ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2005 МАТЕМАТИКА № 5 (516)

УДК 514.76

Г.Н. БУШУЕВА

ФУНКТОРЫ ВЕЙЛЯ И ФУНКТОРЫ, СОХРАНЯЮЩИЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ НА КАТЕГОРИИ МНОГООБРАЗИЙ, ЗАВИСЯЩИХ ОТ ПАРАМЕТРОВ

1. Введение

Пусть $\mathbb{A} = \mathbb{R}[[N]]/\mathbb{I}$ — локальная алгебра Вейля ширины N и высоты q, т. е. факторалгебра алгебры $\mathbb{R}[[N]]$ формальных степенных рядов от N переменных по некоторому идеалу $\mathbb{I}$ ([1]–[3]) и $\overset{\circ}{\mathbb{A}}$ — максимальный идеал $\mathbb{A}$, состоящий из нильпотентных элементов. Имеет место разложение алгебры $\mathbb{A}$ в полупрямую сумму

$$\mathbb{A} = \mathbb{R} + \overset{\circ}{\mathbb{A}}. \tag{1}$$

Функтор Вейля $T^{\mathbb{A}} : \mathcal{M}f \to \mathcal{FM}$ [1], определяемый локальной алгеброй $\mathbb{A}$, относит гладкому многообразию M_n расслоение $T^{\mathbb{A}}M_n$ $\mathbb{A}$-скоростей [2] ($\mathbb{A}$-близких точек [1], $\mathbb{A}$-струй [4]).

Расслоение $\mathbb{A}$-скоростей Вейля $T^{\mathbb{A}}M_n \to M_n$ над гладким многообразием M_n определяется как множество классов эквивалентности ростков $(\mathbb{R}^N, 0) \xrightarrow{f} M_n$ по следующему отношению эквивалентности: ростки f и g эквивалентны, если ряды Тейлора отображений $h \circ f$ и $h \circ g$, где h — некоторая карта на M_n, совпадают по модулю идеала $\mathbb{I}$. По теореме об $\mathbb{A}$-гладких отображениях [3] преобразования координат на $T^{\mathbb{A}}M_n$, индуцируемые преобразованиями координат $x^{i'} = \varphi^{i'}(x^i)$ на M_n, имеют вид

$$X^{i'} = x^{i'} + \overset{\circ}{X}{}^{i'} = \sum_{|p|=0}^{q} \frac{1}{p!} \frac{D^{|p|}\varphi^{i'}}{Dx^p} \overset{\circ}{X}{}^p, \tag{2}$$

где $X^i = x^i + \overset{\circ}{X}{}^i$ — разложение в соответствии с (1), $\varphi^{i'}(x^i)$ — $\mathbb{A}$-значные гладкие функции.

Расслоение Вейля $T^{\mathbb{A}}M_n$ над дифферецируемым многообразием M_n, определяемое локальной алгеброй Вейля $\mathbb{A}$ высоты q ([1], [2], [5]), ассоциировано с расслоением q-реперов B^qM_n, структурной группой которого является дифференциальная группа G^q_n. Структура $\mathbb{A}$-гладкого многообразия на $T^{\mathbb{A}}M_n$ ([4], [5]) приводит к появлению еще одного главного расслоения, ассоциированного с $T^{\mathbb{A}}M_n$, а именно, расслоения $\mathbb{A}$-аффинных реперов $B(\mathbb{A})M_n$, структурной группой которого является так называемая $\mathbb{A}$-аффинная группа $D_n(\mathbb{A})$ [3].

Геометрия расслоений Вейля и лифты полей различных дифференциально-геометрических объектов с многообразия M_n на расслоение Вейля $T^{\mathbb{A}}M_n$ изучались в [3], [5]–[9] и др. (см., напр., обзор [5]).

В работе [10] рассматривалась категория $\mathcal{M}f^N$ многообразий, зависящих от N параметров, объектами которой являются тривиальные расслоения $p : M \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, где M — гладкое многообразие, а морфизмами — коммутативные диаграммы вида

$$\begin{array}{ccc} M\times\mathbb{R}^N & \xrightarrow{f} & M'\times\mathbb{R}^N \\ {\scriptstyle p}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle p'} \\ \mathbb{R}^N & \xrightarrow{\mathrm{id}} & \mathbb{R}^N. \end{array}$$

В локальных координатах (x^i,t^a) на $M\times\mathbb{R}^N$ и $(x^{i'},t^a)$ на $M'\times\mathbb{R}^N$ морфизм f задается уравнениями вида $x^{i'}=f^{i'}(x^i,t^a)$. В указанной работе было построено обобщение функтора Вейля $T^{\mathbb{A}}$ на категорию $\mathcal{M}f^N$ многообразий, зависящих от N параметров, где N — ширина алгебры $\mathbb{A}$. Обобщенный функтор Вейля $\widehat{T}^{\mathbb{A}}:\mathcal{M}f^N\to\mathcal{FM}^N$ относит многообразию $M_n\times\mathbb{R}^N$ расслоение $\widehat{T}^{\mathbb{A}}(M_n\times\mathbb{R}^N)\to M_n\times\mathbb{R}^N$, образованное $\mathbb{A}$-струями ростков сечений $s:\mathbb{R}^N\to M_n\times\mathbb{R}^N$. Естественной структурной группой расслоения $\widehat{T}^{\mathbb{A}}(M_n\times\mathbb{R}^N)$ является группа $D_n(\mathbb{A})$ [3].

Функтор $\widehat{T}^{\mathbb{A}}$ сохраняет произведение в категории $\mathcal{M}f^N$. Данная работа посвящается выяснению строения произвольных функторов, сохраняющих произведение на категории $\mathcal{M}f^N$. Детальное изложение теории функторов, сохраняющих произведение на категории гладких многообразий $\mathcal{M}f$, можно найти в ([2], с. 296). В работах ([11], [12]) получена классификация функторов, сохраняющих произведение на категориях расслоенных многообразий.

2. Расслоенные функторы на категории $\mathcal{M}f^N$

Объектами категории $\mathcal{FM}^N$ расслоенных многообразий, зависящих от параметров, являются коммутативные диаграммы

$$\begin{array}{ccc} E\times\mathbb{R}^N & \xrightarrow{p_H} & \mathbb{R}^N \\ {\scriptstyle \pi}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} \\ M\times\mathbb{R}^N & \xrightarrow{p_M} & \mathbb{R}^N, \end{array}$$

а морфизмами — коммутативные диаграммы над $\mathbb{R}^N$

$$\begin{array}{ccc} E\times\mathbb{R}^N & \xrightarrow{f} & E'\times\mathbb{R}^N \\ {\scriptstyle \pi}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \pi'} \\ M\times\mathbb{R}^N & \xrightarrow{\overline{f}} & M'\times\mathbb{R}^N. \end{array}$$

Базовый функтор

$$B:\mathcal{FM}^N\to\mathcal{M}f^N$$

в данном случае действует по правилу

$$B\begin{pmatrix} E\times\mathbb{R}^N & \longrightarrow & \mathbb{R}^N \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ M\times\mathbb{R}^N & \longrightarrow & \mathbb{R}^N \end{pmatrix}=(M\times\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}^N),\quad B(f)=\overline{f}.$$

Функтор $\varepsilon:\mathcal{FM}^N\to\mathcal{M}f^N$, стирающий расслоенную структуру, действует по правилу

$$\varepsilon\begin{pmatrix} E\times\mathbb{R}^N & \longrightarrow & \mathbb{R}^N \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ M\times\mathbb{R}^N & \longrightarrow & \mathbb{R}^N \end{pmatrix}=(E\times\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}^N),\quad \varepsilon(f)=f.$$

Замечание. Объекты категории $\mathcal{M}f$ гладких многообразий будем рассматривать как расслоения вида $M\to\{\mathrm{pt}\}$, где $\{\mathrm{pt}\}=\mathbb{R}^0$ — фиксированное одноточечное многообразие. Имея это в виду, категорию $\mathcal{M}f$ будем отождествлять с категорией $\mathcal{M}f^0$.

Любое гладкое отображение $\gamma : \mathbb{R}^K \to \mathbb{R}^N$ с помощью конструкции обратного образа определяет функтор $R_\gamma : \mathcal{M}f^N \to \mathcal{M}f^K$, который действует на морфизмах таким образом, что $\mathbb{R}_\gamma(f(x,t)) = f(x,\gamma(t))$. При этом имеет место соотношение

$$R_{\gamma_1} \circ R_{\gamma_2} = R_{\gamma_2 \circ \gamma_1}\,. \tag{3}$$

Опишем подробнее некоторые функторы такого типа, которые понадобятся нам в дальнейшем. Отображение $t : \{\mathrm{pt}\} \to \mathbb{R}^N$, $\{\mathrm{pt}\} \mapsto t \in \mathbb{R}^N$, определяет функтор $R_t : \mathcal{M}f^N \to \mathcal{M}f$, который действует следующим образом: на объектах — по правилу $R_t(M \times \mathbb{R}^N) = M$, а на морфизмах — по правилу $R_t(f : M_1 \times \mathbb{R}^N \to M_2 \times \mathbb{R}^N) = (f|_t : M_1 \to M_2)$. Действие этих функторов на объектах одинаково для всех $t \in \mathbb{R}^N$: $R_t|_{\mathrm{Ob}(\mathcal{M}f^N)} = R_0|_{\mathrm{Ob}(\mathcal{M}f^N)}$, где R_0 — функтор, соответствующий $t = 0$.

Отображение $\mathrm{pt} : \mathbb{R}^N \to \{\mathrm{pt}\}$ определяет функтор $R_{\mathrm{pt}} : \mathcal{M}f \to \mathcal{M}f^N$:

$$R_{\mathrm{pt}}(M) = M \times \mathbb{R}^N, \quad R_{\mathrm{pt}}(f) = f \times \mathrm{id},$$

который осуществляет вложение категории $\mathcal{M}f$ в $\mathcal{M}f^N$.

Семейство функторов $\{R_t, t \in \mathbb{R}^N\}$ обладает следующими свойствами:

(i) для любых двух $\mathcal{M}f^N$-морфизмов f_1 и f_2 из равенства $R_t(f_1) = R_t(f_2)$ при всех $t \in \mathbb{R}^N$ следует равенство $f_1 = f_2$;

(ii) для всех $t \in \mathbb{R}^N$ функторы $R_t \circ R_{\mathrm{pt}}$ эквивалентны функтору $\mathrm{Id}_{\mathcal{M}f}$.

Свойство (ii) следует из соотношения (3).

Категория $\mathcal{M}f^N$ обладает подкатегорией, обозначаемой $\mathcal{M}f \times \mathbb{R}^N$, объектами которой являются объекты категории $\mathcal{M}f^N$, а морфизмами — произведения отображений $f \times \mathrm{id} : M \times \mathbb{R}^N \to W \times \mathbb{R}^N$, где $f : M \to W$ — произвольное гладкое отображение.

В дальнейшем будем рассматривать ковариантные функторы вида

$$F : \mathcal{M}f^N \to \mathcal{FM}^N. \tag{4}$$

Функтор вида (4), удовлетворяющий условию *продолжения* (см. ([2], с. 138) в случае категории $\mathcal{M}f$)

$$B \circ F = \mathrm{Id}_{\mathcal{M}f^N},$$

будем называть функтором продолжения, такой функтор действует следующим образом: на объектах —

$$F : (M \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N) \mapsto \begin{array}{ccc} E \times \mathbb{R}^N & \longrightarrow & \mathbb{R}^N \\ \downarrow & & \downarrow \\ M \times \mathbb{R}^N & \longrightarrow & \mathbb{R}^N, \end{array}$$

на морфизмах —

$$F : \begin{array}{ccc} M \times \mathbb{R}^N & \xrightarrow{f} & M' \times \mathbb{R}^N \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{R}^N & \longrightarrow & \mathbb{R}^N \end{array} \quad \mapsto \quad \begin{array}{ccc} E \times \mathbb{R}^N & \xrightarrow{h} & E' \times \mathbb{R}^N \\ \downarrow & & \downarrow \\ M \times \mathbb{R}^N & \xrightarrow{f} & M' \times \mathbb{R}^N \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{R}^N & \longrightarrow & \mathbb{R}^N. \end{array}$$

Этому функтору можно поставить в соответствие функтор $F_0 : \mathcal{M}f \to \mathcal{M}f$, определяемый как композиция $F_0 = R_0 \circ \varepsilon \circ F \circ R_{\mathrm{pt}}$. Тогда для действия на объектах можно использовать выражение

$$F : (M \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N) \mapsto \begin{array}{ccc} F_0(M) \times \mathbb{R}^N & \longrightarrow & \mathbb{R}^N \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} \\ M \times \mathbb{R}^N & \longrightarrow & \mathbb{R}^N. \end{array}$$

Функтор продолжения будем называть расслоенным функтором, если он удовлетворяет следующему условию *локализации* (см. ([2], с. 170) в случае категории $\mathcal{M}f$): если $U \subset M$ — открытое подмножество и $i : U \times \mathbb{R}^N \to M \times \mathbb{R}^N$ — $\mathcal{M}f^N$-включение, то $F_0(U) \times \mathbb{R}^N = \pi_M^{-1}(U \times \mathbb{R}^N)$ и $F(i) : \pi_M^{-1}(U \times \mathbb{R}^N) \to F_0(M) \times \mathbb{R}^N$ — $\mathcal{FM}^N$-включение (для краткости записи здесь указаны только верхние строчки диаграмм).

3. Произведение в категории $\mathcal{M}f^N$

Используем

Определение 1 ([13]). Пусть $\mathcal{C}$ – произвольная категория и C_1, C_2 — объекты из $\mathcal{C}$. Под произведением объектов C_1 и C_2 в $\mathcal{C}$ понимается тройка $(P, \mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2)$, состоящая из объекта P в $\mathcal{C}$ и двух морфизмов и удовлетворяющая следующему условию. Для любого объекта D и любых двух морфизмов $f_1 : D \to C_1$ и $f_2 : D \to C_2$ существует единственный морфизм $f : D \to P$, для которого $f_1 = \mathrm{pr}_1 \circ f$ и $f_2 = \mathrm{pr}_2 \circ f$, т. е. диаграмма

$$\begin{tikzcd}
C_1 & P \arrow[l, "\mathrm{pr}_1"'] \arrow[r, "\mathrm{pr}_2"] & C_2 \\
 & D \arrow[ul, "f_1"] \arrow[u, dashed, "f"] \arrow[ur, "f_2"'] &
\end{tikzcd}$$

коммутативна.

Покажем, что в категории $\mathcal{M}f^N$ существует произведение любых двух объектов $p_1 : M_1 \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ и $p_2 : M_2 \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$. Рассмотрим объекты $M_1 = R_0(M_1 \times \mathbb{R}^N)$ и $M_2 = R_0(M_2 \times \mathbb{R}^N)$ из категории гладких многообразий $\mathcal{M}f$. Произведением этих объектов в категории гладких многообразий $\mathcal{M}f$ является тройка $(M_1 \times M_2, \mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2)$. Проверим, что тройка $(R_{\mathrm{pt}}(M_1 \times M_2), R_{\mathrm{pt}}(\mathrm{pr}_1), R_{\mathrm{pt}}(\mathrm{pr}_2))$ является произведением $\mathcal{M}f^N$-объектов $p_1 : M_1 \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ и $p_2 : M_2 \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ в категории $\mathcal{M}f^N$. Рассмотрим диаграмму над $\mathbb{R}^N$ (для краткости опускаем нижнюю часть диаграммы с тождественными отображениями $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$):

$$\begin{tikzcd}
M_1 \times \mathbb{R}^N & M_1 \times M_2 \times \mathbb{R}^N \arrow[l, "(\mathrm{pr}_1, \mathrm{id})"'] \arrow[r, "(\mathrm{pr}_2, \mathrm{id})"] & M_2 \times \mathbb{R}^N \\
 & W \times \mathbb{R}^N. \arrow[ul, "f_1"] \arrow[u, dashed, "f"] \arrow[ur, "f_2"'] &
\end{tikzcd}$$

Применяя к ней функтор R_t при различных значениях $t \in \mathbb{R}^N$, получаем диаграммы в категории $\mathcal{M}f$, для которых существуют замыкающие их морфизмы, образующие семейство гладких отображений $\{R_t(f_1) \times R_t(f_2), t \in \mathbb{R}^N\}$. По построению это семейство образует гладкое отображение $f : W \times \mathbb{R}^N \to M_1 \times M_2 \times \mathbb{R}^N$, $f(w,t) = (R_t(f_1) \times R_t(f_2)(w), t)$, являющееся морфизмом в категории $\mathcal{M}f^N$. В силу свойств функторов R_t этот морфизм является единственным и замыкает исходную диаграмму, превращая ее в диаграмму произведения. Таким образом, тройка $(R_{\mathrm{pt}}(M_1 \times M_2), R_{\mathrm{pt}}(\mathrm{pr}_1), R_{\mathrm{pt}}(\mathrm{pr}_2))$ является произведением объектов $p_1 : M_1 \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ и $p_2 : M_2 \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ в категории $\mathcal{M}f^N$.

Построенное произведение в категории $\mathcal{M}f^N$ является, по существу, не чем иным, как послойным над $\mathbb{R}^N$ произведением гладких многообразий, поэтому в дальнейшем для него будем использовать обозначение $\times_{\mathbb{R}^N}$. По индукции произведение в категории $\mathcal{M}f^N$ может быть распространено на любое конечное число объектов.

Определение 2 ([2]). Функтор $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ называют сохраняющим произведение, если для всякого $\mathcal{C}$-произведения $(A, \mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2)$ тройка $(F(A), F(\mathrm{pr}_1), F(\mathrm{pr}_2))$ является произведением в категории $\mathcal{D}$.

Например, функторы R_γ, описанные выше, сохраняют произведение в категории $\mathcal{M}f^N$.

4. Функторы на категории $\mathcal{M}f \times \mathbb{R}^N$

В дальнейшем под гладким N-параметрическим семейством алгебр будем понимать векторное расслоение $\mathbb{V} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ с заданной гладкой послойной билинейной операцией умножения $* : \mathbb{V}\times\mathbb{V}\times\mathbb{R}^N \to \mathbb{V}\times\mathbb{R}^N$, являющейся морфизмом в категории $\mathcal{M}f^N$. Если операция умножения $*$ превращает каждый слой $\mathbb{V}_t = \mathbb{V}$ в локальную алгебру Вейля $\mathbb{A}(t)$, единица 1_t которой гладко зависит от t, а расслоение $\mathbb{V} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ при этом представляется в виде прямой суммы

$$\mathbb{V} \times \mathbb{R}^N = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \oplus \mathring{\mathbb{V}} \times \mathbb{R}^N, \tag{5}$$

где $\mathring{\mathbb{V}} \times \mathbb{R}^N$ — множество нильпотентных элементов в слоях, а $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ — расслоение на подалгебры, являющиеся линейными оболочками единиц 1_t, то будем называть это семейство семейством алгебр Вейля и будем использовать для него обозначение $\mathbb{A}(t) \times \mathbb{R}^N$. Аналогичным образом определяется семейство $\mathbb{A}(t)$-модулей $\mathbb{A}(t)^n \times \mathbb{R}^N$, где $\mathbb{A}(t)^n = \underbrace{\mathbb{A}(t) \times \cdots \times \mathbb{A}(t)}_{n}$. В этом разделе каждому N-параметрическому семейству алгебр Вейля $\mathbb{A}(t) \times \mathbb{R}^N$ будет поставлен в соответствие ковариантный функтор $\widetilde{T}^{\mathbb{A}(t)} : \mathcal{M}f \times \mathbb{R}^N \to \mathcal{FM}^N$, называемый N-параметрическим семейством функторов Вейля.

Функтор Вейля допускает различные способы описания, точнее, известно несколько естественно эквивалентных функторов, называемых функторами Вейля ([2], с. 297). В рамках задачи, решаемой в этой статье, удобно рассматривать конструкцию функтора Вейля, использующую локальные карты, аналогичную конструкции, приведенной в ([2], с. 301).

Определим действие $\widetilde{T}^{\mathbb{A}(t)}$ на объектах $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N$ следующим образом: $\widetilde{T}^{\mathbb{A}(t)}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N) = \mathbb{A}(t)\times\mathbb{R}^N$. Для $\mathcal{M}f\times\mathbb{R}^N$-морфизма $f\times\mathrm{id} : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}\times\mathbb{R}^N$ морфизм $\widetilde{T}^{\mathbb{A}(t)}(f\times\mathrm{id}) : \mathbb{A}(t)\times\mathbb{R}^N \to \mathbb{A}(t)\times\mathbb{R}^N$, $(x + \mathring{X}, t) \mapsto (y + \mathring{Y}, t)$ определяется уравнениями

$$y + \mathring{Y} = f(x) + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l!}\frac{d^l f(x)}{dx^l}\mathring{X}^l,$$

где координаты $(x + \mathring{X}, t)$ соответствуют разложению (5), а суммирование при каждом $t \in \mathbb{R}^N$ осуществляется по конечному числу слагаемых в зависимости от высоты алгебры $\mathbb{A}(t)$.

Далее полагаем $\widetilde{T}^{\mathbb{A}(t)}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N) = \mathbb{A}(t)^n \times \mathbb{R}^N$, а $\widetilde{T}^{\mathbb{A}(t)}(f \times \mathrm{id}) : \mathbb{A}(t)^n \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{A}(t)^k \times \mathbb{R}^N$, определим уравнениями

$$y^j + \mathring{Y}^j = f^j(x^1, \dots, x^n) + \sum_{|p|\geq 1}^{\infty} \frac{1}{p!}\frac{\partial^{|p|} f^j(x^1, \dots, x^n)}{\partial x^p}\mathring{X}^p, \tag{6}$$

где $p = (p_1, \dots, p_n)$ — мультииндекс.

Для открытого подмножества $U \subset \mathbb{R}^n$ полагаем $\widetilde{T}^{\mathbb{A}(t)}(U \times \mathbb{R}^N) = (\pi^n_{\mathbb{A}(t)})^{-1}(U \times \mathbb{R}^N)$, где $\pi_{\mathbb{A}(t)} : \mathbb{A}(t)\times\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}\times\mathbb{R}^N$ — послойный эпиморфизм алгебр, а на морфизмах $f\times\mathrm{id} : U\times\mathbb{R}^N \to V\times\mathbb{R}^N$ соответствие $\widetilde{T}^{\mathbb{A}(t)}$ определяется той же формулой (6).

Рассмотрим теперь произвольное n-мерное гладкое многообразие M с атласом, состоящим из набора карт $\{(U_\alpha, h_\alpha), \alpha \in I\}$ с функциями склейки $h_{\alpha\beta} = h_\alpha \circ h_\beta^{-1} : h_\beta(U_{\alpha\beta}) \to h_\alpha(U_{\alpha\beta})$. Тогда набор $\{(U_\alpha \times \mathbb{R}^N, h_\alpha \times \mathrm{id}), \alpha \in I\}$ является атласом на $M \times \mathbb{R}^N$. Набор $\mathcal{FM}^N$-морфизмов $\{\widetilde{T}^{\mathbb{A}(t)}(h_{\alpha\beta} \times \mathrm{id})\}$ позволяет склеить между собой набор областей $\{\widetilde{T}^{\mathbb{A}(t)}(U_\alpha \times \mathbb{R}^N) = U_\alpha \times N^k \times \mathbb{R}^N\}$. При этом получаем тотальное пространство расслоения $\widetilde{T}^{\mathbb{A}(t)}(M \times \mathbb{R}^N) \to M \times \mathbb{R}^N$. Если $f : M \to M'$ — гладкое отображение n-мерного многообразия M в k-мерное многообразие M', то, предполагая, что $\widetilde{T}^{\mathbb{A}(t)}(f \times \mathrm{id})$ — морфизм из категории $\mathcal{FM}^N$, задаем его локально уравнениями (6). При этом, очевидно, выполняются соотношения $\widetilde{T}^{\mathbb{A}(t)}(f \circ g) = \widetilde{T}^{\mathbb{A}(t)}(f) \circ \widetilde{T}^{\mathbb{A}(t)}(g)$ и $\widetilde{T}^{\mathbb{A}(t)}(\mathrm{id}) = \mathrm{id}$. Поэтому $\widetilde{T}^{\mathbb{A}(t)}$ — ковариантный функтор из категории $\mathcal{M}f \times \mathbb{R}^N$ в категорию $\mathcal{FM}^N$.

Определение 3. Построенный выше функтор $\widetilde{T}^{\mathbb{A}(t)} : \mathcal{M}f \times \mathbb{R}^N \to \mathcal{FM}^N$ будем называть N-параметрическим семейством функторов Вейля.

В случае, когда алгебра $\mathbb{A}(t)$ не зависит от t, а $N = 1$, расслоение $\widetilde{T}^{\mathbb{A}(t)}(M \times \mathbb{R})$ оказывается зависящим от времени расслоением Вейля $T^{\mathbb{A}}M \times \mathbb{R}$ [14].

Пусть (4) — произвольный расслоенный функтор, сохраняющий произведение. В этом случае ([2], с. 308) $F(\{\mathrm{pt}\} \times \mathbb{R}^N) = \{\mathrm{pt}\} \times \mathbb{R}^N$. Обозначим символом $\overline{F}$ ограничение функтора F на подкатегорию $\mathcal{M}f \times \mathbb{R}^N$. Функтор $\overline{F}$ также сохраняет произведение. Отображение в общем случае уже зависит от параметров t.

Рассмотрим композицию функторов

$$\overline{F}_t = R_t \circ F \circ R_{\mathrm{pt}} : \mathcal{M}f \to \mathcal{FM}.$$

Поскольку все функторы, входящие в эту композицию, сохраняют произведения в соответствующих категориях, и при этом обладают соответствующими свойствами локализации, то функтор $\overline{F}_t$ сохраняет произведение и является расслоенным функтором. Тогда по известной теореме Кайнца–Михора–Эка–Лучиано ([2], с. 308) функтор $\overline{F}_t$ естественно эквивалентен функтору Вейля $T_t^{\mathbb{A}(t)}$ для некоторой алгебры Вейля $\mathbb{A}(t)$.

Далее, $\mathcal{M}f^N$-объект $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ обладает тривиальной структурой расслоения на алгебры, которая задается атласом векторного расслоения, состоящим из одной тождественной карты. Кроме того, имеется операция

$$m = m_0 \times \mathrm{id} : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N) \times_{\mathbb{R}^N} (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N) \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N,$$

где $m_0 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — умножение вещественных чисел, и определены нулевое и единичное сечения

$$0 : \{\mathrm{pt}\} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N, \quad t \mapsto (0, t); \qquad 1 : \{\mathrm{pt}\} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N, \quad t \mapsto (1, t).$$

Действие функтора $\overline{F}$ задает $\mathcal{M}f^N$-объект $F_0(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ и $\mathcal{FM}^N$-морфизмы

$$\begin{aligned}
\overline{F}(m) : (F_0(\mathbb{R}) \times F_0(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^N) &\to (F_0(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^N),\\
\overline{F}(m_\lambda) : (F_0(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^N) &\to (F_0(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^N),\\
\overline{F}(+) : (F_0(\mathbb{R}) \times F_0(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^N) &\to (F_0(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^N),\\
\overline{F}(0) : (\{\mathrm{pt}\} \times \mathbb{R}^N) &\to (F_0(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^N),\\
\overline{F}(1) : (\{\mathrm{pt}\} \times \mathbb{R}^N) &\to (F_0(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^N).
\end{aligned} \tag{7}$$

Слои расслоения $\overline{F}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)$ над $\mathbb{R}^N$ диффеоморфны многообразию $F_0(\mathbb{R})$ и обладают структурой локальной алгебры Вейля $\mathbb{A}(t)$ и, следовательно, векторного пространства, изоморфного некоторому $\mathbb{R}^m$. Покажем, что это расслоение представляет собой расслоение на алгебры $\mathbb{A}(t) \times \mathbb{R}^N$. Действительно, как объект категории $\mathcal{M}f^N$, расслоение $\overline{F}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}^N$ изоморфно произведению $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^N$. Пусть $\varphi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^N \to \overline{F}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)$ — некоторый такой изоморфизм. Касательное отображение $T\varphi$ отображает вертикальные касательные пространства к $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^N$, взятые вдоль нулевого сечения, на касательные пространства к слоям $\mathbb{A}(t)$ в точках $x(t)$ образа нулевого сечения $\varphi(0 \times \mathbb{R}^N)$. В результате получаем гладко зависящий от t изоморфизм векторных пространств $\mathbb{R}^m$ и $T_{x(t)}\mathbb{A}(t)$, который задает гладко зависящий от t изоморфизм $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{A}(t)$. Таким образом, отображение $\overline{F}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N) = \mathbb{A}(t) \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ представляет собой векторное расслоение, а вместе с гладкими отображениями (6) это векторное расслоение превращается в семейство локальных алгебр Вейля $\mathbb{A}(t) \times \mathbb{R}^N$.

Отсюда вытекает

Теорема 1. *Для всякого расслоенного функтора* (4), *сохраняющего произведение, функтор* $\overline{F} : \mathcal{M}f \times \mathbb{R}^N \to \mathcal{FM}^N$ *естественно эквивалентен некоторому* N*-параметрическиму семейству функторов Вейля* $\widetilde{T}^{\mathbb{A}(t)}$.

5. Функторы на категории $\mathcal{M}f^N$

Обозначим символом Φ функтор из категории $\mathcal{M}f^N$ в категорию $\mathcal{M}f \times \mathbb{R}^N$, относящий расслоению $M \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ расслоение $(M \times \mathbb{R}^N) \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, а морфизму $f : M \times \mathbb{R}^N \to W \times \mathbb{R}^N$, $(x,t) \mapsto (f(x,t),t)$ морфизм $\Phi(f) : (M \times \mathbb{R}^N) \times \mathbb{R}^N \to (W \times \mathbb{R}^N) \times \mathbb{R}^N$, $((x,s),t) \mapsto ((f(x,s),s)t)$. Сечение $\sigma_M : M \times \mathbb{R}^N \to (M \times \mathbb{R}^N) \times \mathbb{R}^N$, $\sigma_M(x,t) = ((x,t),t)$ определяет естественное преобразование функторов $\sigma : \mathrm{Id}_{\mathcal{M}f^N} \to \Phi$. Действительно, имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc}
M \times \mathbb{R}^N & \xrightarrow{f} & W \times \mathbb{R}^N & \qquad & (x,t) & \xrightarrow{f} & (y = f(x,t),t) \\
{\scriptstyle \sigma_M}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \sigma_W} & & {\scriptstyle \sigma_M}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \sigma_W} \\
(M \times \mathbb{R}^N) \times \mathbb{R}^N & \xrightarrow{\Phi(f)} & (W \times \mathbb{R}^N) \times \mathbb{R}^N, & & ((x,t),t) & \xrightarrow{\Phi(f)} & ((y = f(x,t),t),t).
\end{array} \tag{8}$$

Применяя функтор $F : \mathcal{M}f^N \to \mathcal{F}\mathcal{M}^N$, сохраняющий произведение, к диаграмме (8), получаем диаграмму, в которой нижняя строка будет представлять собой морфизм $\overline{F}(\Phi(f))$:

$$\begin{array}{ccccccc}
F(M \times \mathbb{R}^N) & \xrightarrow{F(f)} & F(W \times \mathbb{R}^N) & \qquad & (X,t) & \xrightarrow{F(f)} & (Y,t) \\
{\scriptstyle F(\sigma_M)}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle F(\sigma_W)} & & {\scriptstyle F(\sigma_M)}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle F(\sigma_W)} \\
F((M \times \mathbb{R}^N) \times \mathbb{R}^N) & \xrightarrow{(F\Phi)(f)} & F((W \times \mathbb{R}^N) \times \mathbb{R}^N), & & ((X,S),t) & \xrightarrow{(F\Phi)(f)} & ((Y,S),t).
\end{array} \tag{9}$$

Выясним теперь, что представляет собой $F(\sigma_M)$. Поскольку $\sigma_M : (x,t) \mapsto ((x, s = t), t)$, то σ_M можно рассматривать как произведение двух морфизмов $\mathrm{id}_{M \times \mathbb{R}^N}$ и $\sigma_{\mathrm{pt}} : \mathrm{pt} \times \mathbb{R}^N \to (\mathrm{pt} \times \mathbb{R}^N) \times \mathbb{R}^N$. Так как $F(\mathrm{id}_{M \times \mathbb{R}^N}) = \mathrm{id}_{F_0(M) \times \mathbb{R}^N}$, то $F(\sigma_M)$ полностью определяется образом $F(\sigma_{\mathrm{pt}}) : \mathrm{pt} \times \mathbb{R}^N \to (F_0(\mathrm{pt} \times \mathbb{R}^N)) \times \mathbb{R}^N$, представляющим собой сечение $\mathbb{R}^N \to \mathbb{A}(t)^N \times \mathbb{R}^N$. Это сечение имеет вид $F(\sigma_{\mathrm{pt}}) : t \mapsto (S(t),t)$, где $S^a = t^a + \mathring{S}^a(t)$, $\mathring{S}^a \in \mathring{\mathbb{A}}(t)$, $a = 1,\ldots,N$. Таким образом, $F(\sigma_M)$ однозначно определяется набором гладких фунций $\mathbb{R}^N \ni t \mapsto \mathring{S}^a(t) \in \mathring{A}(t)$, $a = 1,\ldots,N$.

Так как в нижней строке диаграммы (8) стоит $\mathcal{M}f \times \mathbb{R}^N$-морфизм, то в локальных координатах эта строка имеет вид, аналогичный (2) (см. [3])

$$Y^i = f^i(x,t) + \sum_{|r+s|=1}^{q} \frac{1}{p!s!} \frac{\partial^{|r+s|} f^i}{\partial x^r \partial t^s} \mathring{X}^r \mathring{S}^s,$$

а верхняя строка в локальных координатах принимает вид

$$Y^i = f^i(x,t) + \sum_{|r+s|=1}^{q} \frac{1}{p!s!} \frac{\partial^{|r+s|} f^i}{\partial x^r \partial t^s} \mathring{X}^r (\mathring{S}(t))^s. \tag{10}$$

Таким образом, морфизм $F(f)$ в локальных координатах задается уравнениями (10), действие функтора F на морфизмах полностью определяется набором функций $\mathbb{R}^N \ni t \mapsto \mathring{S}^a(t) \in \mathring{A}(t)$, $a = 1,\ldots,N$, задающих сечение $F(\sigma_{\mathrm{pt}})$.

Уравнения (10) можно переписать в виде

$$Y^i = f^i(x,t) + \sum_{|r|=0}^{q} \frac{1}{r!} \frac{\partial^{|r|}}{\partial x^r} \left\{ \sum_{|s|=1}^{q} \frac{1}{s!} \frac{\partial^{|s|} f^i}{\partial t^s} (\mathring{S}(t))^s \right\} \mathring{X}^r = \widehat{f}^i(x,t) + \sum_{|r|=1}^{q} \frac{1}{r!} \frac{\partial^{|r|} \widehat{f}^i}{\partial x^r} \mathring{X}^r,$$

где

$$\widehat{f}^i(x,t) = f^i(x,t) + \sum_{|s|=1}^{q} \frac{1}{s!} \frac{\partial^{|s|} f^i}{\partial t^s} (\mathring{S}(t))^s,$$

откуда следует, что ограничение морфизма $F(f)$ на всякий слой над $\mathbb{R}^N$ представляет собой $\mathbb{A}(t)$-гладкое отображение.

В итоге получена

Теорема 2. *Всякий расслоенный функтор $F : \mathcal{M}f^N \to \mathcal{FM}^N$, сохраняющий произведение, однозначно определяется N-параметрическим семейством функторов Вейля $\widetilde{T}^{\mathbb{A}(t)}$ и набором функций $\mathbb{R}^N \ni t \mapsto \overset{\circ}{S}{}^a(t) \in \overset{\circ}{A}(t)$, $a = 1, \ldots, N$.*

Примерами функторов $\mathcal{M}f^N \to \mathcal{FM}^N$, сохраняющих произведение, являются обобщенный функтор Вейля $\widehat{T}^{\mathbb{A}}$ (см. [10]), относящий расслоению $p : M \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ расслоение $\pi : \widehat{T}^{\mathbb{A}}(M \times \mathbb{R}^N) \to M \times \mathbb{R}^N$, тотальное пространство которого состоит из $\mathbb{A}$-скоростей сечений расслоения p, и вертикальный функтор Вейля, относящий расслоению p расслоение $\pi' : V^{\mathbb{A}}(M \times \mathbb{R}^N) \to M \times \mathbb{R}^N$, тотальное пространство которого состоит из $\mathbb{A}$-скоростей в слоях расслоения p. Этим двум функторам соответствуют постоянные функции $\overset{\circ}{S}{}^a(t) = \varepsilon^a$ и $\overset{\circ}{S}{}^a(t) = 0$, где ε^a — элементы псевдобазиса алгебры $\mathbb{A}$ ([15], [3]), соответствующие переменным t^a.

Литература

1. Weil A. *Théorie des points proches sur les variététes différentiables* // Colloque internat. centre nat. rech. sci. – Strasbourg, 1953. – V. 52. – P. 111–117.
2. Kolář I., Michor P., Slovák J. *Natural operations in differential geometry.* – Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 1993. – 434 p.
3. Шурыгин В.В. *Гладкие многообразия над локальными алгебрами и расслоения Вейля* // Итоги науки и техн. Современ. матем. и ее прилож. Тематич. обзоры. – М.: ВИНИТИ, 2002. – Т. 73. – С. 162–236.
4. Shurygin V.V. *The structure of smooth mappings over Weil algebras and the category of manifolds over algebras* // Lobachevskii J. Math. – 1999. – V. 5. – P. 29–55.
5. Широков А.П. *Геометрия касательных расслоений и пространства над алгебрами* // Итоги науки и техн. Пробл. геометрии. – М.: ВИНИТИ, 1981. – Т. 12. – С. 61–95.
6. Султанов А.Я. *Продолжения тензорных полей и связностей на расслоения Вейля* // Изв. вузов. Математика. – 1999. – № 9. – С. 64–72.
7. Morimoto A. *Prolongation of connections to bundles of infinitely near points* // J. Different. Geom. – 1976. – V. 11. – № 4. – P. 479–498.
8. Patterson L.-N. *Connexions and prolongations* // Canad. J. Math. – 1975. – V. 27. – № 4. – P. 766–791.
9. Yuen P.C. *Sur la notion d'une G-structure déométrique et les A-prolongements de G-structures* // C. R. Acad. Sci. – 1970. – V. 270. – № 24. – P. A1589–A1592.
10. Бушуева Г.Н. *Расслоения Вейля над многообразиями, зависящими от параметров* // Движения в обобщенных пространствах. – Пенза, 2002. – С. 24–34.
11. Kolář I., Mikulski W.M. *On the fiber product preserving bundle functors* // Differ. Geom. and Appl. – 1999. – V. 11. – P. 105–115.
12. Mikulski W.M. *Product preserving bundle functors on fibered manifolds* // Archiv. Math. – 1996. – V. 32. – P. 307–316.
13. Ленг С. *Алгебра.* – М.: Мир, 1968. – 564 с.
14. Doupovec M., Kolář I. *Natural affinors on time-dependent Weil bundles* // Arch. Math. – 1991. – V. 27. – P. 205–209.
15. Вагнер В.В. *Алгебраическая теория касательных пространств высших порядков* // Тр. семин. по векторн. и тензорн. анализу. – М.: МГУ. – 1956. – Вып. 10. – С. 31–88.

Казанский государственный университет

Поступила 28.12.2004