ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2007 МАТЕМАТИКА № 5 (540)

УДК 517.946

А.М. АБДРАХМАНОВ, А.И. КОЖАНОВ

ЗАДАЧА С НЕЛОКАЛЬНЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА УРАВНЕНИЙ НЕЧЕТНОГО ПОРЯДКА

Пусть Ω — ограниченная область пространства R^n с гладкой (для простоты бесконечно дифференцируемой) границей Γ, Q — цилиндр $\Omega\times(0,T)$ $(0<T<+\infty)$, $S=\Gamma\times(0,T)$, $d^k(x,t)$, $a^{ij}(x,t)$, $k=1,\dots,2m$, $i,j=1,\dots,n$, $a(x,t)$ и $f(x,t)$ — заданные в цилиндре Q функции, A — линейный оператор, ставящий в соответствие функции $v(x,t)$ из пространства $L_2(Q)$ функцию $A(x,t,v)$, M — дифференциальный оператор второго порядка вида

$$Mu=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a^{ij}(x,t)u_{x_j}\right)+a(x,t)u$$

(здесь и далее по повторяющимся индексам ведется суммирование в пределах от 1 до n), $D_t^k=\frac{\partial^k}{\partial t^k}$, L_μ — оператор, определяемый равенством

$$L_\mu u=D_t^{2m+1}u+\sum_{k=1}^{2m}d^k(x,t)D_t^k u+Mu+\mu u \quad (\mu=\mathrm{const}).$$

Краевая задача: найти такую функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения

$$L_\mu u=f(x,t), \tag{1}$$

что для нее выполняются условия

$$D_t^k u|_{t=0,\ x\in\Omega}=0, \quad k=0,\dots,m, \tag{2}$$

$$D_t^k u|_{t=T,\ x\in\Omega}=0, \quad k=0,\dots,m-1, \tag{3}$$

$$u(x,t)|_{(x,t)\in S}=A(x,t,u)|_{(x,t)\in S}. \tag{4}$$

Поскольку оператор M ниже будет предполагаться эллиптическим, то в случае $m=0$ уравнение (1) будет параболическим. Видимо, именно этим обстоятельством объясняется то, что Ю.А. Дубинский [1]–[4] назвал уравнения (1) в случае $m>0$ “эллиптико-параболическими”. С другой стороны, термин “эллиптико-параболические уравнения” употребляется часто по отношению к уравнениям второго порядка с неотрицательной характеристической формой [5], [6]. Учитывая этот факт и стремясь не допустить определенную некорректность, назовем уравнения (1) просто “уравнениями нечетного порядка”.

Краевая задача, исследуемая в данной работе, относится к числу нелокальных по пространственным переменным и представляет собой обобщение некоторых задач с интегральными граничными условиями. Различные краевые задачи, локальные или нелокальные по времени, для уравнений вида (1) при $m>0$ исследовались в [1]–[4], а также в [7]–[10]. Нелокальные по пространственным переменным краевые задачи для уравнений (1) ранее изучались в основном в одномерном случае: [11], [17] для $m=0$, [16] для $m=1$; в многомерном же случае можно отметить лишь работу [17], посвященную изучению свойств решений краевой задачи с интегральным граничным условием

$$u(x,t)|_{(x,t)\in S} = \int_\Omega K(x,y,t)u(y,t)dy|_{(x,t)\in S}$$

для параболических ($m = 0$) уравнений, и работу [18], в которой изучалась разрешимость краевой задачи с операторным граничным условием (4) для параболических ($m = 0$) уравнений, но при более жестких, чем в данной работе, условиях.

Особенностью рассматриваемой краевой задачи является то, что на боковой границе цилиндра $Q = \Omega \times (0,T)$ задается условие, связывающее значения решения со значениями некоторого линейного оператора от него. Доказывается существование и единственность регулярных решений.

Вернемся к содержательной части работы. Пусть

$$V_1 = \{v(x,t) : v(x,t) \in W_2^{2,2m+1}(Q), \quad D_t^k v(x,t) \in L_2(0,T; W_2^1(\Omega)),$$
$$D_t^k v(x,0) \in W_2^1(\Omega), \quad ; D_t^k v(x,T) \in W_2^1(\Omega), \quad k = 0,\ldots,m\},$$

норму в этом пространстве определим равенством

$$\|v\|_{V_1} = \|v\|_{W_2^{2,2m+1}(Q)} + \sum_{k=0}^{m} \|D_t^k v\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} + \sum_{k=0}^{m} \|D_t^k v(x,0)\|_{W_2^1(\Omega)} + \sum_{k=0}^{m} \|D_t^k v(x,T)\|_{W_2^1(\Omega)}.$$

Через $\overset{\circ}{V}_1$ обозначим подпространство пространства V_1, состоящее из функций, для которых выполняются условия (2) и (3).

Всюду ниже будем предполагать, что оператор A ставит в соответствие функции $v(x,t)$ из пространства $L_2(Q)$ функцию $A(x,t,v)$, определенную на множестве $\overline{Q}$ и принадлежащую пространству $L_2(Q)$ (более детальные условия на оператор A сформулируем ниже). Пусть $I : L_2(Q) \to L_2(Q)$ — тождественный оператор, B — оператор $I - A$, L и M_0 — дифференциальные операторы, определенные равенствами

$$Lv = D_t^{2m+1} v + \sum_{k=1}^{2m} d^k(x,t) D_t^k v,$$

$$M_0 v = \frac{\partial}{\partial x_i}(a^{ij}(x,t) v_{x_j}).$$

Для удобства функцию $v(x,t) - A(x,t,v)$ (т. е. образ функции $v(x,t)$ при действии оператора B) будем обозначать $\overline{v}(x,t)$.

Сформулируем условия, при помощи которых установим разрешимость краевой задачи (1)–(4):

I. $a^{ij}(x,t) \in C^2(\overline{Q})$, $a(x,t) \in C^2(\overline{Q})$, $d^k(x,t) \in C^k(\overline{Q})$, $i,j = 1,\ldots,n$, $k = 1,\ldots,2m$ (условия гладкости);

II. $a^{ij}(x,t) = a^{ji}(x,t)$, $i,j = 1,\ldots,n$, $(-1)^{m+1} a^{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \geq k_0|\xi|^2$, $k_0 > 0$, $(x,t) \in \overline{Q}$, $\xi \in R^n$ (условия симметричности и эллиптичности оператора M_0);

III. для любой функции $v(x,t)$ из пространства V_1 выполняются неравенства

$$\|A(x,t,v)\|^2_{L_2(0,T;W_2^2(\Omega))} \leq a_0 \|v\|^2_{L_2(Q)},$$

$$\|D_t^k A(x,t,v)\|^2_{L_2(Q)} \leq \sum_{j=0}^{k} b_{jk} \|D_t^j v\|^2_{L_2(Q)},$$

$$\|D_t^k A(x,t,v) - A(x,t,D_t^k v)\|^2_{L_2(Q)} \leq \sum_{j=0}^{k-1} c_{jk} \|D_t^j v\|^2_{L_2(Q)},$$

$k = 1,\ldots,2m+1$, a_0, b_{jk}, c_{jk} — неотрицательные постоянные (условия подчинения);

IV. для любой функции $v(x,t)$ из пространства V_1 выполняются неравенства

$$\|[D_t^k A(x,t,v) - A(x,t,D_t^k v)]|_{t=0}\|^2_{W_2^1(\Omega)} \le \sum_{j=1}^{k-1} d_{0j}\|D_t^j v(x,0)\|^2_{W_2^1(\Omega)}, \quad k=1,\dots,m,$$

$$\|[D_t^k A(x,t,v) - A(x,t,D_t^k v)]|_{t=T}\|^2_{W_2^1(\Omega)} \le \sum_{j=1}^{k-1} d_{1j}\|D_t^j v(x,T)\|^2_{W_2^1(\Omega)}, \quad k=1,\dots,m-1,$$

d_{0j}, d_{1j} — неотрицательные постоянные (условия подчинения в начальный и конечный моменты времени);

V. для любой функции $v(x,t)$ из пространства V_1 выполняются неравенства

$$b_0\int_Q \overline{v}^2(x,t)\,dx\,dt \le \int_Q v^2(x,t)\,dx\,dt \le b_1\int_Q \overline{v}^2(x,t)\,dx\,dt,$$

b_0, b_1 — постоянные, $b_0>0$ (условие взаимной однозначности оператора B);

VI. $(-1)^{m+1}[d^{2m}(x,t)a^{ij}(x,t) - 2(m+1)a_t^{ij}(x,t)]\xi_i\xi_j \ge k_1|\xi|^2$, $k_1>0$, $(x,t)\in\overline{Q}$, $\xi\in R^n$;

VII. $8a_0<1$.

Теорема. *Пусть выполняются условия* I–VII. *Тогда существует такое положительное число μ_0, что если $(-1)^m\mu>\mu_0$, то краевая задача* (1)–(4) *будет разрешима в пространстве $\overset{\circ}{V}_1$ для любой функции $f(x,t)$ из пространства $L_2(Q)$, и притом единственным образом.*

Доказательство. Положим

$$\Phi(x,t,v) = A(x,t,Lv) - LA(x,t,v) + A(x,t,Mv) - MA(x,t,v),$$
$$L_{A,\mu}v = L_\mu\overline{v} + \Phi(x,t,v).$$

Пусть $g(x,t)$ — заданная функция из пространства $L_2(Q)$. Рассмотрим краевую задачу: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения*

$$L_{A,\mu}u = g(x,t) \tag{5}$$

при выполнении условий (2), (3) *и условия*

$$\overline{u}(x,t)|_S = 0. \tag{6}$$

Докажем, что при выполнении условий I–VII найдется положительное число μ_0 такое, что если $(-1)^m\mu>\mu_0$, то краевая задача (5), (2), (3), (6) будет разрешима в классе $W=\{v(x,t) : v(x,t)\in\overset{\circ}{V}_1,\ \overline{v}(x,t)\in\overset{\circ}{V}_1\}$ для любой функции $g(x,t)$ из пространства $L_2(Q)$. Воспользуемся методом продолжения по параметру. Именно, для чисел λ из отрезка $[0,1]$ определим семейство операторов $\{L_{A,\mu,\lambda}\}$: $L_{A,\mu,\lambda}v = L_\mu\overline{v} + \lambda\Phi(x,t,v)$. Рассмотрим краевую задачу: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения*

$$L_{A,\mu,\lambda}u = g(x,t) \tag{5_λ}$$

при выполнении условий (2), (3) *и* (6). Обозначим через Λ_μ множество тех чисел λ из отрезка $[0,1]$, для которых краевая задача (5_λ), (2), (3), (6) разрешима в классе $\overset{\circ}{V}_1$ для заданного числа μ и для произвольной функции $g(x,t)$ из пространства $L_2(Q)$. Покажем, что найдется такое число $\mu_0>0$, что для чисел μ, для которых выполняется неравенство $(-1)^m\mu>\mu_0$, множество Λ_μ будет совпадать со всем отрезком $[0,1]$. Совпадение для таких чисел μ множества Λ_μ с отрезком $[0,1]$ и означает разрешимость краевой задачи (5), (2), (3), (6) в требуемом классе.

Убедимся прежде всего, что существует положительное число μ_1 такое, что при выполнении неравенства $(-1)^m\mu>\mu_1$ множество Λ_μ будет непустым. Рассмотрим краевую задачу: *найти функцию $w(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения*

$$L_\mu w = g(x,t)$$

при выполнении условий (2), (3) *и* (6). Как следует из результатов работ [7], [8] (см. также [9]), существует такое положительное число μ_1, что при выполнении неравенства $(-1)^m\mu > \mu_1$ и при выполнении условий I и II эта задача имеет решение, принадлежащее пространству $\overset{\circ}{V}_1$. Определим функцию $u(x,t)$ равенством $u(x,t) = (B^{-1}w)(x,t)$ (вследствие условия V функция $u(x,t)$ определена корректно). Первое неравенство условия III и принадлежность функции $w(x,t)$ пространству $\overset{\circ}{V}_1$ дают для функции $u(x,t)$ включение $u(x,t) \in L_2(0,T;W_2^2(\Omega))$. Далее, равенство

$$u_t(x,t) - A(x,t,u_t) = w_t(x,t) + \frac{\partial}{\partial t}A(x,t,u) - A(x,t,u_t), \tag{7}$$

третье неравенство условия III и условие V дают включение $u_t(x,t) \in L_2(Q)$. Равенство

$$u_{tt}(x,t) - A(x,t,u_{tt}) = w_{tt}(x,t) + D_t^2A(x,t,u) - A(x,t,u_{tt}), \tag{8}$$

второе неравенство условия III и условие V, а также полученное выше включение для функции $u_t(x,t)$ дают включение $u_{tt}(x,t) \in L_2(Q)$. Действуя далее аналогично, получим включения $D_t^k u(x,t) \in L_2(Q)$, $k = 3,\dots,2m+1$.

Равенства (7), (8) и аналогичные следующие равенства, условие IV и выполненные для функции $w(x,t)$ начальные и финальные условия (2), (3) дают выполнение для функции $u(x,t)$ тех же условий (2) и (3), а также выполнение включений $D_t^k u(x,0) \in W_2^1(\Omega)$, $D_t^k u(x,T) \in W_2^1(\Omega)$, $k = 0,\dots,m$.

Доказанные включения и выполнение условий (2) и (3) означают, что построенная функция $u(x,t)$ принадлежит пространству $\overset{\circ}{V}_1$ и тем самым является искомым решением краевой задачи (5_0), (2), (3), (6) из класса W. В свою очередь, разрешимость краевой задачи (5_0), (2), (3), (6) в классе W означает, что число 0 принадлежит множеству Λ_μ для всех чисел μ, удовлетворяющих неравенству $(-1)^m\mu > \mu_1$, и, следовательно, что множество Λ_μ для указанных чисел μ непусто.

Покажем теперь, что существует число μ_2 такое, что для всех чисел μ, удовлетворяющих неравенству $(-1)^m\mu > \mu_2$, множество Λ_μ открыто и замкнуто одновременно. Делается это с помощью априорных оценок решений краевой задачи (5_λ), (2), (3), (6) в пространстве $\overset{\circ}{V}_1$.

Итак, пусть $u(x,t)$ есть решение краевой задачи (5_λ), (2), (3), (6) из пространства $\overset{\circ}{V}_1$. Преобразуем равенство

$$\int_Q L_{A,\mu,\lambda}\, u\, (D_t^{2m+1}\overline{u} + M_0\overline{u})\; dx\,dt = \int_Q g\, (D_t^{2m+1}\overline{u} + M_0\overline{u})\; dx\,dt$$

с помощью интегрирования по частям к виду

$$\begin{aligned}
\int_Q (M_0\overline{u})^2\,dx\,dt &+ \int_Q \left(D_t^{2m+1}\overline{u}\right)^2\,dx\,dt + \\
&+ (-1)^{m+1}\int_\Omega a^{ij}(x,T)D_t^m\overline{u}_{x_i}(x,T)D_t^m\overline{u}_{x_j}(x,T)\,dx + \\
&+ (-1)^{m+1}\int_Q [d^{2m}a^{ij} - 2(m+1)a_t^{ij}]D_t^m\overline{u}_{x_i}D_t^m\overline{u}_{x_j}\,dx\,dt + \\
&+ \frac{(-1)^m\mu}{2}\int_\Omega \left[D_t^m\overline{u}(x,T)\right]^2\,dx - \mu\int_Q a^{ij}\overline{u}_{x_i}\overline{u}_{x_j}\,dx\,dt = \\
&= 2(-1)^{m+1}\int_Q D_t^m\overline{u}_{x_i}\sum_{k=2}^m C_m^k D_t^{m-k+1}\overline{u}_{x_j}D_t^k(a^{ij})\,dx\,dt + \\
&+ 2(-1)^{m+1}\int_Q D_t^m\overline{u}_{x_i}\sum_{k=1}^m C_m^k D_t^{m-k}\overline{u}_{x_j}D_t^{k+1}(a^{ij})\,dx\,dt - \\
&- (-1)^{m+1}\int_Q D_t^m\overline{u}_{x_i}\sum_{k=1}^m C_m^k D_t^{m-k}\overline{u}_{x_j}D_t^k(d^{2m}a^{ij})\,dx\,dt -
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-(-1)^{m+1}\int_Q D_t^m\overline{u}D_t^m\left(d_{x_i}^{2m}a^{ij}\overline{u}_{x_j}\right)\,dx\,dt-\\
&-\sum_{k=1}^{2m}\int_Q d^kD_t^k\overline{u}D_t^{2m+1}\overline{u}\,dx\,dt-\sum_{k=1}^{2m-1}\int_Q d^kD_t^k\overline{u}M_0\overline{u}\,dx\,dt-\\
&-\int_Q a\overline{u}D_t^{2m+1}\overline{u}\,dx\,dt-\int_Q a\overline{u}M_0u\,dx\,dt-\lambda\int_Q\Phi D_t^{2m+1}\overline{u}\,dx\,dt-\\
&-\lambda\int_Q\Phi M_0\overline{u}\,dx\,dt+\int_Q gD_t^{2m+1}\overline{u}\,dx\,dt+\int_Q gM_0\overline{u}\,dx\,dt. \quad (9)
\end{aligned}
$$

Первые три интеграла правой части данного равенства оцениваются сверху с помощью неравенства Юнга и элементарных неравенств для суммы слагаемых величиной

$$
\delta_1\sum_{i=1}^n\int_Q\left(D_t^m\overline{u}_{x_i}\right)^2\,dx\,dt+N_1(\delta_1)\sum_{k=1}^m\sum_{i=1}^n\int_Q\left(D_t^{m-k}\overline{u}_{x_i}\right)^2\,dx\,dt
$$

с произвольным положительным числом δ_1 и числом $N_1(\delta_1)$, определяемым (помимо числа δ_1) функциями $a^{ij}(x,t)$ и $d^{2m}(x,t)$. Далее, интегралы с функцией $\Phi(x,t,u)$ оцениваются сверху суммой

$$
\frac{1}{2}\int_Q(M_0\overline{u})^2\,dx\,dt+\frac{1}{2}\int_Q\left(D_t^{2m+1}\overline{u}\right)^2\,dx\,dt+\int_Q\Phi^2\,dx\,dt.
$$

Наконец, оставшиеся слагаемые правой части равенства (9) оцениваются сверху с помощью неравенства Юнга и элементарных неравенств для суммы слагаемых величиной

$$
\begin{aligned}
&\delta_1\left[\int_Q(M_0\overline{u})^2\,dx\,dt+\int_Q\left(D_t^{2m+1}\overline{u}\right)^2\,dx\,dt+\sum_{i=1}^n\int_Q\left(D_t^m\overline{u}_{x_i}\right)^2\,dx\,dt\right]+\\
&+N_2(\delta_1)\left[\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{i=1}^n\int_Q\left(D_t^k\overline{u}_{x_i}\right)^2\,dx\,dt+\sum_{k=0}^{2m}\int_Q\left(D_t^k\overline{u}\right)^2\,dx\,dt+\int_Q g^2\,dx\,dt\right]
\end{aligned}
$$

с числом $N_2(\delta_1)$, определяемым, помимо числа δ_1, еще и функциями $a(x,t)$ и $d^k(x,t)$.

Используя приведенные выше оценки и условие VI, получаем неравенство

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{2}-\delta_1\right)\int_Q\left(M_0\overline{u}\right)^2\,dx\,dt+\left(\frac{1}{2}-\delta_1\right)\int_Q\left(D_t^{2m+1}\overline{u}\right)^2\,dx\,dt+\\
&+(k_1-2\delta_1)\sum_{i=1}^n\int_Q\left(D_t^m\overline{u}_{x_i}\right)^2\,dx\,dt+(-1)^{m+1}k_0\sum_{i=1}^n\int_Q\left[D_t^m\overline{u}_{x_i}(x,T)\right]^2\,dx+\\
&+\frac{(-1)^m\mu}{2}\int_\Omega\left[D_t^m\overline{u}(x,T)\right]^2\,dx-\mu\int_Q a^{ij}\overline{u}_{x_i}\overline{u}_{x_j}\,dx\,dt\le\\
&\le N_2(\delta_1)\sum_{i=1}^n\int_Q\left(D_t^m\overline{u}_{x_i}\right)^2\,dx\,dt+N_2(\delta_1)\sum_{k=1}^{2m}\int_Q\left(D_t^k\overline{u}\right)^2\,dx\,dt+\\
&+\int_Q\Phi^2\,dx\,dt+N_2(\delta_1)\int_Q g^2\,dx\,dt. \quad (10)
\end{aligned}
$$

Для функции $v(x,t)$ из пространства $\overset{\circ}{V}_1$ выполняются неравенства

$$
\int_Q(D_t^kv)^2\,dx\,dt\le\delta_2\int_Q\left(D_t^{2m+1}v\right)^2\,dx\,dt+N_3(\delta_2)\int_Q v^2\,dx\,dt,\quad k=1,\dots,2m, \quad (11)
$$

$$
\int_Q\left(D_t^kv_{x_i}\right)^2\,dx\,dt\le\delta_2\int_Q\left(D_t^mv_{x_i}\right)^2\,dx\,dt+N_4(\delta_2)\int_Q v_{x_i}^2\,dx\,dt,\quad k=1,\dots,m-1,\quad i=1,\dots,n, \quad (12)
$$

$$
\int_Q v^2\,dx\,dt\le(-1)^{m+1}N_5\int_Q a^{ij}v_{x_i}v_{x_j}\,dx\,dt \quad (13)
$$

с произвольным положительным числом δ_2, числами $N_3(\delta_2)$ и $N_4(\delta_2)$, определяемыми помимо числа δ_2 также числами T и N_5, определяемым областью Ω и числом k_0 (неравенства (12) и (13) очевидны, доказательство неравенств (11) для $m=1$ проведено, напр., в [20], для $m>1$ доказательство проводится аналогичным [20] способом). С помощью этих неравенств можно перейти от (10) к неравенству

$$\left(\frac{1}{2}-\delta_1\right)\int_Q (M_0\overline{u})^2\,dx\,dt+\left[\frac{1}{2}-\delta_1-N_2(\delta_1)\delta_2\right]\int_Q\left(D_t^{2m+1}\overline{u}\right)^2\,dx\,dt+$$
$$+\left[k_1-2\delta_1-N_2(\delta_1)\delta_2\right]\sum_{i=1}^n\int_Q\left(D_t^m\overline{u}_{x_i}\right)^2\,dx\,dt+$$
$$+(-1)^{m+1}k_0\sum_{i=1}^n\int_\Omega\left[D_t^m\overline{u}_{x_i}(x,T)\right]^2dx+\frac{(-1)^m\mu}{2}\int_\Omega\left[D_t^m\overline{u}(x,T)\right]^2\,dx-$$
$$-\int_Q\left[\mu+(-1)^m\left(N_5+N_2(\delta_1)N_3(\delta_2)+N_2(\delta_1)N_4(\delta_2)\right)\right]\times$$
$$\times\, a^{ij}\overline{u}_{x_i}\overline{u}_{x_j}\,dx\,dt\le\int_Q\Phi^2\,dx\,dt+N_2(\delta_1)\int_Q g^2\,dx\,dt. \quad (14)$$

Для функции $\Phi(x,t,u)$ имеют место очевидные неравенства

$$\int_Q\Phi^2\,dx\,dt\le 2\|A(x,t,M_0u)\|^2_{L_2(Q)}+$$
$$+2\|A(x,t,au)+A(x,t,Lu)-LA(x,t,u)-MA(x,t,u)\|^2_{L_2(Q)}\le$$
$$\le 2\|A(x,t,M_0u)\|^2_{L_2(Q)}+4\|A(x,t,Lu)-LA(x,t,u)\|^2_{L_2(Q)}+$$
$$+4\|A(x,t,au)-MA(x,t,u)\|^2_{L_2(Q)}.$$

Используя условие III, можем продолжить оценку функции $\Phi(x,t,u)$

$$\int_Q\Phi^2\,dx\,dt\le 2a_0\int_Q(M_0u)^2\,dx\,dt+N_6\sum_{k=0}^{2m}\int_Q\left(D_t^k u\right)^2\,dx\,dt; \quad (15)$$

число N_6 в этом неравенстве определяется коэффициентами оператора M и числами c_{jk} и a_0. Равенство $M_0u=M_0\overline{u}+M_0A(x,t,u)$, равенства (7), (8) и аналогичные следующие равенства вместе с условиями III и V дают неравенство

$$\int_Q\Phi^2\,dx\,dt\le 4a_0\int_Q\left(M_0\overline{u}\right)^2\,dx\,dt+N_7\sum_{k=0}^{2m}\int_Q\left(D_t^k\overline{u}\right)^2\,dx\,dt$$

с числом N_7, определяемым числами T, b_1 и N_6. Наконец, вновь согласно (11)–(13) приходим к оценке

$$\int_Q\Phi^2\,dx\,dt\le 4a_0\int_Q\left(M_0\overline{u}\right)^2\,dx\,dt+\delta_2\int_Q\left(D_t^{2m+1}\overline{u}\right)^2\,dx\,dt+(-1)^{m+1}N_9(\delta_2)\int_Q a^{ij}\overline{u}_{x_i}\overline{u}_{x_j}\,dx\,dt \quad (16)$$

с числом N_9, определяемым числом δ_2 и числами N_7, N_8, T, k_0, а также областью Ω.

Суммируя (14) и (16), приходим к оценке

$$\left(\frac{1}{2}-\delta_1-4a_0\right)\int_Q\left(M_0\overline{u}\right)^2\,dx+\left[\frac{1}{2}-\delta_1-\delta_2-N_2(\delta_1)\delta_2\right]\int_Q\left(D_t^{2m+1}\overline{u}\right)^2\,dx\,dt+$$
$$+\left[k_1-2\delta_1-N_2(\delta_1)\delta_2\right]\sum_{i=1}^n\int_Q\left(D_t^m\overline{u}_{x_i}\right)^2\,dx\,dt+$$
$$+(-1)^{m+1}k_0\sum_{i=1}^n\int_\Omega\left[D_t^m\overline{u}_{x_i}(x,T)\right]^2\,dx+\frac{(-1)^m\mu}{2}\int_\Omega\left[D_t^m\overline{u}(x,T)\right]^2\,dx-$$

$$- \int_Q [\mu + (-1)^m (N_5 + N_2(\delta_1)N_4(\delta_2) + N_9(\delta_2))] \times$$
$$\times a^{ij}\overline{u}_{x_i}\overline{u}_{x_j}\,dx\,dt \le N_2(\delta_1)\int_Q g^2\,dx\,dt.$$

Согласно условию VII число $\frac{1}{2} - 4a_0$ положительно. Следовательно, можно подобрать число δ_1 и затем число δ_2 настолько малыми, что коэффициенты $\frac{1}{2} - \delta_1 - 4a_0$, $\frac{1}{2} - \delta_1 - \delta_2 - N_2(\delta_1)\delta_2$, $k_1 - 2\delta_1 - N_2(\delta_1)\delta_2$ станут положительными. Фиксируя числа δ_1 и δ_2 указанным образом, можем далее указать такое положительное число μ_2, что при выполнении неравенства $(-1)^m\mu > \mu_2$ последнее слагаемое оценится снизу величиной

$$(-1)^{m+1}\mu_3 \int_Q a^{ij}\overline{u}_{x_i}\overline{u}_{x_j}\,dx\,dt$$

с положительным числом μ_3. Учитывая данный выбор числа μ и в силу второго основного неравенства для эллиптических операторов ([20], с. 199), получим априорную оценку для функции $\overline{u}(x,t)$:

$$\|\overline{u}\|_{V_1} \le K_0\|g\|_{L_2(Q)} \tag{17}$$

с положительной постоянной K_0, определяемой лишь функциями $a^{ij}(x,t)$, $a(x,t)$, $d^k(x,t)$, числами μ, T, a_0, b_{jk}, c_{jk}, b_1, а также областью Ω. Очевидно, аналогичная оценка имеет место и для функции $u(x,t)$

$$\|u\|_{V_1} \le K_1\|g\|_{L_2(Q)} \tag{18}$$

с положительной постоянной K_1, определяемой теми же величинами, которыми определяется постоянная K_0.

Покажем, что из оценок (17) и (18) следует открытость и замкнутость множества Λ_μ (при выполнении неравенства $(-1)^m\mu > \mu_2$).

Для доказательства открытости множества Λ_μ достаточно показать, что при условии принадлежности числа λ_0 множеству Λ_μ число $\lambda = \lambda_0 + \widetilde{\lambda}$ при малой величине $|\widetilde{\lambda}|$ будет принадлежать ему же.

Итак, пусть λ_0 — элемент множества Λ, $v(x,t)$ — произвольная функция из пространства $\overset{\circ}{V}_1$. Рассмотрим краевую задачу: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения*

$$L_{A,\mu,\lambda_0}u = g(x,t) + \widetilde{\lambda}\Phi(x,t,v) \tag{19}$$

при выполнении условий (2), (3) *и* (6). Неравенство (16) и принадлежность функции $v(x,t)$ пространству $\overset{\circ}{V}_1$ означают, что правая часть в уравнении (19) принадлежит пространству $L_2(Q)$. Согласно определению множества Λ_μ краевая задача (19), (2), (3), (6) разрешима в пространстве $\overset{\circ}{V}_1$. Следовательно, эта краевая задача порождает оператор G, переводящий пространство $\overset{\circ}{V}_1$ в себя: $G(v) = u$. Оценки (17) и (18), а также неравенство (16) дают для любых двух функций v_1 и v_2 из пространства $\overset{\circ}{V}_1$ неравенство

$$\|u_1 - u_2\|_{V_1} + \|\overline{u}_1 - \overline{u}_2\|_{V_1} \le K_2|\widetilde{\lambda}|\,(\|v_1 - v_2\|_{V_1} + \|\overline{v}_1 - \overline{v}_2\|_{V_1})$$

с постоянной K_2, определяемой лишь числами K_0, K_1, T, a_0, c_{jk} и функциями $a^{ij}(x,t)$ и $a(x,t)$. Если теперь число $\widetilde{\lambda}$ возьмем настолько малым, чтобы выполнялось неравенство $K_2|\widetilde{\lambda}| < 1$, то оператор G будет сжимающим. Неподвижная точка этого оператора даст функцию $u(x,t)$, являющуюся решением из пространства $\overset{\circ}{V}_1$ краевой задачи (5_λ), (2), (3), (6), $\lambda = \lambda_0 + \widetilde{\lambda}$. Это означает, что число λ принадлежит множеству Λ_μ и далее, что множество Λ_μ открыто.

Докажем, что множество Λ_μ замкнуто. Пусть λ_l — последовательность чисел из множества Λ_μ, сходящаяся к числу λ_0, $u_l(x,t)$ — последовательность решений краевых задач (5_{λ_l}), (2), (3), (6). Положим $w_{lk}(x,t) = u_l(x,t) - u_k(x,t)$. Для функций $w_{lk}(x,t)$ выполняются условия (2), (3), (6), а также равенство

$$L\overline{w}_{lk} + \lambda_l \Phi(x,t,w_{lk}) = (\lambda_l - \lambda_k)\Phi(x,t,u_k).$$

Оценки (17) и (18), а также неравенство (16) означают, что для функций $w_{lk}(x,t)$ имеет место оценка

$$\|w_{lk}\|_{V_1} + \|\overline{w}_{lk}\|_{V_1} \leq |\lambda_l - \lambda_k| K_0' \|u_k\|_{V_1}$$

с постоянной K_0', определяемой числами K_0 и K_1, а также функцией Φ. Поскольку последний множитель в этой оценке ограничен (вследствие оценки (18)) и поскольку числовая последовательность λ_l фундаментальна, то функциональные последовательности $u_l(x,t)$ и $\overline{u}_l(x,t)$ фундаментальны в пространстве V_1. Следовательно, существуют функции $u(x,t)$ и $w(x,t)$ такие, что $u_l(x,t) \to u(x,t)$, $\overline{u}_l(x,t) \to w(x,t)$ по норме пространства V_1. Из этих сходимостей, неравенства (15) и условия III вытекают следующие сходимости при $l \to \infty$: $L_\mu \overline{u}_l \to L_\mu w$, $\Phi(x,t,u_l) \to \Phi(x,t,u)$, $A(x,t,u_l) \to A(x,t,u)$, сильные в пространстве $L_2(Q)$. Последняя сходимость означает, что функции $u(x,t)$ и $w(x,t)$ связаны равенством $w(x,t) = \overline{u}(x,t)$. Из этого равенства, первых двух сходимостей, а также сходимости числовой последовательности λ_l к числу λ_0 следует, что для функции $u(x,t)$ выполняется уравнение (5_{λ_0}). Выполнение условий (2), (3) и (6) для функций $u(x,t)$ очевидна. Но тогда число λ_0 принадлежит множеству Λ_μ. Принадлежность предельной точки множества ему же и означает его замкнутость.

Итак, при выполнении неравенства $(-1)^m\mu > \mu_1$ множество Λ_μ непусто, при выполнении неравенства $(-1)^m\mu > \mu_2$ множество Λ_μ открыто и замкнуто. Но тогда при выполнении неравенства $(-1)^m\mu > \mu_0 = \max(\mu_1,\mu_2)$ множество Λ_μ одновременно непусто, открыто и замкнуто. Как уже говорилось выше, непустота, открытость и замкнутость множества Λ_μ означают, что для указанных чисел μ краевая задача (5), (2), (3), (6) разрешима в классе W.

Покажем теперь, что с помощью решения вспомогательной краевой задачи (5), (2), (3), (6) можно найти решение исходной краевой задачи (1)–(4). Выберем функцию $g(x,t)$ специальным образом: $g(x,t) = \overline{f}(x,t)$. Поскольку при условии принадлежности функции $f(x,t)$ пространству $L_2(Q)$ функция $\overline{f}(x,t)$ также принадлежит пространству $L_2(Q)$, то краевая задача (5), (2), (3), (6) с такой функцией $g(x,t)$ разрешима в пространстве V_1. Уравнение (5) можно записать в виде

$$B(L_\mu u - f) = 0.$$

Вследствие взаимной однозначности оператора B решение $u(x,t)$ уравнения (5) является решением уравнения (1). Выполнение условий (2), (3) и (4) для функции $u(x,t)$ очевидно.

Единственность решений очевидна — она вытекает, например, из неравенства (18).

Замечание 1. Величину μ_0 можно существенно уменьшить, если потребовать выполнения некоторых условий знакоопределенности — например, строгой положительности в цилиндре $\overline{Q}$ функции $(-1)^m a(x,t)$.

Замечание 2. Условие VI теоремы выполняется, если функция $(-1)^{m+1}d^{2m}(x,t)$ строго положительна в цилиндре $\overline{Q}$ и оценивается снизу достаточно большим положительным числом. Указанной положительности и оценки снизу можно добиться, преобразовав уравнение (1), положив $u(x,t) = v(x,t)\exp(\lambda t)$ и подобрав число λ (при этом, естественно, у оператора L_μ изменятся не только коэффициент при $D_t^{2m}u$, но и другие коэффициенты).

Замечание 3. Если потребовать дополнительно выполнения условий

$$\|A(x,t,v_{x_i})\|_{L_2(Q)} \leq a_{01}\|v\|_{L_2(Q)} + a_{02}\sum_{k=1}^{n} \|v_{x_k}\|_{L_2(Q)},$$

$$\|A(x,t,v_{x_ix_j})\|_{L_2(Q)} \le a_{03}\|v\|_{L_2(Q)} + a_{04}\sum_{k=1}^{n}\|v_{x_k}\|_{L_2(Q)} +$$
$$+ a_{05}\sum_{k,l=1}^{n}\|v_{x_kx_l}\|_{L_2(Q)}, \quad i,j=1,\ldots,n, \quad v(x,t)\in V_1,$$

то условие VII можно заменить условием на число a_{05}.

Замечание 4. Примерами операторов A, для которых будут выполняться условия III–V и VII, являются интегральные операторы

$$A(x,t,v) = \int_\Omega K(x,y,t)v(y,t)\,dy,$$
$$A(x,t,v) = \int_\Omega\int_0^T K(x,y,t,\tau)v(y,\tau)\,d\tau\,dy,$$

при этом выполнение требуемых условий означает выполнение некоторых условий гладкости и малости для функций $K(x,y,t)$ и $K(x,y,t,\tau)$. Если дополнительно функция $K(x,y,t)$ будет обращаться в нуль при $y\in\partial\Omega$, то условия замечания 3 будут выполняться при $a_{05}=0$ и тем самым условие VII будет выполняться автоматически.

Литература

1. Дубинский Ю.А. *Квазилинейные эллиптико-параболические уравнения* // Матем. сб. – 1968. – Т. 77. – № 3. – С. 470–496.
2. Дубинский Ю.А. *Краевые задачи для эллиптико-параболических уравнений* // Изв. АН АрмССР. Матем. 1969. – Т. 4. – № 3. – С. 192–214.
3. Дубинский Ю.А. *Краевые задачи для некоторых классов дифференциально-операторных уравнений высокого порядка* // ДАН СССР. – 1971. – Т. 196. – № 1. – С. 32–34.
4. Дубинский Ю.А. *О некоторых дифференциально-операторных уравнениях произвольного порядка* // Матем. сб. – 1973. – Т. 90. – № 1. – С. 3–22.
5. Фикера Г. *К единой теории краевых задач для эллиптико-параболических уравнений второго порядка* // Матем. сб. переводов. – 1963. – Т. 7. – № 6. – С. 99–121.
6. Олейник О.А., Радкевич Е.В. *Уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой* // Итоги науки. Матем. анализ. – 1969. – М. ВИНИТИ, 1971. – С. 7–252.
7. Егоров И.Е. *Краевая задача для одного уравнения высокого порядка с меняющимся направлением времени* // ДАН СССР. – 1988. – Т. 303. – № 6. – С. 1301–1304.
8. Егоров И.Е. *Краевая задача для одного уравнения высокого порядка с меняющимся направлением времени* // Дифференц. уравнения и их приложения. – Якутск, 1989. – С. 30–39.
9. Егоров И.Е., Федоров В.Е. *Неклассические уравнения математической физики высокого порядка.* – Новосибирск: Вычислительный центр СО РАН. 1995. – С. 1–133.
10. L'vov A.P. *On solvability of a nonlocal boundary value problem for an equation with varying time direction* // Матем. заметки Якутск. гос. ун-та. – 2001. – Т. 8. – № 2. – С. 103–111.
11. Камынин Л.И. *Об одной краевой задаче теории теплопроводности с неклассическими граничными условиями* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1964. – Т. 4. – № 6. – С. 1006–1024.
12. Ионкин Н.И. *Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием* // Дифференц. уравнения. – 1977. – Т. 13. – № 2. – С. 294–304.
13. Муравей Л.А., Филиновский А.В. *Об одной нелокальной краевой задаче для параболического уравнения* // Матем. заметки. – 1993. – Т. 54. – № 4. – С. 98–116.
14. Bouziani A., Benouar N.-E. *Problème mixte avec conditions intégrales pour une classe d'èquations paraboliques* // C. R. Acad. Sci. Paris. – 1995. – V. 321. – Ser. I. – P. 1177–1182.
15. Иванчов Н.И. *Краевые задачи для параболического уравнения с интегральными условиями* // Дифференц. уравнения. – 2004. – Т. 40. – № 4. – С. 547–564.

16. Bouziani A., Benouar N.-E. *Mixed problem with integral conditions for a third order parabolic equation* // Kobe J. of Math. – 1998. – V. 15. – № 1. – P. 47–58.
17. Latrous C. *Mixed problem with integral boundary conditions for a third order partial differential equation* // Международн. конф. по аналитич. методам в дифференц. уравнениях. Тезисы докл. – Минск: Ин-т матем. АН Беларуси. – 2003. – С. 109–110.
18. Friedman A. *Monotonic decay of solutions of parabolic equations with nonlocal boundary conditions* // Quat. of Appl. Math. – 1986. – V. XLIV. – № 3. – P. 401–407.
19. Кожанов А.И. *О разрешимости краевой задачи с нелокальным граничным условием для линейных параболических уравнений* // Вестн. Самарск. гос. техн. ун-та. – 2004. – Вып. 30. – С. 63–69.
20. Кожанов А.И. *О разрешимости некоторых нелинейных обратных задач для одного уравнения с кратными характеристиками* // Вестник НГУ. – Сер. матем., мех., информат. – 2003. – Т. 3. – Вып. 3. – С. 34–51.
21. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа.* – М.: Наука, 1973. – 576 с.

Уфимский государственный
авиационный технический университет

Институт математики Сибирского
отделения Российской академии наук

Поступила
09.02.2005