а вектор-функция $a(t)=a(t,t_0,a_0)$ — частное решение с $a(t_0)=a_0$ (a_0 — вектор из (1.2)) разностного уравнения

$$a(t+1)=f^*(t,a), \tag{4.3}$$

где функция $f^*:T\times R^n\to R^n$ либо совпадает с функцией f из уравнения (1.1), либо является некоторым ее приближением.

Пусть $Q(t,t_0,Q_0)$ — положительно определенное решение системы сравнения (4.2) с начальным условием $Q(t_0)=Q_0$, где Q_0 — положительно определенная матрица из (1.2). Определим квадратичную форму

$$v(t,x)=[x-a(t)]^TQ^{-1}(t,t_0,Q_0)[x-a(t)]. \tag{4.4}$$

Лемма 5. *Множество $\{x:v(t_0,x)\leq 1\}$ положительно инвариантно для решений системы* (1.1).

Доказательство. Возьмем любое $x_0\in\{x:v(t_0,x)\leq 1\}$. Это означает, что $x_0\in E(a_0,Q_0)$, поэтому при $t=t_0$ будет выполняться неравенство [6]

$$V(t_0,x_0)=[x_0-a_0][x_0-a_0]^T\leq Q_0.$$

Так как (4.2) является матричной системой сравнения для (2.1), то в силу леммы 4 имеем матричное неравенство (относительно конуса G_+)

$$V(t,x(t))\leq Q(t)\ \ \text{для всех } t\in T, \tag{4.5}$$

где $V(t,x(t,t_0,x_0))$ — матричная функция (4.1), определенная на решениях $x(t)=x(t,t_0,x_0)$ системы (1.1), $Q(t)=Q(t,t_0,Q_0)$ — решение системы сравнения (4.2) с $Q(t_0)=Q_0$. Это доказывает инвариантность множества $P(t)=\{x:V(t,x)\leq Q(t)\}$.

С учетом (4.1) неравенство (4.5) перепишется в виде

$$Q(t)-[x(t)-a(t)][x(t)-a(t)]^T\geq 0.$$

Такой неотрицательно определенной матрице соответствует [6] квадратичная форма (при условии $Q(t)>0$)

$$[x(t)-a(t)]^TQ^{-1}(t)\{Q(t)-[x(t)-a(t)][x(t)-a(t)]^T\}Q^{-1}(t)[x(t)-a(t)]\geq 0$$

или

$$[x(t)-a(t)]^TQ^{-1}(t)[x(t)-a(t)]\geq\{[x(t)-a(t)]^TQ^{-1}(t)[x(t)-a(t)]\}^2.$$

Отсюда следует $[x(t)-a(t)]^TQ^{-1}(t)[x(t)-a(t)]\leq 1$ или $v(t,x(t))\leq 1$ для всех $t\in T_1$. □

Согласно данной лемме решения уравнения (1.1), начинающиеся из заданного эллипсоида (1.2), в дальнейшем всегда будут находиться в эллипсоиде

$$E[a(t),Q(t)]=\{x:(x(t)-a(t))^TQ^{-1}(t)(x(t)-a(t))\leq 1\}, \tag{4.6}$$

размеры которого определяются частным решением матричной системы сравнения (4.2). Оно же определяет квадратичную функцию Ляпунова (4.4), которая выделяет в фазовом пространстве системы (1.1) инвариантное множество в виде эллипсоида $E[a(t),Q(t)]=\{x:v(t,x)\leq 1\}$.

Таким образом, матричная система сравнения (4.2) вместе с уравнением (4.3) описывают эволюцию эллипсоидов (4.6), являющихся инвариантными множествами для решений исходной системы (1.1). Кроме того, эти множества можно рассматривать как верхние оценки множеств достижимости исходной нелинейной системы (1.1) при $x_0 \in E(a_0, Q_0)$.

5. Оценивание состояния дискретных систем управления с помощью матричных систем сравнения

5.1. Оценивание состояния линейной дискретной системы

Рассматривается линейная дискретная модель динамической системы

$$x_{k+1} = A_k x_k + b_k, \tag{5.1}$$

где $x_k, x_{k+1} \in R^n$ — векторы состояния дискретной системы в моменты времени $t = k$ и $t = k+1$ соответственно, A_k — $n \times n$-матрица системы, b_k — n-вектор, $k = k_0, k_0 + 1, \ldots$ При $k = k_0$ $x(k_0) = x_0 \in E(a_0, Q_0)$, где Q_0 — положительно определенная $n \times n$-матрица, a_0 — заданный n-вектор.

Возьмем квадратичную форму

$$v(k, x) = [x - a_k]^T Q^{-1}(k)[x - a_k]$$

и вычислим для нее первую разность в силу системы (5.1)

$$\begin{aligned} v(k+1, x(k+1)) - v(k, x(k)) &= (x_{k+1} - a_{k+1})^T Q^{-1}(k+1)(x_{k+1} - a_{k+1}) = \\ &= [A_k x_k + b_k - a_{k+1}]^T Q^{-1}(k+1)[A_k x_k + b_k - a_{k+1}] - [x_k - a_k]^T Q^{-1}(k)[x_k - a_k]. \end{aligned}$$

Будем определять a_k из уравнения

$$a_{k+1} = A_k a_k + b_k, \quad a_{k_0} = a_0. \tag{5.2}$$

С учетом уравнения (5.2) для a_k получаем

$$v(k+1, x(k+1)) - v(k, x(k)) = [x_k - a_k]^T [A_k^T Q^{-1}(k+1) A_k - Q^{-1}(k)][x_k - a_k]^T.$$

Пусть $Q(k_0) = Q_0 \in G^+$ и A_k — неособые при любом k $n \times n$-матрицы. Тогда, приравнивая к нулю первую разность (т. е. требуя, чтобы квадратичная форма была постоянной на решениях исходной системы), получаем, что для матрицы $Q(k)$ должно выполняться тождество $A_k^T Q^{-1}(k+1) A_k = Q^{-1}(k)$, $Q(k_0) = Q_0 \in G^+$, из которого получаем матричное разностное уравнение Ляпунова

$$Q(k+1) = A_k Q(k) A_k^T, \quad Q(k_0) = Q_0 \in G^+. \tag{5.3}$$

Таким образом, матрица $Q(k)$, получаемая из уравнения (5.3), определяет функцию Ляпунова в виде квадратичной формы (4.4), которая остается постоянной на решениях системы (5.1). Поэтому если в начальный момент времени состояние системы (5.1) принадлежит эллипсоиду (1.2), т. е. $v(k_0, x_0) = [x_0 - a_0]^T Q^{-1}(k_0)[x_0 - a_0] \le 1$, то и для всех $k \ge k_0$ $v(k, x) = [x_k - a_k]^T Q^{-1}(k)[x_k - a_k] \le 1$. Это означает, что состояние дискретной системы принадлежит эллипсоиду с центром в точке a_k и размерами, определяемыми матрицей $Q(k)$.

Возьмем теперь матричную функцию

$$V(k, x_k) = [x_k - a_k][x_k - a_k]^T \tag{5.4}$$

и вычислим для нее $V(k+1, x_{k+1}) = [x_{k+1} - a_{k+1}][x_{k+1} - a_{k+1}]^T$ в силу уравнения (5.1). Тогда с учетом уравнения для a_k получаем

$$V(k+1, x_{k+1}) = A_k [x_k - a_k][x_k - a_k]^T A_k^T = A_k V(k, x_k) A_k^T.$$

Легко показать, что матричная функция $F(k, Y_k) = A_k Y_k A_k^T$ является монотонно неубывающей относительно конуса G_+. Если $V(k_0, x_{k_0}) \le Q_0$ при $k = k_0$, то по лемме 4 уравнение (5.3) будет являться матричной разностной системой сравнения для системы (5.1). Поэтому $x_k \in Z(k) = \{x : [x - a_k][x - a_k]^T \le Q(k)\}$ или $x_k \in P(k) = \{x : [x - a_k]^T Q^{-1}(k)[x - a_k] \le 1\}$, если $Q(k)$ — положительно определенное решение уравнения (5.3).

Отметим также, что уравнение (5.3) совпадает с эволюционным уравнением метода эллипсоидов [14]. Как известно, такое уравнение описывает эволюцию эллипсоида, являющегося точной оценкой множества достижимости системы (5.1), для процессов, начинающихся из заданного эллипсоида $E(a_0, Q_0)$ (1.2).

Лемма 6. *Пусть в системе* (5.1) A_k $(k = 0, 1, 2, \dots)$ — *неособые* $n \times n$*-матрицы,* Q_0 — *положительно определенная* $n \times n$*-матрица. Если при* $k = k_0$ $x_0 \in E(a_0, Q_0)$*, то для каждого* $k \ge k_0$ *состояние системы принадлежит эллипсоиду* $E(a_k, Q_k)$*, где* a_k*,* Q_k *определяются соответственно из уравнений* (5.2) *и* (5.3).

Для стационарной линейной системы (5.1) справедлива

Лемма 7. *Пусть* $A_k = A$*,* $b_k = b$*, где* A*,* b — *постоянные матрица и вектор. Для того чтобы последовательность эллипсоидов* $E(a_k, Q_k)$ *сходилась при* $k \to \infty$ *к точке* $a = (I - A)^{-1} b$*, необходимо и достаточно, чтобы матрица* A *была устойчивой, т. е.* $\rho(A) = \max\limits_i |\lambda_i(A)| < 1$ *(*$\rho(A)$ *– спектральный радиус матрицы* A*).*

Доказательство. Достаточность. Из уравнения (5.2) для центра эллипсоида получаем

$$a_{k+1} = A^k a_0 + \sum_{j=0}^{k-1} A^j b.$$

Поскольку $\rho(A) < 1$, то $A^k a_0 \to 0$ при $k \to \infty$ и, как известно [18], $\sum\limits_{j=0}^{\infty} A^j = (I - A)^{-1}$. Тогда $\lim\limits_{k\to\infty} a_{k+1} = (I - A)^{-1} b$, т. е. центр предельного эллипсоида совпадает с $a = (I - A)^{-1} b$. Покажем, что объем эллипсоида стремится к нулю при $k \to \infty$. Для этого представим уравнение (5.3) в виде [19]

$$D(Q_{k+1}) = F D(Q_k), \tag{5.5}$$

где $D(Q) = \mathrm{col}(q_1^T, q_2^T, \dots, q_n^T)$ — n^2-вектор, составленный из строк q_i матрицы Q, $F = A \otimes A$ — постоянная $n^2 \times n^2$-матрица, являющаяся кронекеровским произведением двух матриц A. Известно [18], что собственными значениями матрицы $F = A \otimes A$ являются n^2 чисел вида $\lambda_i(A)\lambda_j(A)$, $i, j = \overline{1, n}$. В силу предположения о спектральном радиусе матрицы A для собственных значений матрицы F будет иметь место неравенство $|\lambda_i(A)\lambda_j(A)| < 1$. Поэтому система (5.5) будет асимптотически устойчива и для любого ее решения будет выполняться $\lim\limits_{k\to\infty} D(Q_k) = 0$. Отсюда $Q_k \to 0$ и $\det Q_k \to 0$ при $k \to \infty$.

Необходимость. Предположим, что последовательность эллипсоидов $E(a_k, Q_k)$ сходится при $k \to \infty$ к точке $a = (I - A)^{-1} b$. Тогда согласно лемме 6 все решения уравнения (5.1), начавшиеся из эллипсоида $E(a_0, Q_0)$, будут сходиться к точке a, являющейся единственной особой точкой уравнения (5.1). Для линейной автономной разностной системы это будет означать асимптотическую устойчивость, для которой необходимо выполнение неравенства $\rho(A) < 1$.

5.2. Построение матричной системы сравнения для линейной дискретной системы с неопределенностями

Рассматривается линейная модель динамической системы с неопределенностями, заданная разностным уравнением

$$x_{k+1} = A_k x_k + B_k \omega_k, \tag{5.6}$$

где $x_{k+1}, x_k \in R^n$ — векторы фазовых координат системы, A_k, B_k — вещественные $n \times n$- и $n \times l$-матрицы, ω_k — l-вектор неопределенных возмущений, которые считаются детерминированными и ограниченными, т. е. в каждый момент времени векторы ω_k неизвестны, но

$$\omega_k \in \{\omega : \omega\omega^T \le R_k\}. \tag{5.7}$$

Здесь R_k — известные вещественные $l \times l$-матрицы.

Для системы (5.6) интерес представляет задача построения множества достижимости в момент времени k для процессов, начинающихся из заданного множества. Для решения этой задачи чаще всего применяется аппроксимация множества достижимости классом областей определенной канонической формы, например, классом эллипсоидов [20]. Известны гарантированные оценки множества достижимости, основанные на эллипсоидальной аппроксимации суммы двух эллипсоидов [14], [20]. Здесь для построения верхних эллипсоидальных оценок используется подход, основанный на построении матричных систем сравнения. Этот подход предложен в [4], [5] для построения гарантированных оценок состояния непрерывных систем автоматического управления. В [7] этот подход был развит для нелинейных непрерывных регулируемых систем со структурными изменениями.

Для верхней эллипсоидальной аппроксимации множества достижимости построим матричную систему сравнения для исходной системы (5.6). При этом будет использоваться очевидное матричное неравенство (относительно конуса неотрицательно определенных симметрических матриц)

$$xy^T + yx^T \le \frac{1}{q}xx^T + qyy^T, \tag{5.8}$$

которое имеет место для любых векторов $x, y \in R^n$ и любой переменной $q > 0$.

Пусть a_k определяется из уравнения

$$a_{k+1} = A_k a_k, \quad a_{k_0} = a_0. \tag{5.9}$$

Возьмем матричную функцию (5.4) и, учитывая (5.6), (5.9), вычислим

$$V(k+1, x_{k+1}) = [x_{k+1} - a_{k+1}][x_{k+1} - a_{k+1}]^T = A_k[x_k - a_k][x_k - a_k]^T A_k^T + A_k[x_k - a_k]\omega_k^T B_k^T + \\ + B_k\omega_k[x_k - a_k]^T A_k^T + B_k\omega_k\omega_k^T B_k^T. \tag{5.10}$$

С учетом (5.8) из (5.10) получаем

$$V(k+1, x_{k+1}) \le (1+q)A_k V(k, x_k) A_k^T + (1 + \tfrac{1}{q})B_k\omega_k\omega_k^T B_k^T.$$

Отсюда с учетом предположения (5.7) относительно ω_k получается матричное разностное неравенство

$$V(k+1, x_{k+1}) \le (1+q)A_k V(k, x_k) A_k^T + (1 + \tfrac{1}{q})B_k R_k B_k^T, \tag{5.11}$$

правая часть которого монотонно неубывающая по V относительно конуса G_+. Если $x_0 \in E(a_0, Q_0)$ в начальный момент времени k_0, то будет выполняться неравенство $V(k_0, x_0) = [x_0 - a_0][x_0 - a_0]^T \le Q_0$, а соответствующее неравенству (5.11) матричное конечно-разностное уравнение

$$Q_{k+1} = (1+q)A_k Q_k A_k^T + (1 + \tfrac{1}{q})B_k R_k B_k^T \tag{5.12}$$

является матричной системой сравнения для уравнения (5.6). Поэтому согласно лемме 5 уравнение (5.12) вместе с уравнением (5.9) определяют эволюцию параметров эллипсоидов $E(a_k, Q_k)$, аппроксимирующих сверху состояние системы (5.6).

Отметим, что полученное уравнение (5.12) совпадает с уравнением эволюции параметров эллипсоида из [14], [20]. Для выбора параметра q используются различные критерии. В частности, в [20] исследуются ограниченность последовательности эллипсоидов $E(a_k, Q_k)$, определяемых уравнениями (5.9), (5.12) при $R_k = I$ (I — единичная матрица), A_k, B_k — постоянные матрицы. Показано, что устойчивость матрицы A исходной системы не гарантирует сходимости и ограниченности эллипсоидальных оценок при выборе параметра q по критерию минимальности их объема. При выборе параметра q по критерию суммы квадратов полуосей эллипсоида, т. е. следа соответствующей ему матрицы, устойчивость матрицы A гарантирует ограниченность эллипсоидальных оценок. По указанному критерию параметр q определяется по формуле

$$q_k = \sqrt{\mathrm{Tr}(B_k R_k B_k^T)/\,\mathrm{Tr}(A_k Q_k A_k^T)}.$$

Таким образом, для линейной разностной системы матричная система сравнения дает точно такие же внешние эллипсоидальные оценки множества достижимости, как и метод эллипсоидов.

6. Построение матричной системы сравнения для дискретной регулируемой системы с нелинейностью из сектора

Рассмотрим теперь регулируемую систему с одной нелинейностью

$$x(k+1) = A(k)x(k) + b(k)\varphi(k,\sigma), \quad \sigma = c^T(k)x(k), \tag{6.1}$$

где, как и выше, $A(k)$ — $n\times n$-матрица, $b(k)$, $c(k)$ — n-векторы. Будем предполагать, что $\varphi(k,\sigma)$ — неопределенная непрерывная функция, которая удовлетворяет условию

$$0 \le \varphi(k,\sigma)/\sigma \le \underline{k} \ \ \forall \sigma \in R^1, \tag{6.2}$$

где $\underline{k} = \mathrm{const}$.

Далее для системы (6.1) предлагается способ построения матричной системы сравнения, основанный на применении матричных неравенств к правой части выражения для $V(k+1)$, вычисленного в силу (6.1).

Итак, возьмем матричную функцию $V(k)$ вида (5.4) и, вычислив $V(k+1)$ в силу системы (6.1), получим матричное конечно-разностное соотношение

$$V(k+1) = [A(k)x(k) + b(k)\varphi(k,\sigma) - a(k+1)][A(k)x(k) + b(k)\varphi(k,\sigma) - a(k+1)]^T.$$

Пусть a_k определяется из уравнения

$$a(k+1) = \underline{A}(k)a(k), \quad a(k_0) = a_0, \quad \underline{A}(k) = A(k) + \underline{k}/2b(k)c^T(k). \tag{6.3}$$

Тогда соотношение для $V(k+1)$ принимает вид

$$\begin{aligned} V(k+1) &= \{A(k)x(k) + b(k)\varphi(k,\sigma) - \underline{A}(k)a(k)\}\{A(k)x(k) + b(k)\varphi(k,\sigma) - \underline{A}(k)a(k)\}^T = \\ &= \{\underline{A}(k)[x(k) - a(k)] + b(k)[\psi(k,\sigma)]\}\{\underline{A}(k)[x(k) - a(k)] + b(k)[\psi(k,\sigma)]\}^T = \\ &= [\underline{A}(k)V(k)\underline{A}^T(k) + [\psi(k,\sigma)]\{\underline{A}(k)[x(k) - a(k)]b^T(k) + b(k)[x(k) - a(k)]^T\underline{A}^T(k)\} + \\ &\qquad + b(k)b^T(k)[\psi(k,\sigma)]^2, \end{aligned} \tag{6.4}$$

где $\psi(k,\sigma) = \varphi(k,\sigma) - \sigma\underline{k}/2$.

С учетом неравенства (5.8), представленного в виде

$$[\psi(k,\sigma)]\{\underline{A}(k)[x(k)-a(k)]b^T(k)+b(k)[x(k)-a(k)]^T\underline{A}^T(k)\} \le \tfrac{1}{q}\underline{A}(k)V(k)\underline{A}^T(k)+q[\psi(k,\sigma)]^2 b(k)b^T(k),$$

из (6.4) получаем

$$V(k+1) \le (1+\tfrac{1}{q})\underline{A}(k)V(k)\underline{A}^T(k) + (1+q)[\psi(k,\sigma)]^2 b(k)b^T(k), \tag{6.5}$$

где q — любая положительная переменная. С учетом условия (6.2) оценим $[\psi(k,\sigma)]^2 = [\varphi(k,\sigma)/\sigma - \underline{k}/2]^2\sigma^2 \le (\underline{k}/2)^2\sigma^2$. Полагая $x = a + \zeta$, получим

$$[\varphi(k,\sigma) - \underline{k}\sigma(k)/2]^2 \le (\underline{k}/2)^2(c^Tx)^2 = (\underline{k}/2)^2(c^Ta + c^T\zeta)^2 \le (\underline{k}/2)^2[|c^Ta| + \max_{\zeta\in E(0,Q)}(c^T\zeta)]^2. \tag{6.6}$$

Для вычисления максимума в (6.6) составим функцию Лагранжа

$$L = c^T\zeta + \lambda(\zeta^T Q^{-1}\zeta)$$

и приравняем к нулю ее градиент по ζ. Тогда находим

$$\zeta = -(2\lambda)^{-1}Qc. \tag{6.7}$$

Подставляя (6.7) в условие $\zeta^T Q^{-1}\zeta = 1$, получим равенство, из которого определим $\lambda = \pm\frac{1}{2}(c^TQc)^{1/2}$, а из (6.7) равенство

$$\zeta = \mp(c^TQc)^{-1/2}Qc.$$

Подставляя в $c^T\zeta$, находим искомый максимум из (6.6)

$$\max_{\zeta\in E(0,Q)}(c^T\zeta) = (c^TQc)^{1/2}. \tag{6.8}$$

Тем самым нашли оценку

$$[\varphi(k,\sigma) - \underline{k}\sigma(k)/2]^2 \le (\underline{k}/2)^2[|c^T(k)a(k)| + (c^T(k)Q(k)c(k))^{1/2}]^2. \tag{6.9}$$

Используя (6.9), получаем соответствующее конечно-разностному неравенству (6.5) матричное уравнение

$$Q(k+1) = (1+\tfrac{1}{q})\underline{A}(k)Q(k)\underline{A}^T(k) + (1+q)(\underline{k}/2)^2[|c^T(k)a(k)| + (c^T(k)Q(k)c(k))^{1/2}]^2 b(k)b^T(k). \tag{6.10}$$

Правая часть уравнения (6.10) удовлетворяет условию монотонного неубывания по Q относительно конуса неотрицательно определенных симметрических матриц. Поэтому оно будет являться матричной системой сравнения для уравнения (6.1) с неопределенной нелинейностью из (6.2).

Таким образом, из леммы 5 вытекает

Теорема 5. *Пусть матрица $\underline{A}(k)$ неособая при всех $k \ge k_0$. Тогда для решений системы (6.1) с нелинейностью из (6.2) и начальными условиями из $E(a_0, Q_0)$ имеет место оценка*

$$x(k) \in E[a(k), Q(k)] = \{x \in R^n : [x - a(k)]^T Q^{-1}(k)[x - a(k)] \le 1\} \quad \text{при всех } k \ge k_0, \tag{6.11}$$

где $a(k)$ — решение уравнения (6.3), а $Q(k)$ — положительно определенное решение системы сравнения (6.10) с начальным условием $Q(k_0) = Q_0$.

Доказательство. Легко видеть, что при неособой матрице $\underline{A}(k_0)$ и $Q_0 > 0$ матрица $Q(k_0+1)$, получаемая из уравнения (6.10), будет положительно определенной. По индукции показывается положительная определенность матрицы $Q(k)$ при любом $k \ge k_0$. Поэтому существует $Q^{-1}(k)$ и по лемме 5 имеет место эллипсоидальная оценка (6.11).

Для того чтобы использовать систему сравнения (6.10), осталось задать параметр q. В частности, в качестве q можно выбрать любую положительную константу или положительную функцию времени k. С другой стороны, выбором параметра q можно распорядиться для получения наиболее точных оценок решений исходной системы. Поскольку результирующая оценка (6.11) имеет форму эллипсоида и является верхней для множества дискретных процессов, начинающихся из заданного эллипсоида, то параметр q может быть определен исходя из выбранного критерия минимальности результирующего эллипсоида. Известно [14], [20], если минимизируется объем эллипсоида (определитель матрицы эллипсоида), то

$$q_k = \arg\min_{0<q<\infty} \operatorname{Det} Q(k+1),$$

а если минимизируется сумма квадратов длин полуосей (след матрицы эллипсоида), то

$$q_k = \arg\min_{0<q<\infty} \operatorname{Tr} Q(k+1). \tag{6.12}$$

В [20] для линейной системы показано, что выбор в качестве критерия суммы квадратов полуосей эллипсоида, т. е. следа соответствующей ему матрицы, более удобен. В данном случае так же, как и в [20], удается получить в явном виде формулы для параметра q. Для разностного уравнения (6.10) из условия (6.12) легко вычислить

$$q_k = \sqrt{\frac{\mathrm{Tr}(E(k))}{\mathrm{Tr}(D(k))}}, \tag{6.13}$$

где

$$E(k) = \underline{A}(k)Q(k)\underline{A}^T(k), \quad D(k) = (\underline{k}/2)^2[|c^T(k)a(k)| + (c^T(k)Q(k)c(k))^{1/2}]^2 b(k)b^T(k). \tag{6.14}$$

Можно указать другие критерии выбора параметра q и получить уравнения, которые будут являться системами сравнения для исходной системы с нелинейностью из сектора, если правая часть этого уравнения будет оставаться монотонно неубывающей относительно G_+ матричной функцией. Например, в [7] предложено выбирать параметр q из условия минимизации квадратичной формы, образованной с помощью матриц, входящих в правую часть систем сравнения (6.10),

$$\min_q \left\{\frac{1}{q} z^T E z + q z^T D z\right\}$$

при любом $z \in \{z \in R^n : z^T E z z^T D z > 0\}$. Приравнивая к нулю производную по q, получим

$$q^2 = z^T E z/(z^T D z). \tag{6.15}$$

Вторая производная при q из (6.15) $(z^T E z)/q^3 = (z^T D z)^3/(z^T E z)$ будет положительна, если

$$(z^T D z)(z^T E z) > 0, \tag{6.15$'$}$$

что является достаточным условием минимума. Таким образом, выбираем параметр

$$q = [(z^T E z)/(z^T D z)]^{1/2} \tag{6.16}$$

где вектор z должен удовлетворять условию (6.15$'$).

Для системы (6.10) с учетом обозначений (6.14) параметр q определяется по формуле (6.16)

$$q_k = \left\{\frac{z^T E(k) z}{z^T D(k) z}\right\}^{1/2} = F \equiv \frac{2[z^T \underline{A}(k)Q(k)\underline{A}^T(k)z]^{1/2}}{\underline{k}[|c^T(k)a(k)| + (c^T(k)Q(k)c(k))^{1/2}]|z^T b(k)|}.$$

Подставляя q в (6.10), находим

$$Q(k+1) = \left(1 + \frac{1}{F}\right)\underline{A}(k)Q(k)\underline{A}^T(k) + (1+F)\frac{\underline{k}^2}{4}[|c^T(k)a(k)| + (c^T(k)Q(k)c(k))^{1/2}]^2 b(k)b^T(k). \tag{6.17}$$

Например, если при каждом k матрица $A(k)$ неособая, то вектор z следует задать из уравнения $A^T z = c$. Тогда после подстановки $z = (A^{-1})^T c$ из (6.17) получаем уравнение

$$Q(k+1) = \left[1 + \frac{c^T(k)A^{-1}(k)c(k)}{\underline{k}}\right]\underline{k}^2 A(k)Q(k)A^T(k) + \\ + \left[1 + \frac{\underline{k}}{c^T A^{-1}(k)c(k)}\right]c^T(k)Q(k)c(k)b(k)b^T(k), \tag{6.18}$$

правая часть которого является монотонно неубывающей относительно G_+ матричной функцией. Поэтому (6.18) является матричной системой сравнения для (6.1).

7. Построение оценок решений и множества достижимости на основе матричных систем сравнения

Полученные системы сравнения (6.6), (6.8), (6.10), (6.18) могут быть использованы для анализа динамических свойств ограниченности и инвариантности исходной регулируемой системы с нелинейностью из сектора, если к ним применить теорему 4. Кроме того, могут быть получены оценки процессов в исходной системе, инвариантных множеств, областей притяжения (в автономном случае) и множества достижимости в виде эллипсоидов (4.6) для решений, начинающихся из заданного начального эллипсоида (1.2). Для этого с применением ПЭВМ находится на конечном интервале времени $[k_0, k_0+\tau]$ частное решение $Q(k, k_0, Q_0)$ системы сравнения и по нему строится оценка в виде (6.11). Отметим, что построенные здесь матричные системы сравнения имеют довольно простые правые части, и поэтому все вычисления сводятся к обычным матричным операциям.

Способы и алгоритмы построения матричных систем сравнения, эллипсоидальных оценок дискретных процессов систем вида (5.5) реализованы в пакете MATLAB.

Пример 1. Для линейной дискретной системы (5.6) с неопределенными возмущениями (5.7) на основе численного решения системы сравнения вида $Q_{k+1} = (1+q)A_kQ_kA_k^T + (1+1/q)bRb^T$ были получены эллипсоидальные оценки дискретных процессов, которые приведены на рис. 1, 2. Как видно из рисунков, процессы, стартующие из начального эллипсоида $E(0, Q_0)$, с течением времени сходятся к нулю (рис. 1) или в случае учета неопределенных возмущений вида (5.7) стягиваются к предельному эллипсоиду (внутренний эллипсоид на рис. 2). При расчетах были приняты следующие исходные данные: $A = \left|\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0.7 & 0.2 \end{smallmatrix}\right|$, $b = \left|\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right|$, $R = 0.001$, $Q_0 = \left|\begin{smallmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{smallmatrix}\right|$, $z_1 = \left|\begin{smallmatrix} 0.01 & 0.02 \end{smallmatrix}\right|^T$, $k = 0, \ldots, 50$.

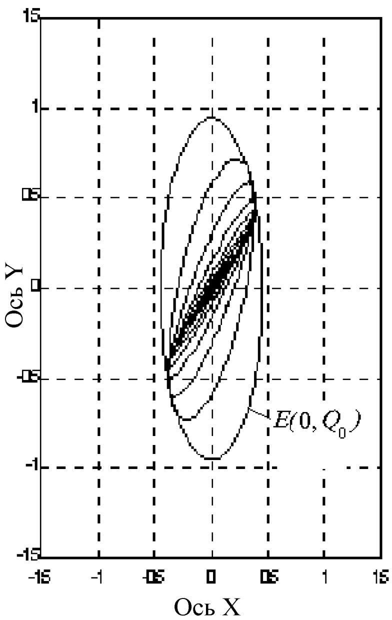

Рис. 1

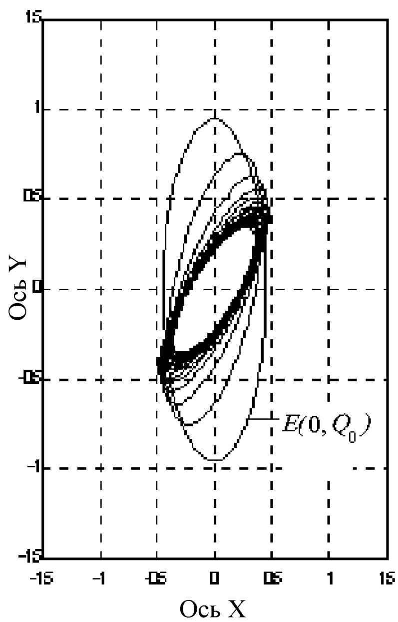

Рис. 2

Пример 2. Рассматривается дискретная регулируемая система (6.1) с одной нелинейностью из сектора (6.2). При $a_0 = 0$ (эллипсоид задан с центром в начале координат) система сравнения (6.10) принимает вид

$$Q_{k+1} = (1+q)A_kQ_kA_k^T + (1+1/q)\frac{k^2}{4}c_k^TQ_kc_kb_kb_k^T. \tag{7.1}$$

В результате численного решения системы сравнения (7.1) получены эллипсоидальные оценки дискретных процессов при следующих исходных данных: $A = \left|\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0.7 & 0.2 \end{smallmatrix}\right|$, $b = \left|\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right|$, $c = \left|\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right|$, $a_0 = 0$,

$Q_0 = \left|\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & 0.9\end{smallmatrix}\right|$, $k = 0, \ldots, 50$.

При выборе параметра q из (6.16), где вектор $z = (A^{-1})^T c$, получена оценка при $\underline{k} = 0.4$ (рис. 3). Как видно из рисунка, эллипсоиды с течением времени медленно сжимаются. Отметим, что при $\underline{k} > 0.4$ получается оценка, где эллипсоиды с течением времени расходятся.

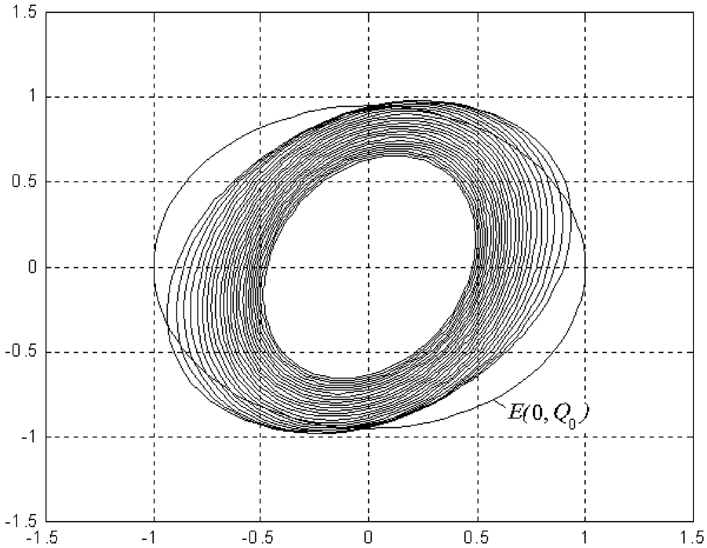

Рис. 3

При выборе параметра q из (6.13) получена оценка при $\underline{k} = 0.45$ (рис. 4). Как видно из рисунка, эллипсоиды с течением времени медленно сжимаются. На рис. 5 представлена оценка при $\underline{k} = 0.46$. Здесь эллипсоиды с течением времени расходятся.

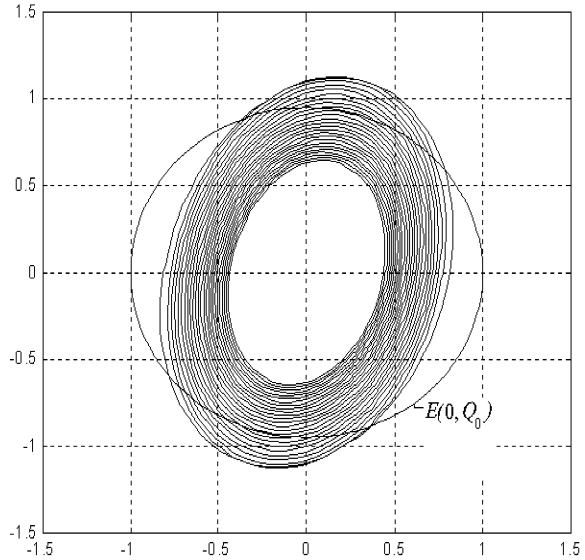

Рис. 4

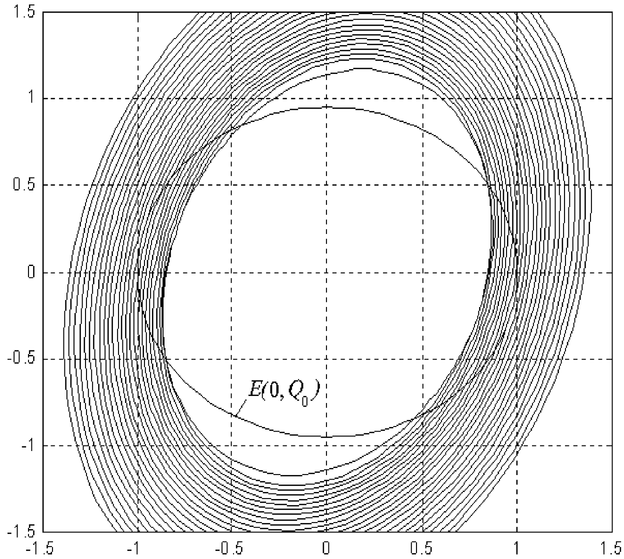

Рис. 5

Для сравнения были получены оценки при использовании системы сравнения (7.1) с фиксированным параметром q. При выборе $q = 0.9$ удалось для случая $\underline{k} = 0.46$ получить оценку, в которой эллипсоиды с течением времени сжимаются (рис. 6).

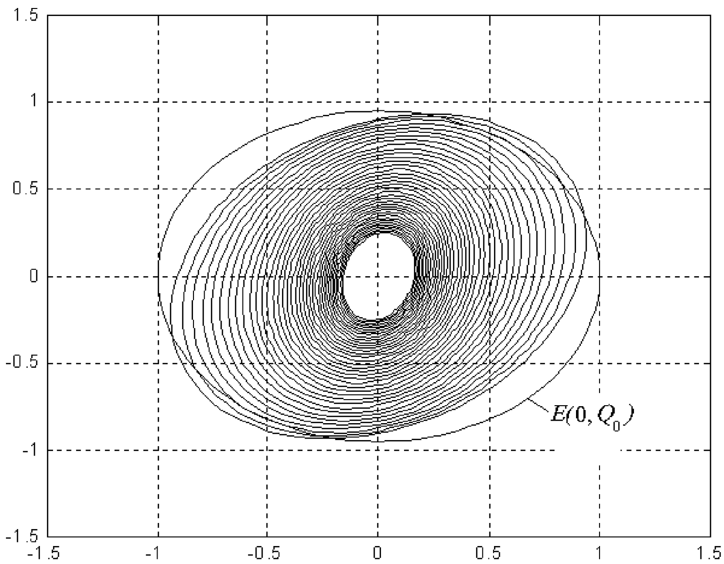

Рис. 6

Таким образом, представленные примеры показывают, что проблема выбора параметра q в матричной системе сравнения аналогична проблеме выбора неопределенного параметра в методе эллипсоидов. Для получения наиболее точных оценок можно использовать [21] пересечения эллипсоидов, соответствующих значениям неопределенного параметра q.

Литература

1. Куо Б. *Теория и проектирование цифровых систем управления.* – М.: Машиностроение, 1986. – 448 с.
2. Теряев Е.Д., Шамриков Б.М. *Цифровые системы и поэтапное адаптивное управление.* – М.: Наука, 1999. – 330 с.
3. Сабаев Е.Ф. *Матричные системы сравнения и их приложение в динамике реакторов.* – М.: Атомиздат, 1980. – 192 с.
4. Маликов А.И., Благов А.Е. *Динамический анализ систем автоматического управления с помощью матричных систем сравнения* // Вестн. Казанск. техн. ун-та, 1996. – № 4. – С. 71–75.
5. Маликов А.И., Благов А.Е. *Анализ динамики многосвязных систем автоматического регулирования с помощью матричных систем сравнения* // Вестн. Казанск. техн. ун-та, 1998. – № 2. – С. 37–43.
6. Маликов А.И. *Матричные системы дифференциальных уравнений с условием квазимонотонности* // Изв. вузов. Математика. – 2000. – № 8. – С. 35–45.
7. Маликов А.И. *Матричные системы сравнения в анализе динамики систем управления со структурными изменениями* // Изв. РАН. Теория и системы управления. – 1999. – № 3. – С. 11–21.
8. Фурасов В.Д. *Устойчивость и стабилизация дискретных процессов.* – М.: Наука, 1982. – 192 с.
9. Иртегов В.Д. *Об устойчивости решений разностных уравнений* // Тр. КАИ. Математика и механика. – 1970. – Вып. 125. – С. 14–19.
10. Матросов В.М., Анапольский Л.Ю., Васильев С.Н. *Метод сравнения в математической теории систем.* – Новосибирск: Наука СО, 1980. – 481 с.
11. Анапольский Л.Ю. *Метод сравнения в динамике дискретных систем* // Вектор-функции Ляпунова и их построение. – Новосибирск: Наука СО, 1980. – С. 92–128.

12. Козлов Р.И., Бурносов С.В. *Асимптотическое поведение и оценки решений монотонных разностных уравнений* // Метод функций Ляпунова в анализе динамики систем. – Новосибирск: Наука СО, 1987. – С. 16–29.
13. Козлов Р.И., Бурносов С.В. *Построение векторной функции Ляпунова и системы сравнения для одного класса нелинейных дискретных систем* // Функции Ляпунова и их применения. – Новосибирск: Наука СО, 1987. – С. 85–93.
14. Черноусько Ф.Л. *Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов.* – М.: Наука, 1988. – 319 с.
15. Уонэм У. Мюррей. *Линейные многомерные системы управления. Геометрический подход.* – М.: Наука, 1980. – 376 с.
16. Маликов А.И. *Оценки решений нелинейных систем сравнения* // Динамика нелинейных систем. – Новосибирск: Наука СО, 1983. – С. 49–57.
17. *Метод векторных функций Ляпунова в теории устойчивости* / Под ред. А.А. Воронова, В.М. Матросова. – М.: Наука, 1987. – 312 с.
18. Ланкастер П. *Теория матриц.* – М: Наука, 1978. – 280 с.
19. Пакшин П.В. *Дискретные системы со случайными параметрами и структурой.* – М.: Наука, 1994. – 304 с.
20. Назин С.А. *Предельное поведение эллипсоидальных оценок состояний линейных динамических систем* // Автоматика и телемеханика. – 2001. – № 4. – С. 91–97.
21. Kurzhanski A.B., Sugimoto K., Valyi I. *Guaranteed state estimation for dynamical systems: ellipsoidal techniques* // Intern. J. of Adaptive Control and Signal Processing. – 1994. – V. 8. – P. 85–101.

Институт механики и машиностроения
Казанского научного центра
Российской Академии наук

Поступила
08.01.2003