

*Ю.А. АМИНОВ, Я. ЧЕШЛИНСКИЙ***ИЗОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОГРУЖЕНИЯ ОБЛАСТЕЙ ПРОСТРАНСТВА
ЛОБАЧЕВСКОГО В СФЕРЫ И ЕВКЛИДОВЫ ПРОСТРАНСТВА И
ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ СПЕКТРАЛЬНОГО
ПАРАМЕТРА****1. Введение**

В теории солитонных уравнений (или вполне интегрируемых нелинейных систем) [1] важную роль играет спектральный параметр. Если в основе интегрируемой системы лежит геометрия (напр., как в случае уравнения “синуса-Гордона” $\varphi_{,xy} = \sin \varphi$, которое описывает псевдосферические погружения), то можно ожидать, что спектральный параметр может быть интерпретирован геометрически. Действительно, было обнаружено, что в некоторых случаях геометрическое преобразование Бэклунда зависит от спектрального параметра (напр., [2]).

Напомним две идеи, важные в этом контексте. Во-первых, использование спектрального параметра дает естественную конструкцию локального погружения с помощью так называемой формулы Сыма–Тайфеля (Sym–Tafel) [3]–[5]. Например, начиная со спектральной задачи для уравнения “синус-Гордона”, приходим к псевдосферическим поверхностям [5], [2]. Преобразования Бианки–Бэклунда восстанавливаются автоматически.

Во-вторых, Долива и Сантини, рассматривая эволюцию кривых на сфере S^n , получили линейные задачи для ассоциированных нелинейных уравнений. Они обнаружили, что радиус объемлющей сферы связан со спектральным параметром [6], [7]. В предельном случае (бесконечный радиус) $S^n \rightarrow E^n$ они вывели формулу Сыма–Тайфеля для эволюции кривых. Естественно предположить, что спектральный параметр связан с радиусом объемлющей сферы и в более общей ситуации.

В данной статье представляется полное обсуждение обеих задач в случае интегрируемых систем, ассоциированных с погружениями пространства Лобачевского в евклидовы пространства [8]–[11]. В разделах 3, 4 показывается, что система уравнений Гаусса и Вейнгартена для погружения n -мерного пространства Лобачевского в сферу S^{2n-1} радиуса R может быть интерпретирована как спектральная задача для погружения n -мерного пространства Лобачевского в евклидово пространство E^{2n-1} . Спектральный параметр λ есть функция радиуса R . Полученная спектральная задача эквивалентна линейной задаче, ранее рассмотренной в [12] и [13]. Используя алгебру Клиффорда $\mathcal{C}(2n)$ и группу $\text{Spin}(2n)$, выводим формулу Сыма–Тайфеля в предельном случае $R \rightarrow \infty$ (см. раздел 5). Этот результат был ранее сообщен (без полного доказательства) в [14].

В разделе 6 обсуждается некоторый специальный класс подмногообразий с постоянной отрицательной кривизной, погруженных в сферу S^{2n-1} . Этот класс является обобщением тора

Исследования первого автора частично поддержаны Государственным фондом фундаментальных исследований Украины (проект № 01.07/00132). Исследования второго автора частично поддержаны польским комитетом по научным исследованиям, грант KBN № 2 P03B 126 22.

Клиффорда. Случай $n = 2$ оказывается выделенным. Для $n \neq 2$ получаются только подмногообразия, порождаемые кривой, подобной трактрисе (см. рис. 1а)). Для $n = 2$ имеется три класса подмногообразий, включающие компактные поверхности (хотя и с особенностями).

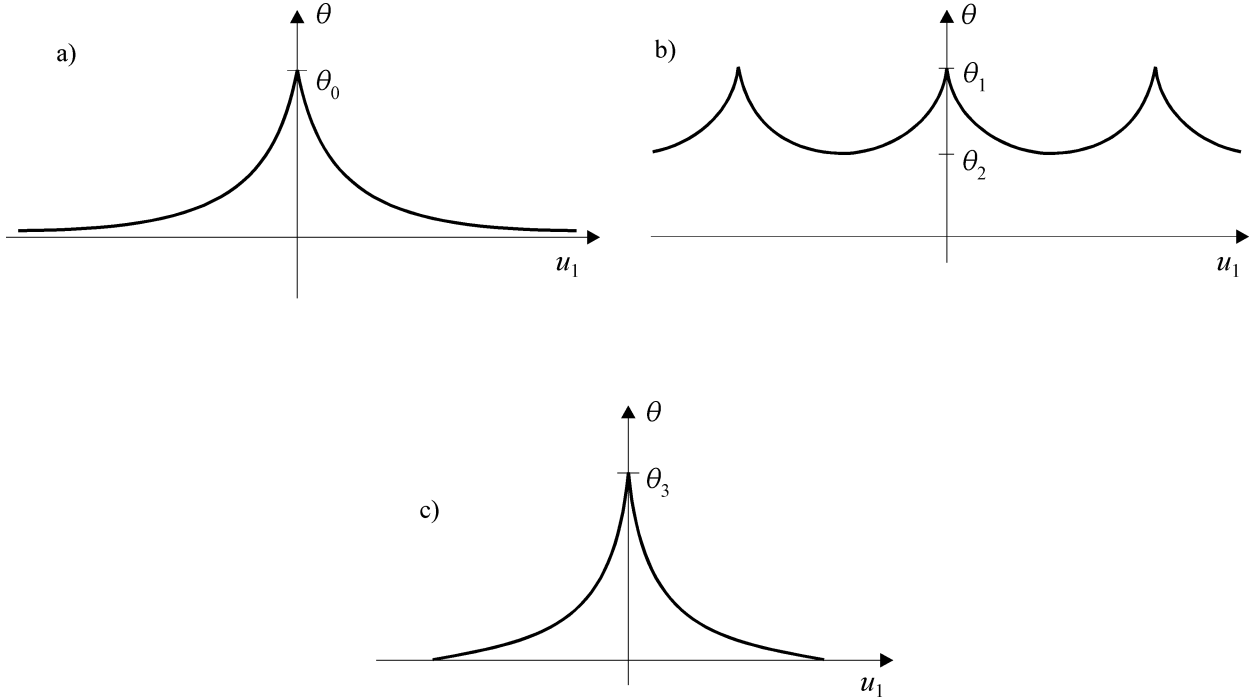


Рис. 1

2. Предварительные замечания

Рассмотрим изометрические погружения областей L^n (т. е. n -мерного пространства постоянной отрицательной кривизны) в сферу S^{2n-1} с радиусом R . Пусть $r = r(u^1, \dots, u^n)$ — радиус-вектор погружения, которое рассматривается как подмногообразие (возможно с особенностями) в E^{2n} , где u^1, \dots, u^n — координаты кривизны. Пусть $\nu_1, \dots, \nu_{n-1}, \nu_n$ — ортонормированный базис нормалей к этому подмногообразию. Будем предполагать, что один нормальный вектор параллелен радиус-вектору объемлющей сферы, т. е. $\nu_n \equiv r/R$. В этом случае уравнения Гаусса–Вейнгартена запишутся следующим образом:

$$r_{,ij} = \Gamma_{ij}^k r_{,k} + L_{ij}^\alpha \nu_\alpha; \quad \nu_{\alpha,i} = -L_{ij}^\alpha g^{jk} r_{,k} + \mu_{\beta\alpha|i} \nu_\beta,$$

где запятая означает частную производную ($r_{,i} := \partial r / \partial u^i$ и т.д.), Γ_{ij}^k — символы Кристоффеля, L_{ij}^k ($k = 1, \dots, n$) — коэффициенты вторых квадратичных форм и $\mu_{\beta\alpha|i}$ — коэффициенты кручения. По повторяющимся индексам предполагается суммирование. Можно показать, что в нашем случае нормальный пучок является плоским, т. е. существуют нормальные векторные поля ν_1, \dots, ν_n такие, что коэффициенты кручения тождественно равны нулю [15].

В разделе 5 используем клиффордову алгебру $\mathcal{C}(2n)$ и группу $\text{Spin}(2n)$ для описания вращений в E^{2n} . Клиффордова алгебра $\mathcal{C}(m)$ содержит единицу 1 и порождается элементами $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m$, которые удовлетворяют соотношениям

$$\mathbf{e}_j \mathbf{e}_k = -\mathbf{e}_k \mathbf{e}_j \quad (j \neq k), \quad \mathbf{e}_j^2 = 1 \quad (j = 1, \dots, m).$$

Поэтому каждое число Клиффорда (некоторый элемент \mathbf{v} из $\mathcal{C}(m)$) может быть представлено в виде

$$\mathbf{v} = v^0 + v^i \mathbf{e}_i + v^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j + \dots + v^{i_1 i_2 \dots i_k} \mathbf{e}_{i_1} \mathbf{e}_{i_2} \dots \mathbf{e}_{i_k} + \dots + v^{12 \dots m} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \dots \mathbf{e}_m,$$

где $i < j$, $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ и т.д., и $v^0, v^i, \dots, v^{12 \dots m}$ — вещественные коэффициенты.

Обозначим линейное пространство, порожаемое элементами $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m$, через V . Определяя скалярное произведение в V формулой $(v, w) = (vw + wv)/2$, отождествляем V с евклидовым пространством E^m . Элементы $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m$ образуют ортонормированный базис пространства $V \simeq E^m$.

Ортогональные преобразования в E^m могут быть описаны в терминах чисел Клиффорда. Действительно, пусть ν — единичный вектор (нормаль к некоторой гиперплоскости π) и w — произвольный элемент из V . Легко проверить, что элемент $w' := -\nu w \nu^{-1}$ также принадлежит V и, более того, w' есть отражение элемента w относительно гиперплоскости π (ортогональной к ν).

Как известно, любое ортогональное преобразование в E^m есть композиция конечного числа отражений относительно гиперплоскостей. Поэтому любое ортогональное преобразование в E^m может быть представлено в виде $\tilde{w} = (-1)^K g_K w g_K^{-1}$, где g_K — произведение K единичных векторов. Заметим, что g_K и $-g_K$ описывают одно и то же преобразование.

Элементы алгебры Клиффорда $\mathcal{C}(m)$, которые могут быть разложены в произведение единичных векторов, образуют мультипликативную группу по отношению к умножению Клиффорда. Эта группа известна как $\text{Pin}(m)$. Элементы алгебры $\mathcal{C}(m)$, представляющиеся в виде произведения четного числа единичных векторов, образуют группу $\text{Spin}(m)$. Ортогональные преобразования, соответствующие элементам $\text{Spin}(m)$, сохраняют ориентацию. Группа $\text{Pin}(m)$ есть двойное накрытие группы $O(m)$, в то время как $\text{Spin}(m)$ есть двойное накрытие группы $SO(m)$. Поэтому любая кривая $\gamma \subset O(n)$ может быть поднята на $\text{Pin}(m)$ (двумя способами). Обозначим одну из этих поднятых кривых через $S(\gamma)$:

$$O(n) \supset \gamma(t) \mapsto S(\gamma(t)) \in \text{Pin}(n).$$

То же касается других подмногообразий в $O(n)$. Более подробную информацию, относящуюся к алгебрам Клиффорда, можно найти, например, в [16], [17].

3. Локальные погружения L^2 в S^3

Начнем с простейшего случая. Рассмотрим поверхность $F^2 \subset S^3 \subset E^4$, которая локально изометрична L^2 . Пусть u^1, u^2 — координаты кривизны на $F^2 \subset S^3$. Нормальное пространство подмногообразия $F^2 \subset E^4$ имеет размерность 2. Выберем одну нормаль, например, ν_1 , касательную к сфере S^3 , и вторую нормаль в виде $\nu_2 = r/R$. Коэффициенты кручения $\mu_{12|i}$, $i = 1, 2$, обращаются в нуль. Действительно, $\mu_{12|i} = (\nu_1 \nu_{2,i}) = R^{-1}(\nu_1 r_{,i}) = 0$. Так как главные направления ортогональны друг другу, можно ввести такие ортогональные координаты, что $ds^2 = g_{11} du_1^2 + g_{22} du_2^2$, $\text{II}^1 = L_{11}^1 du_1^2 + L_{22}^1 du_2^2$. Из уравнений Гаусса для поверхности $F^2 \subset S^3$ ($K_i = K_e + K_{S^3}$) имеем $-1 = \frac{L_{11}^1 L_{22}^1}{g_{11} g_{22}} + \frac{1}{R^2}$. Обозначим

$$a^2 := 1 + 1/R^2, \quad (1)$$

тогда, очевидно, $\frac{L_{11}^1 L_{22}^1}{g_{11} g_{22}} = -a^2$. Поэтому можно ввести такую функцию ω , что $\frac{L_{11}^1}{g_{11}} = \text{tg } \omega$, $\frac{L_{22}^1}{g_{22}} = -\text{ctg } \omega$. Хорошо известно, что на любой поверхности постоянной гауссовой кривизны $K = -1$ существуют координаты, в которых метрика может быть записана в виде $ds^2 = \cos^2 \omega du^2 + \sin^2 \omega dv^2$. Тогда $L_{11}^1 = a \sin \omega \cos \omega$, $L_{22}^1 = -a \sin \omega \cos \omega$. Коэффициенты второй квадратичной формы по отношению ко второй нормали (ортогональной к сфере S^3) легко вычисляются:

$$L_{11}^2 = (r_{,uu} \nu_2) = R^{-1}(r_{,uu} r) = -\frac{r_{,uu}^2}{R} = -\frac{\cos^2 \omega}{R}, \quad L_{22}^2 = -\frac{r_{,vv}^2}{R} = -\frac{\sin^2 \omega}{R}.$$

Пусть τ_1, τ_2 — единичные векторы, касательные к координатным линиям

$$\tau_1 := \frac{r_{,u}}{\sqrt{g_{11}}}, \quad \tau_2 := \frac{r_{,v}}{\sqrt{g_{22}}}.$$

Используя уравнения Гаусса $r_{,ij} = \Gamma_{ij}^k r_{,k} + L_{ij}^\alpha \nu_\alpha$, получим

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tau_1}{\partial u} &= \frac{\partial \omega}{\partial v} \tau_2 + a \nu_1 \sin \omega - \frac{\cos \omega}{R} \nu_2, \\
\frac{\partial \tau_1}{\partial v} &= \frac{\partial \omega}{\partial u} \tau_2, \quad \frac{\partial \tau_2}{\partial u} = -\frac{\partial \omega}{\partial v} \tau_1, \\
\frac{\partial \tau_2}{\partial v} &= -\frac{\partial \omega}{\partial u} \tau_1 - a \nu_1 \cos \omega - \frac{\sin \omega}{R} \nu_2.
\end{aligned} \tag{2}$$

Базис ν_1, ν_2 переносится параллельно в нормальном пучке (т. е. $\mu_{\alpha\beta|i} = 0$). Используя уравнения Вейнгартена, находим

$$\begin{aligned}
\nu_{1,u} &= -a \tau_1 \sin \omega, \quad \nu_{1,v} = -a \tau_2 \cos \omega, \\
\nu_{2,u} &= -R^{-1} \cos \omega \tau_1, \quad \nu_{2,v} = -R^{-1} \sin \omega \tau_2.
\end{aligned} \tag{3}$$

Уравнения (2) и (3) могут быть переписаны в матричной форме

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial u} \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & \omega_{,v} & a \sin \omega & -R^{-1} \cos \omega \\ -\omega_{,v} & 0 & 0 & 0 \\ -a \sin \omega & 0 & 0 & 0 \\ R^{-1} \cos \omega & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix}, \\
\frac{\partial}{\partial v} \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & \omega_{,u} & 0 & 0 \\ -\omega_{,u} & 0 & -a \cos \omega & -R^{-1} \sin \omega \\ 0 & a \cos \omega & 0 & 0 \\ 0 & R^{-1} \sin \omega & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{4}$$

Система уравнений Гаусса–Кодацци (совпадающая с условиями совместности вышеуказанной системы матричных линейных уравнений) эквивалентна одному уравнению $\omega_{,uu} - \omega_{,vv} = \sin \omega \cos \omega$, которое хорошо известно в теории интегрируемых систем как уравнение “синус-Гордона”. Напомним, что уравнения Кодацци уже разрешены и их следствием является специальная форма метрики.

Важным обстоятельством является то, что условия совместности не зависят от R . Поэтому имеем линейные уравнения, параметризованные R (второй параметр a зависит от R , см. (1)). Такая ситуация типична для интегрируемых систем. Линейная система, содержащая свободный параметр (“спектральный параметр”), рассматривается как линейная задача (или пара Лакса). Присутствие параметра важно для приложения различных методов теории солитонов, в частности, преобразований Дарбу–Бэклунда.

Удобно выразить R и a в форме рациональных функций другого параметра λ :

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\lambda} - \lambda \right), \quad a = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\lambda} + \lambda \right). \tag{5}$$

Если $a > 0$ и $R > 0$, то $0 < \lambda < 1$. Допуская отрицательные значения R и a , можем распространить формулу (5) на все действительные значения λ . Случай $\lambda = 1$ соответствует $R = \infty$ (евклидово пространство E^3), а для $\lambda \rightarrow 0$ имеем $R \rightarrow 0$ (единственная точка). Рассмотрим эту проблему более подробно в разделе 5.

Пара Лакса (4), рациональная относительно λ , является специальным случаем линейных задач, рассматриваемых в работах [12], [13], [18] (более подробно в следующем разделе).

4. Локальные погружения L^n в S^{2n-1}

Рассмотрим общий случай погружения $L^n \rightarrow S^{2n-1} \subset E^{2n}$. По аналогии со случаем погружения L^n в евклидово пространство [8], [15] можно доказать, что существует n таких главных направлений с ассоциированными координатами u^1, \dots, u^n , что метрика записывается в виде $ds^2 = \sum_{i=1}^n H_i^2 (du^i)^2$, где H_1, \dots, H_n — функции, удовлетворяющие условию $H_1^2 + \dots + H_n^2 = 1$.

Более того, существует такой базис в нормальном пространстве, что соответствующие коэффициенты кручения равны нулю. Нормаль $\nu_n = r/R$ принадлежит этому базису. Действительно, $\mu_{\alpha n|i} = (\nu_\alpha \nu_{n,i}) = R^{-1}(\nu_\alpha r_{,i}) = 0$. В дальнейшем будем предполагать, что ν_1, \dots, ν_n есть такой базис. Соответствующие квадратичные формы II^α имеют диагональные матрицы: $II^\alpha = \sum_{i=1}^n L_{ii}^\alpha (du^i)^2$. Уравнения Кодацци $L_{ij;k}^p - L_{ik;j}^p = 0$ (точка с запятой означает ковариантную производную) приобретают вид

$$\frac{\partial}{\partial u^k} \sum_{p=1}^{n-1} (L_{ii}^p)^2 - \frac{1}{g_{ii}} \frac{\partial g_{ii}}{\partial u^k} \sum_{p=1}^{n-1} (L_{ii}^p)^2 - g^{kk} \frac{\partial g_{ii}}{\partial u^k} \sum_{p=1}^{n-1} L_{kk}^p L_{ii}^p = 0. \quad (6)$$

Запишем уравнения Гаусса $R_{kiki} = \sum_{p=1}^{n-1} L_{kk}^p L_{ii}^p + \frac{1}{R^2} g_{kk} g_{ii}$. По предположению пространство L^n имеет кривизну $K = -1$, откуда следует $R_{kiki} = -g_{kk} g_{ii}$. Итак,

$$\sum_{p=1}^{n-1} \frac{L_{kk}^p L_{ii}^p}{g_{kk} g_{ii}} = -1 - \frac{1}{R^2}. \quad (7)$$

Используем те же обозначения, что и в специальном случае $n = 2$, т. е.

$$a = \sqrt{1 + 1/R^2}. \quad (8)$$

Уравнения Кодацци (6) можно переписать в виде

$$\frac{\partial}{\partial u^k} \sum_{p=1}^{n-1} (L_{ii}^p)^2 - \frac{1}{g_{ii}} \frac{\partial g_{ii}}{\partial u^k} \sum_{p=1}^{n-1} (L_{ii}^p)^2 + a^2 g_{ii} \frac{\partial g_{ii}}{\partial u^k} = 0.$$

Обозначение $\text{ctg } \sigma_i := \sqrt{\sum_{p=1}^{n-1} (L_{ii}^p)^2} / (a g_{ii})$ приводит к упрощению записи уравнений Кодацци $\frac{\partial}{\partial u^k} (\log g_{ii} - \log \sin^2 \sigma_i) = 0$. Выбирая подходящую параметризацию на каждой координатной линии, получим $g_{ii} = \sin^2 \sigma_i$. Поэтому $\sum_{p=1}^{n-1} (L_{ii}^p)^2 = a^2 \sin^2 \sigma_i \cos^2 \sigma_i$, и L_{ii}^p можно переписать следующим образом: $L_{ii}^p = a \sin \sigma_i \cos \sigma_i \cos \varphi_i^p$, где

$$\sum_{p=1}^{n-1} \cos^2 \varphi_i^p = 1. \quad (9)$$

В этих обозначениях уравнения (7) записываются в виде

$$\sum_{p=1}^{n-1} \cos \varphi_i^p \cos \varphi_k^p = -\text{tg } \sigma_i \text{tg } \sigma_k. \quad (10)$$

В полной аналогии со случаем L^n в E^{2n-1} [8] рассматривается матрица

$$A := \begin{pmatrix} \sin \sigma_1 & \sin \sigma_2 & \cdots & \sin \sigma_n \\ \phi_1^1 & \phi_2^1 & \cdots & \phi_n^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi_1^{n-1} & \phi_2^{n-1} & \cdots & \phi_n^{n-1} \end{pmatrix},$$

где $\phi_j^k := \cos \varphi_j^k \cos \sigma_j$. Теперь уравнения (9) и (10) могут быть интерпретированы как условия ортогональности матрицы A : $A^\top A = I$. Отсюда $\sum_{i=1}^n \sin^2 \sigma_i = 1$. Введем обозначения $H_i := \sin \sigma_i$,

$\tau_i := \frac{r_{,i}}{\sqrt{g_{ii}}}$, $\beta_{ij} := \frac{1}{H_i} \frac{\partial H_i}{\partial u^i}$ ($i \neq j$). Тогда уравнения Гаусса–Вейнгартена (2), (3) примут вид

$$\tau_{i,i} = - \sum_{k=1}^n \beta_{ki} \tau_k + a \cos \sigma_i \sum_{p=1}^{n-1} \cos \varphi_i^p \nu_p - \frac{\sigma_i}{R} \nu_n, \quad \tau_{i,j} = \beta_{ij} \tau_j \quad (i \neq j),$$

$$\nu_{\alpha,i} = -a \cos \sigma_i \cos \varphi_i^\alpha \tau_i, \quad \nu_{n,i} = \frac{\sin \sigma_i}{R} \tau_i,$$

или в матричной форме

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u^i} = \Omega_i \Phi, \quad (11)$$

$$\Omega_i := \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \beta_{1i} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ -\beta_{1i} & \cdots & 0 & \cdots & -\beta_{ni} & a\phi_i^1 & \cdots & a\phi_i^{n-1} & -R^{-1} \sin \sigma_i \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \beta_{ni} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & -a\phi_i^1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & -a\phi_i^{n-1} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & R^{-1} \sin \sigma_i & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\Phi := (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n, \nu_1, \dots, \nu_n)^\top$ (через \top обозначена транспозиция) и кососимметрические матрицы Ω_i могут иметь ненулевые коэффициенты только на i -й строке и в i -м столбце. Принимая во внимание равенство (8) и параметризацию (5) в матрицах Ω_i , получим линейную (спектральную) задачу, которая с точностью до изменения базиса эквивалентна линейной задаче, рассматриваемой в [12] (см. также [18], [13]):

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_j} = \frac{\lambda}{2} A_j \psi + \frac{1}{2\lambda} B_j \psi + C_j \psi$$

(надо обратить внимание на ошибку в формуле (1.17b) в [12]), где

$$A_j = \begin{pmatrix} 0 & a_j \\ a_j^\top & 0 \end{pmatrix}, \quad B_j = \begin{pmatrix} 0 & \delta a_j \\ a_j^\top \delta & 0 \end{pmatrix}, \quad C_j = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \gamma_j \end{pmatrix},$$

a_j — матрица размера $n \times n$, все элементы которой равны нулю, за исключением j -го столбца, имеющего вид a_{1j}, \dots, a_{nj} , $\delta = \text{diag}(1, -1, \dots, -1)$, а γ_j — кососимметрическая матрица размера $n \times n$, все элементы которой равны нулю, за исключением j -го столбца, имеющего вид $(\beta_{1j}, \dots, \beta_{nj})^\top$, и j -й строки, имеющей вид $(-\beta_{1j}, \dots, -\beta_{nj})$. Функции ψ принимают значения в R^{2n} . Чтобы сравнить эту спектральную задачу со спектральной задачей (11), надо приравнять $a_{1k} = \sin \sigma_k$, $a_{jk} = \phi_{j-1}^k$, где $j = 2, \dots, n$ и $k = 1, \dots, n$. Система уравнений Гаусса–Кодацци–Риччи, известная в этом случае как система, обобщающая уравнение “синус-Гордона” или систему “LE” ([12], [14], [19], [20]), не зависит от R . Таким образом, доказана

Теорема 1. Система уравнений Гаусса–Вейнгартена для локальных погружений пространства Лобачевского L^n в сферу S^{2n-1} радиуса R тождественна линейной задаче (со спектральным параметром), связанной с локальными погружениями L^n в E^{2n-1} . Спектральный параметр λ может быть выражен через R , а именно

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\lambda} - \lambda \right).$$

Мы вывели рациональное соотношение между R и λ для $\lambda \in (0, 1)$ (сравните с окончанием раздела 3). Однако условия совместности в точности те же самые для любого λ . Рассмотрим в деталях эту проблему в следующем разделе.

5. Геометрический вывод формулы Сыма–Тайфеля

Хорошо известно, что изометрические погружения областей пространства Лобачевского L^2 в E^3 могут быть в точности описаны так называемой формулой Сыма–Тайфеля

$$F = \Psi^{-1}\Psi_{,\zeta} , \quad (12)$$

где $\Psi = \Psi(u^1, u^2, \zeta)$ есть $SU(2)$ -значное решение линейной системы

$$\Psi_{,1} = \begin{pmatrix} i\zeta & -\frac{1}{2}\varphi_{,1} \\ \frac{1}{2}\varphi_{,1} & -i\zeta \end{pmatrix} \Psi , \quad \Psi_{,2} = \frac{1}{4i\zeta} \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix} \Psi , \quad (13)$$

а ζ — спектральный параметр. Эта линейная система известна как пара Лакса для уравнения “синус-Гордона” $\varphi_{,12} = \sin \varphi$ и имеет ненулевые решения тогда и только тогда, когда φ удовлетворяет уравнению “синус-Гордона”.

Теорема 2 ([2], [5]). *Если Ψ удовлетворяет системе (13), то $su(2)$ -значная функция $F = \Psi^{-1}\Psi_{,\zeta}$ определяет ζ -семейство псевдосферических погружений в E^3 . А именно, $F = \sum_{k=1}^3 \frac{1}{2i} \sigma_k f_k$ (где σ_k — матрицы Паули) и $f := (f_1, f_2, f_3) \in E^3$ есть радиус-вектор псевдосферической поверхности с гауссовой кривизной $K = -\zeta^2$. Более того, координаты u^1, u^2 являются асимптотическими.*

Подход Сыма недавно был применен к общему случаю изометрических погружений L^n в E^{2n-1} [18]. Ниже покажем, как вывести в этом случае аналог формулы (12) из чисто геометрических рассуждений. Решение Φ спектральной задачи (11) есть функция со значениями в матричной группе Ли $SO(2n)$ (при условии, что начальные условия принимают значения в этой группе). Действительно, из $(\det \Phi)_{,j} = \text{Tr} \Omega_j \det \Phi$ и $\text{Tr} \Omega_j = 0$ имеем $\det \Phi = \text{const}$. Строки матрицы Φ можно интерпретировать как ортогональный базис, ассоциированный с рассматриваемым λ -семейством погружений. Без ограничения общности можем выбрать начальные условия так, что в заданной точке $u_0 := (u_0^1, \dots, u_0^n)$ матрица Φ является единичной матрицей: $\Phi(u_0, \lambda) = I$. Тогда $\Phi = \Phi(u, \lambda)$ представляет поворот, переводящий канонический базис в u_0 в базис в u . Для того чтобы вывести формулу Сыма–Тайфеля, перепишем линейную задачу (11) в терминах чисел Клиффорда [18]. Достаточно отождествить образующие алгебры Ли $so(2n)$ с образующими алгебры Ли группы $\text{Spin}(2n)$, а именно, $f_{\mu\nu} \leftrightarrow 2^{-1}\mathbf{e}_\mu \mathbf{e}_\nu$, где $f_{\mu\nu}$ — кососимметрические $2n \times 2n$ матрицы с коэффициентами $f_{\mu\nu\alpha\beta} := \delta_{\mu\alpha}\delta_{\nu\beta} - \delta_{\mu\beta}\delta_{\nu\alpha}$ (другими словами, $f_{\mu\nu}$ имеют только два ненулевых элемента: 1 на пересечении μ -й строки и ν -го столбца и -1 на пересечении ν -й строки и μ -го столбца). Также заменим a и R на λ согласно формулам (5). Тогда спектральная задача (11) примет вид

$$\Psi_{,j} = U_j \Psi , \quad (14)$$

$$U_j := \frac{1}{2} \mathbf{e}_j \left(- \sum_{k=1}^n \beta_{kj} \mathbf{e}_k + \frac{\lambda^2 + 1}{2\lambda} \sum_{i=1}^{n-1} \phi_j^i \mathbf{e}_{n+i} + \frac{\lambda^2 - 1}{2\lambda} \sin \sigma_j \mathbf{e}_{2n} \right) ,$$

где Ψ — элемент $\text{Spin}(2n)$, который соответствует вращению, определенному $SO(2n)$ -значной функцией Φ . Используя обозначения, введенные в конце раздела 2, можем кратко записать $\Psi = S(\Phi)$.

Теорема 3 ([18]). *Формула Сыма–Тайфеля $r = \Psi^{-1}\Psi_{,\lambda}|_{\lambda=1}$, где Ψ удовлетворяет соотношениям (14), приводит к погружению пространства Лобачевского L^n в евклидово пространство размерности $2n - 1$, порождаемое элементами $\mathbf{e}_k \mathbf{e}_{2n}$ ($k = 1, 2, \dots, 2n - 1$).*

Доказательство теоремы 3 проводится непосредственно в [18]. Заметим, что в нашем случае формула Сыма–Тайфеля приводит к погружениям $L^n \subset E^{2n-1}$ только для $\lambda = 1$, а не для всего λ -семейства погружений, как в случае уравнения “синус-Гордона”.

Теперь представим геометрический вывод формулы Сыма–Тайфеля. Рассмотрим погружение L^n в E^{2n} . Напомним, что ассоциированный базис $(\tau_1, \dots, \tau_n, \nu_1, \dots, \nu_n)^T$ обозначается через Φ , E^{2n} отождествлено с пространством V , порождающим алгебру $\mathcal{C}(2n)$ (см. раздел 2), а вращение, задаваемое $SO(2n)$ -значной функцией Φ , представлено функцией $S(\Phi) = \Psi(u, \lambda) \in \text{Spin}(2n)$. Для заданного элемента $w \in E^{2n}$ будем обозначать через \hat{w} элемент из V , соответствующий w при естественном изоморфизме $V \simeq E^{2n}$. Базис $(\hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2, \dots, \hat{\tau}_n, \hat{\nu}_1, \dots, \hat{\nu}_{n-1}, \hat{r}/R)$ получается из канонического базиса $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{2n}$ следующим образом: $\hat{\tau}_1 = \Psi^{-1}\mathbf{e}_1\Psi, \dots, \hat{\tau}_n = \Psi^{-1}\mathbf{e}_n\Psi, \hat{\nu}_1 = \Psi^{-1}\mathbf{e}_{n+1}\Psi, \dots, \hat{r}/R = \Psi^{-1}\mathbf{e}_{2n}\Psi$. В дальнейшем используется только последнее уравнение, с помощью которого получается радиус-вектор рассматриваемого погружения $L^n \subset S^{2n-1}$:

$$\hat{r} = \frac{2\lambda}{1-\lambda^2}\Psi^{-1}\mathbf{e}_{2n}\Psi. \quad (15)$$

Формула (15) является следствием геометрии погружения в предположении, что $R > 0$ и $0 < \lambda < 1$. Возможно формальное применение также и для $\lambda > 1$. Тогда из формулы (8) следует, что R отрицательно. Объясним геометрический смысл этого случая. Из элементарных свойств образующих алгебры Клиффорда имеем (для $k = 1, \dots, n$) $\mathbf{e}_k\mathbf{e}_\mu = \mathbf{e}_{2n}\mathbf{e}_k\mathbf{e}_\mu\mathbf{e}_{2n}$ ($\mu \neq 2n$) и $\mathbf{e}_k\mathbf{e}_{2n} = -\mathbf{e}_{2n}\mathbf{e}_k\mathbf{e}_{2n}$. Это приводит к следующей симметрии спектральной задачи (14): $U_k(\frac{1}{\lambda}) = \mathbf{e}_{2n}U_k(\lambda)\mathbf{e}_{2n}$. Поэтому можно ограничиться решениями Ψ , удовлетворяющими условию

$$\Psi(\frac{1}{\lambda}) = \mathbf{e}_{2n}\Psi(\lambda)\mathbf{e}_{2n}. \quad (16)$$

Действительно, если вышеприведенное равенство имеет место при произвольном выборе точки (u^1, \dots, u^n) (начальные условия), то можно легко доказать (дифференцируя обе части равенства по u^k и используя соотношения (14)), что оно справедливо и в окрестности этой точки. Из соотношений (15) и (16) получаем

$$\hat{r}(1/\lambda) = -\mathbf{e}_{2n}\hat{r}(\lambda)\mathbf{e}_{2n}. \quad (17)$$

Геометрически это означает, что $\hat{r}(1/\lambda)$ — отражение $\hat{r}(\lambda)$ относительно гиперплоскости, ортогональной \mathbf{e}_{2n} . Формула (17) может рассматриваться как геометрическое определение $\hat{r}(\lambda)$ для $\lambda > 1$. Другая симметрия спектральной задачи (14), а именно $U_k(-\lambda) = \mathbf{e}U_k(\lambda)\mathbf{e}^{-1}$, где $\mathbf{e} := \mathbf{e}_{n+1}\mathbf{e}_{n+2}\dots\mathbf{e}_{2n}$ ($\mathbf{e}^{-1} = \mathbf{e}_{2n}\dots\mathbf{e}_{n+1}$), приводит к геометрическому определению $\hat{r}(\lambda)$ для $\lambda < 0$. Действительно, выбирая подходящие начальные условия, можем ограничиться решениями Ψ , для которых $\Psi(-\lambda) = \mathbf{e}\Psi(\lambda)\mathbf{e}^{-1}$. Тогда $\hat{r}(-\lambda) = (-1)^n\mathbf{e}\hat{r}(\lambda)\mathbf{e}^{-1}$, т. е. чтобы получить $\hat{r}(-\lambda)$, нужно произвести n отражений $\hat{r}(\lambda)$ относительно гиперплоскостей, ортогональных соответственно $\mathbf{e}_{n+1}, \dots, \mathbf{e}_{2n}$. Предельный случай $\lambda = 1$ формально соответствует $R = \pm\infty$. Чтобы получить точное геометрическое значение предела, рассмотрим формулу (17). Если $\lambda \rightarrow 1-$, то $\hat{r}(\lambda)$ превращается в погружение в сферу радиуса $R \rightarrow \infty$, и можно пользоваться формулой (17), чтобы получить значение правостороннего предела $\hat{r}(\lambda)$ при $\lambda = 1$. В предельном случае погружения $\hat{r}(1+)$ и $\hat{r}(1-)$ симметричны по отношению к гиперплоскости, ортогональной \mathbf{e}_{2n} . Радиус-вектор \hat{r} недостаточно удобен, т. к. для $R \rightarrow \infty$ он стремится к бесконечности. Следуя идее Доливы и Сантини (которые использовали ее для случая эволюции кривых, [7]), рассмотрим $\hat{F} := \hat{r} - R\mathbf{e}_{2n}$, что просто обозначает изменение базиса. Теперь подмногообразие описывается по отношению к фиксированной точке сферы (северный полюс при $R > 0$ и южный полюс при $R < 0$), а не к центру сферы. Тогда

$$\hat{F} = R\Psi^{-1}\mathbf{e}_{2n}\Psi - R\mathbf{e}_{2n} = \frac{2\lambda}{1-\lambda^2}(\Psi^{-1}\mathbf{e}_{2n}\Psi - \mathbf{e}_{2n}). \quad (18)$$

Можно показать, что $\hat{F}(1/\lambda) = -\mathbf{e}_{2n}\hat{F}(\lambda)\mathbf{e}_{2n}$. Это означает, что $\hat{F}(1/\lambda)$ и $\hat{F}(\lambda)$ имеют равные компоненты, ортогональные полярной оси. Их параллельные компоненты имеют противоположный знак. $\hat{F}(1-)$ приводит к погружению в сферу бесконечного радиуса и может быть отождествлено с погружением в касательное пространство к сфере в северном полюсе (по крайней мере

в случае, когда рассматривается погружение достаточно малой области; в случае глобальных погружений вопрос сложнее). Правосторонний предел в правой части приводит к тому же погружению, отраженному относительно гиперплоскости, ортогональной оси \mathbf{e}_{2n} . Итак, векторы $\widehat{F}(1+)$ и $\widehat{F}(1-)$ принадлежат касательным пространствам в антиподальных точках. Рассматривая их как элементы линейного пространства, порождаемого векторами $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{2n-1}$, имеем $\widehat{F}(1+) = \widehat{F}(1-)$, хотя эти векторы расположены в различных точках. В дальнейшем вычислим этот предел, предполагая, что решение Ψ спектральной задачи (14) есть дифференцируемая функция λ в окрестности $\lambda = 1$. Чтобы вычислить предел при $\lambda \rightarrow 1$ в формуле (18), используем правило Лопиталья. Дифференцируя тождество $\Psi^{-1}\Psi = \mathbf{1}$, получим $(\Psi^{-1})' = -\Psi^{-1}\Psi'\Psi^{-1}$ (где штрих обозначает производную по λ). Следовательно,

$$F := \lim_{\lambda \rightarrow 1} \widehat{F}(\lambda) = \Psi(1)^{-1}\Psi'(1)\Psi(1)^{-1}\mathbf{e}_{2n}\Psi(1) - \Psi(1)^{-1}\mathbf{e}_{2n}\Psi'(1). \quad (19)$$

Из (16) следует

$$\Psi(1)\mathbf{e}_{2n} = \mathbf{e}_{2n}\Psi(1), \quad \mathbf{e}_{2n}\Psi'(1) = -\Psi'(1)\mathbf{e}_{2n}. \quad (20)$$

Используя (20), получим из (19) формулу Сыма–Тайфеля

$$F = 2\Psi(1)^{-1}\Psi'(1)\mathbf{e}_{2n} = -2\mathbf{e}_{2n}\Psi^{-1}\left.\frac{\partial\Psi}{\partial\lambda}\right|_{\lambda=1}.$$

Множитель при \mathbf{e}_{2n} есть проекция $\Psi^{-1}\Psi_{,\lambda}|_{\lambda=1}$ на E^{2n-1} . Действительно, $\Psi(1)^{-1}\Psi'(1)$ принимает значения в алгебре Ли группы $\text{Spin}(2n)$ и согласно (20) антикоммутирует с \mathbf{e}_{2n} . Это означает, что $\Psi(1)^{-1}\Psi'(1) = -\frac{1}{2}\mathbf{e}_{2n}\mathbf{f}$, где \mathbf{f} принимает значения в подпространстве V , порождаемом элементами $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{2n-1}$. Предельный процесс оставляет уравнения Гаусса–Кодацци–Риччи без изменения, так что результирующая функция \mathbf{f} представляет погружение L^n в E^{2n-1} (это также следует из теоремы 3). Формула (12) упрощает явную конструкцию погружений. Действительно, допустим, что уже нашли базис касательных и нормалей в каждой точке погружения, тогда (без формулы Сыма) интегрированием можно восстановить погружение. Формула Сыма–Тайфеля позволяет заменить интегрирование по параметрам u^1, \dots, u^n дифференцированием по параметру λ . Конечно, упрощение такого рода возможно только в случаях, связанных с интегрируемыми системами (существование спектрального параметра играет ключевую роль). Более того, формула Сыма–Тайфеля оказывается весьма полезной в приложениях методов теории солитонов к дифференциальной геометрии (напр., [2], [3], [21], [22]).

6. Обобщенный тор Клиффорда постоянной отрицательной кривизны

Обозначим через e_1, \dots, e_{2n} ортонормированный базис в евклидовом пространстве E^{2n} . Тор Клиффорда есть n -мерное плоское подмногообразие ($K = 0$) в $S^{2n-1} \subset E^{2n}$. Радиус-вектор $r_C = r_C(u_1, \dots, u_n)$ имеет вид

$$r_C = \sum_{k=1}^n c_k (e_{2k-1} \cos u_k + e_{2k} \sin u_k), \quad (21)$$

где c_1, \dots, c_n — такие постоянные, что $c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_n^2 = R^2$ (чтобы r_C было погружением в сферу S^{2n-1} радиуса R). Найдем класс погружений областей L^n в S^{2n-1} , которые имеют вид, близкий к торами Клиффорда. Допустим, что коэффициенты c_k зависят только от u_1 . А именно, рассмотрим погружения $L^n \subset S^{2n-1} \subset E^{2n}$ такие, что радиус-вектор $r = r(u_1, u_2, \dots, u_n)$ имеет вид

$$\begin{aligned} r &= R(e_1 \cos u_1 + e_2 \sin u_1) \cos \theta + R\rho \sin \theta, \quad \theta = \theta(u_1), \\ \rho &= a_2(e_3 \cos u_2 + e_4 \sin u_2) + \dots + a_n(e_{2n-1} \cos u_n + e_{2n} \sin u_n) \end{aligned} \quad (22)$$

и a_k — постоянные, удовлетворяющие условию $\sum_{k=2}^n a_k^2 = 1$. Очевидно,

$$r^2 = R^2 \cos^2 \theta + R^2 \sin^2 \theta \sum_{k=2}^n a_k^2 = R^2,$$

поэтому r определяет подмногообразие в сфере S^{2n-1} радиуса R . Касательные векторы имеют вид

$$\begin{aligned} r_{,1} &= R \cos \theta (-e_1 \sin u_1 + e_2 \cos u_1 + \theta' \rho) - R \theta' \sin \theta (e_1 \cos u_1 + e_2 \sin u_1), \\ r_{,i} &= R a_i \sin \theta (-e_{2i-1} \sin u_i + e_{2i} \cos u_i), \end{aligned}$$

где $i = 2, \dots, n$ и $\theta' := \partial \theta / \partial u_1$. Поэтому $g_{11} = R^2(\cos^2 \theta + (\theta')^2)$, $g_{ii} = R^2 a_i^2 \sin^2 \theta$ ($i = 2, \dots, n$), $g_{ij} = 0$ ($i \neq j$) и метрика запишется следующим образом:

$$ds^2 = R^2(\cos^2 \theta + (\theta')^2) du_1^2 + R^2 \sin^2 \theta \sum_{i=2}^n a_i^2 du_i^2.$$

В дальнейшем обозначим $H_k := \sqrt{g_{kk}}$. Заметим, что в нашем случае H_k есть функции от одной переменной u_1 . Теперь выведем уравнения для θ , которые вытекают из того условия, что рассматриваемое подмногообразие имеет кривизну $K = -1$. В этом случае имеем сильное ограничение на тензор Римана $R_{ijij} = -g_{ii}g_{jj}$ ($i \neq j$), $R_{ijik} = 0$ ($i \neq j \neq k \neq i$). Напомним, что

$$R_{ijij} = -H_i H_j \left(\frac{\partial}{\partial u_i} \left(\frac{1}{H_i} \frac{\partial H_j}{\partial u_i} \right) + \frac{\partial}{\partial u_j} \left(\frac{1}{H_j} \frac{\partial H_i}{\partial u_j} \right) + \sum_{k \neq i, j} \frac{1}{H_k^2} \frac{\partial H_i}{\partial u_k} \frac{\partial H_j}{\partial u_k} \right).$$

Поэтому в нашем случае уравнение $R_{11ii} = -g_{11}g_{ii}$ можно переписать в виде

$$\frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{1}{H_1} \frac{\partial H_i}{\partial u_1} \right) = H_1 H_i,$$

и далее в терминах θ

$$\frac{d}{du_1} \left(\frac{\theta' \cos \theta}{\sqrt{\cos^2 \theta + \theta'^2}} \right) = R^2 \sin \theta \sqrt{\cos^2 \theta + \theta'^2}. \quad (23)$$

Интересно отметить, что это уравнение не зависит от n и не содержит постоянных a_i . В случае $n = 2$ других уравнений нет.

В случае $n > 2$ появляются еще два дополнительных уравнения. Действительно, уравнения $R_{ijij} = -g_{ii}g_{jj}$ ($i \geq 2, j \geq 2$) можно переписать

$$\frac{1}{H_1^2} \frac{\partial H_i}{\partial u_1} \frac{\partial H_j}{\partial u_1} = H_i H_j,$$

где учтено, что $H_k = H_k(u_1)$ для $k = 1, \dots, n$. Подставляя выражения для H_k , получим

$$\frac{\theta'^2}{\theta'^2 + \cos^2 \theta} = R^2 \operatorname{tg}^2 \theta. \quad (24)$$

Оставшиеся уравнения ($R_{ijik} = 0$) имеют вид

$$\frac{\partial^2 H_i}{\partial u_j \partial u_k} - \frac{1}{H_k} \frac{\partial H_i}{\partial u_k} \frac{\partial H_k}{\partial u_j} - \frac{1}{H_j} \frac{\partial H_i}{\partial u_j} \frac{\partial H_j}{\partial u_k} = 0$$

и автоматически удовлетворяются, т. к. $H_k = H_k(u_1)$. Следовательно, имеем одно уравнение (23) для $n = 2$ и два уравнения (23), (24) для $n > 2$. Для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка (23) можно найти первый интеграл. Действительно, обозначим

$$W := \frac{\theta'^2}{\cos^2 \theta + \theta'^2}. \quad (25)$$

Очевидно, $0 \leq W \leq 1$. Тогда уравнение (23) приводится к виду $(\sqrt{W} \cos \theta)' = \frac{R^2 \theta' \sin \theta}{\sqrt{W}}$, что может быть переписано следующим образом: $(\sqrt{W} \cos \theta)_{,\theta} = \frac{R^2 \sin \theta}{\sqrt{W}}$. Умножая обе стороны на $2\sqrt{W} \cos \theta$, имеем $(W \cos^2 \theta)_{,\theta} = 2R^2 \sin \theta \cos \theta$, и интегрируя, получаем первый интеграл для уравнения (23)

$$W \cos^2 \theta = R^2 \sin^2 \theta + C, \quad (26)$$

где C — постоянная. Так как $0 \leq W \leq 1$, имеем $-R^2 < C < 1$. В случае $n > 2$ должно удовлетворяться также уравнение (24), которое переписывается как $W = R^2 \operatorname{tg}^2 \theta$. Подставляя (24) в (26), получим $C = 0$. В случае $n = 2$ постоянная C может принимать и ненулевые значения. Подставляя (25) в (26), получаем

$$u_1 = \pm \int \sqrt{\frac{\cos^2 \theta - R^2 \sin^2 \theta - C}{\cos^2 \theta (R^2 \sin^2 \theta + C)}} d\theta. \quad (27)$$

Случай $n > 2$. В этом случае необходимо $C = 0$. Чтобы вычислить интеграл (27), сделаем подстановку $t = \sqrt{1 - (1 + R^2) \sin^2 \theta}$. Тогда, выбирая постоянную интегрирования подходящим образом, имеем

$$|u_1| = \frac{1}{R} \log \frac{\sqrt{1 + R^2} |\sin \theta|}{1 + \sqrt{1 - (1 + R^2) \sin^2 \theta}} + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1 - (1 + R^2) \sin^2 \theta}}{R}.$$

Очевидно, $\sin \theta < \frac{1}{\sqrt{1 + R^2}}$. Следовательно, $0 < |\theta| < \operatorname{arctg} \frac{1}{R}$. Более того, для $\theta \rightarrow 0$ имеем $u_1 \rightarrow \pm\infty$. Для $\theta = \theta_0$ такого, что $\sin \theta_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + R^2}}$, имеем $\frac{du_1}{d\theta} = 0$ (см. рис. 1а)). Следовательно, график функции $\theta = \theta(u_1)$ напоминает трактрису.

Случай $n = 2$ и $C < 0$. При $n = 2$ постоянная C может принимать ненулевые значения. Если $C < 0$, то обозначим $C = -\mu^2$, где $0 < \mu < R$. Тогда

$$\left(\frac{du_1}{d\theta}\right)^2 = \frac{1 + \mu^2 - (1 + R^2) \sin^2 \theta}{(1 - \sin^2 \theta)(R^2 \sin^2 \theta - \mu^2)}. \quad (28)$$

Правая часть обращается в нуль для таких θ_1 , что

$$\sin \theta_1 = \sqrt{\frac{1 + \mu^2}{1 + R^2}}$$

(заметим, что θ_1 всегда существует). Если построить в соответствующих точках график функции $\theta = \theta(u_1)$, то (рис. 1б)) касательные прямые параллельны θ -оси. Кривые, порождаемые этими точками при вращении вокруг u_1 -оси, являются сингулярными кривыми на многообразии. Для θ_2 такого, что $\sin \theta_2 = \mu/R$ (заметим, что θ_2 также всегда существует), знаменатель в правой части уравнения (28) может обратиться в нуль. В соответствующих точках имеем локальный минимум функции $\theta = \theta(u_1)$. Эти точки — ближайшие к u_1 -оси, представляющие большие круги на сфере S^3 . Следовательно, параметр μ имеет следующий геометрический смысл.

Следствие 1. Для $C = -\mu^2$ минимальное расстояние от рассматриваемой поверхности до большого круга $R(e_1 \cos u_1 + e_2 \sin u_1)$ задается в виде $\operatorname{arcsin} \mu$.

Если период функции $\theta = \theta(u_1)$ есть рациональное кратное 2π , т. е.

$$\frac{1}{\pi} \int_{\theta_2}^{\theta_1} \sqrt{\frac{\cos^2 \theta - R^2 \sin^2 \theta + \mu^2}{\cos^2 \theta (R^2 \sin^2 \theta - \mu^2)}} d\theta = \frac{p}{q}, \quad (29)$$

где p, q целые, то получаем замкнутую (хотя и с особенностями) поверхность. Интеграл в левой части соотношения (29) зависит от μ . Если $\mu \rightarrow 0$, то его значение (равное половине периода функции $\theta = \theta(u_1)$) возрастает до бесконечности. Поэтому существует такая последовательность

$\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k, \dots \rightarrow 0$, что интеграл (29) есть целое число (равное $1, 2, \dots, k, \dots$ соответственно). Заметим, что замкнутая регулярная поверхность вращения с постоянной отрицательной гауссовой кривизной $K = -1$ не может существовать. Действительно, *не существует замкнутой регулярной поверхности класса C^3 в S^3 с гауссовой кривизной $K = -1$* , иначе в любой ее точке имели бы два различных асимптотических направления. Они никогда не совпадают, т. к. кручения соответствующих асимптотических кривых различны по знаку: $\kappa_1 = \sqrt{-K_e}$ и $\kappa_2 = -\sqrt{-K_e}$, где внешняя кривизна K_e отрицательна: $K_e = L_{11}^1 L_{22}^1 / (g_{11} g_{22}) = -1 - R^{-2} < 0$. По теореме Хопфа характеристика Эйлера такой поверхности равна нулю, следовательно, рассматриваемая поверхность должна быть гомеоморфна тору. Однако на торе не может быть метрики постоянной отрицательной кривизны.

Случай $n = 2, C > 0$. В этом случае обозначим $C = \mu^2$, где $0 < \mu < 1$. Тогда

$$\left(\frac{du_1}{d\theta}\right)^2 = \frac{\cos^2 \theta - R^2 \sin^2 \theta - \mu^2}{\cos^2 \theta (R^2 \sin^2 \theta + \mu^2)}. \quad (30)$$

Для θ_3 такого, что $\sin \theta_3 = \sqrt{\frac{1-\mu^2}{1+R^2}}$, касательная прямая к графику $u_1 = u_1(\theta)$ параллельна θ -оси (см. рис. 1с)). Соответствующая точка порождает ребро возврата на рассматриваемой поверхности. Так как $\theta_3 < \pi/2$, числитель в правой части уравнения (30) не обращается в нуль для $0 \leq \theta \leq \theta_3$. Следовательно, график функции $\theta = \theta(u_1)$ пересекает u_1 -ось под ненулевым углом. Точки пересечения соответствуют коническим точкам поверхности. Заметим, что поверхность замкнута при любом $C > 0$. Таким образом, имеет место

Следствие 2. Для $n = 2$ существуют три типа псевдосферических поверхностей ($K = -1$), обобщающих тор Клиффорда S^3 вида (22) (рис. 1а), б), с)). Для $n > 2$ существует только один тип таких подмногообразий (рис. 1а)).

Задача нахождения замкнутых сингулярных псевдосферических поверхностей в S^3 вида (22) является “спектральной задачей” в следующем смысле. Постоянная C может рассматриваться как спектральный параметр. Для $C > 0$ имеем непрерывный спектр (все обобщенные торы замкнуты в этом случае) и для $C < 0$ имеем последовательность дискретных “собственных значений” $C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$ ($\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = 0$).

7. Заключение и открытые проблемы

Следуя подходу, предложенному Доливой и Сантини к эволюции кривых в E^3 , получили спектральную задачу со спектральным параметром для изометрических погружений L^n в E^{2n-1} . Для этого достаточно рассмотреть погружения L^n в сферу S^{2n-1} радиуса R . Радиус можно выразить в терминах параметра λ , поэтому спектральный параметр так существенен для применения методов теории солитонов. В то же время вывели формулу Сыма–Тайфеля, рассматривая предельный случай $R \rightarrow \infty$ (что означает $S^{2n-1} \rightarrow E^{2n-1}$). Формула Сыма–Тайфеля успешно применяется в случае погружений в E^3 ([2], [3], [21]), который может рассматриваться как “промежуточный случай” между кривыми и многомерными многообразиями.

Проблема 1. Вывести формулу Сыма–Тайфеля (аналогично выводу в разделе 5) в случае поверхностей с $K = \text{const}$, поверхностей с $H = \text{const}$, изотермических поверхностей и поверхностей Бианки.

Специальные погружения пространств Лобачевского в евклидовы пространства и сферы изучались различными авторами ([23]–[28]). Мы сосредоточили внимание на замкнутых поверхностях в S^{2n-1} (допускающих сингулярности), которые похожи на тор Клиффорда. Случай $n = 2$ оказывается наиболее интересным. Обсуждение формулы (29) показывает, что для $p/q = 1$ получаем замкнутую поверхность рода 1 с единственной сингулярной линией (рис. 2а)).

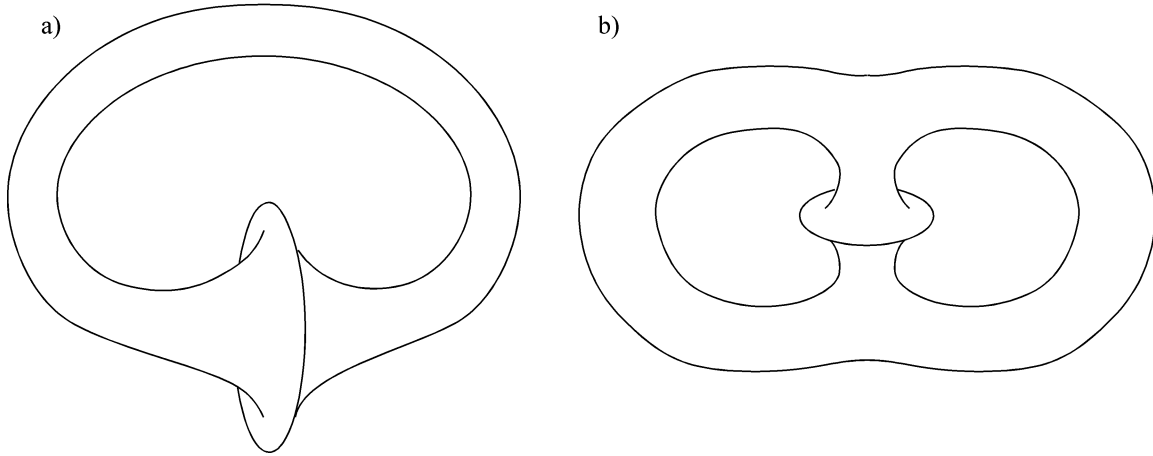


Рис. 2

Проблема 2. Возможно ли построить псевдосферическую поверхность 2 рода (с отрицательной характеристикой Эйлера) только с одной сингулярной линией (рис. 2b))?

В данной работе рассмотрели псевдосферические поверхности с радиус-вектором специального вида (22). Естественно назвать “обобщенными торами Клиффорда” подмногообразия вида (21) с $c_k = c_k(u_1)$.

Проблема 3. Найти все обобщенные торы Клиффорда с постоянной секционной кривизной в S^{2n-1} .

Авторы выражают глубокую благодарность проф. Антони Суму за интерес, проявленный к данной работе.

Литература

1. Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. *Теория солитонов. Метод обратной задачи*. – М.: Наука, 1980. – 319 с.
2. Sym A. *Soliton surfaces and their application (soliton geometry from spectral problems)* // Lect. Notes Phys. – 1985. – № 239. – P. 154–231.
3. Cieřliński J. *A generalized formula for integrable classes of surfaces in Lie algebras* // J. Math. Phys. – 1997. – V. 38. – P. 4255–4272.
4. Sym A. *Soliton surfaces* // Lett. Nuovo Cim. – 1982. – V. 33. – № 12. – P. 394–400.
5. Sym A. *Soliton surfaces II. Geometric unification of solvable nonlinearities* // Lett. Nuovo Cim. – 1983. – V. 36. – P. 307–312.
6. Doliwa A., Santini P. *The integrable dynamics of a discrete curve and the Ablowitz-Ladik hierarchy* // J. Math. Phys. – 1995. – V. 36. – P. 1259–1273.
7. Doliwa A., Santini P. *The integrable dynamics of a discrete curve* / D. Levi, L. Vinet, P. Winternitz (Eds.). *Symmetries and integrability of difference equations*. – AMS, Providence. – CRM Proc. & Lect. Notes. – 1996. – V. 9. – P. 91–102.
8. Аминов Ю.А. *О погружении областей n -мерного пространства Лобачевского в $(2n - 1)$ -мерное евклидово пространство* // ДАН СССР. – 1977. – Т. 236. – № 3. – С. 521–524.
9. Аминов Ю.А. *Изометрические погружения областей n -мерного пространства Лобачевского в $(2n - 1)$ -мерное евклидово пространство* // Матем. сб. – 1980. – Т. 111. – № 3. – С. 402–433.
10. Tenenblat K., Terng C.L. *Bäcklund’s theorem for n -dimensional submanifolds of R^{2n-1}* // Ann. Math. – 1980. – V. 111. – № 3. – P. 477–490.
11. Terng C.L. *A higher dimension generalization of the sine-Gordon equation and its soliton theory* // Ann. Math. – 1980. – V. 111. – № 3. – P. 491–510.

12. Ablowitz M.J., Beals R., Tenenblat K. *On the solution of the generalized wave and generalized sine-Gordon equations* // Stud. Appl. Math. – 1986. – V. 74. – № 3. – P. 177–203.
13. Ferus D., Pedit F. *Isometric immersions of space forms and soliton theory* // Math. Ann. – 1996. – V. 305. – P. 329–342.
14. Cieśliński J.L., Aminov Yu.A. *A geometric interpretation of the spectral problem for the generalized sine-Gordon system* // J. Phys. A Math. Gen. – 2001. – V. 34. – P. L153–L159.
15. Moore J.D. *Isometric immersions of space forms in space forms* // Pacific J. Math. – 1972. – V. 40. – № 1. – P. 157–166.
16. Budinich P., Trautman A. *The spinorial chessboard*. – Springer-Verlag, 1988. – 128 p.
17. Porteous I.R. *Clifford algebras and the classical groups*. – Cambridge Univ. Press, 1995. – 295 p.
18. Cieśliński J. *The spectral interpretation of n -spaces of constant negative curvature immersed in R^{2n-1}* // Phys. Lett. – 1997. – V. 236. – P. 425–430.
19. Аминов Ю.А. *Изометрические погружения областей n -мерного пространства Лобачевско-го в евклидовы пространства с плоской нормальной связностью. Модель калибровочного поля* // Матем. сб. – 1988. – Т. 137. – № 3. – С. 275–299.
20. Aminov Yu.A. *New ideas in differential geometry of submanifolds* // Acta Academic, Kharkov, 1998. – 114 p.
21. Bobenko A.I. *Surfaces in terms of 2 by 2 matrices. Old and new integrable cases* / A.P. Fordy and J.C. Wood (Eds.). Harmonic maps and integrable systems (Aspects of Mathematics, V. 23), Vieweg, Brunswick, 1994.
22. Bobenko A., Pinkall U. *Discrete surfaces with constant negative gaussian curvature and the Hirota equation* // J. Diff. Geom. – 1996. – V. 43. – P. 527–611.
23. Aminov Yu.A., Gontcharova O. *An example of isometric immersion of a domain of 3-dimensional Lobachevsky space into E^6 with a section as the Veronese surface* // Math. Fiz., Analiz, Geom. – 1999. – V. 6. – P. 3–9.
24. Aminov Yu.A., Rabelo M.L. *On toroidal submanifolds of constant negative curvature* // Math. Fiz., Analiz, Geom. – 1995. – V. 2. – P. 502–513.
25. Dajczer M., Tojeiro R. *An extension of the classical Ribaucour transformation* // Proc. London Math. Soc. – 2002. – V. 85. – P. 211–232.
26. Gollek H. *Bäcklund transformations, matrix-Riccati systems and isometric immersions of space forms into space forms* // Coll. Math. Soc. J. Bolyai. – 1989. – V. 56. – P. 359–385.
27. Rabelo M.L., Tenenblat K. *Toroidal submanifolds of constant non-positive curvature*. – In memoriam N.I. Lobachevskii. – V. III. – Part 1. – Казань, Изд-во Казанск. ун-та, 1995. – Т. 3. – № 1. – С. 135–159.
28. Tenenblat K. *Transformations of manifolds and applications to differential equations*. – Addison Wesley, Longman, 1998. — 209 p.

Университет в Белостоке, институт математики,
 Физико-технический институт низких
 температур им. Б.И. Веркина
 Национальной Академии наук Украины
 Университет в Белостоке,
 институт теоретической физики

Поступила
 20.01.2004