ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2004 МАТЕМАТИКА № 3 (502)

УДК 517.983

А.В. КАЛИНИН, А.А. КАЛИНКИНА

L_p-ОЦЕНКИ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

При решении математических проблем гидродинамики и электромагнитной теории важную роль играют различные оценки, связывающие нормы вектор-функции, ее ротора и дивергенции в пространствах Лебега. В частности, глубокие результаты в этом направлении и их приложения к решению конкретных задач содержатся в [1]–[9]. В данной работе исследуется возможность получения подобных оценок с использованием некоторых представлений векторных полей, рассмотренных в [10].

1. Обозначения. Пусть $\Omega \in R^3$ — открытая односвязная область с регулярной границей Γ, $\overline{\Omega}$ — замыкание Ω в R^3, $\mathbf{n}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Gamma$, — единичный вектор внешней нормали. Через $\mathcal{D}(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)$ обозначено пространство пробных функций $\varphi : \Omega \to R^1$; через $\{\mathcal{D}(\Omega)\}^3$ — пространство пробных функций $\boldsymbol{\varphi} : \Omega \to R^3$ ($\boldsymbol{\varphi} = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$, $\varphi_i \in \mathcal{D}(\Omega)$, $i = 1, 2, 3$); $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ — множество функций, являющихся сужениями на Ω функций из $\mathcal{D}(R^3)$; $D'(\Omega)$ — пространство распределений (обобщенных функций) ([3], с. 19).

Пусть $\{L_p(\Omega)\}^3$, $1 \le p < \infty$, — банаховы пространства суммируемых со степенью p вектор-функций $\mathbf{u} : \Omega \to R^3$ с соответствующими нормами

$$\|\mathbf{u}\|_{\{L_p(\Omega)\}^3} = \left\{ \int_\Omega |\mathbf{u}(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} \right\}^{1/p};$$

здесь $|\mathbf{u}(\mathbf{x})| = (u_1^2(\mathbf{x}) + u_2^2(\mathbf{x}) + u_3^2(\mathbf{x}))^{1/2}$. При $p = 2$ пространство $\{L_2(\Omega)\}^3$ является гильбертовым со скалярным произведением $(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\{L_2\Omega\}^3} = \int_\Omega (\mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x})) d\mathbf{x}$.

Будем говорить, что $\operatorname{div} \mathbf{u} = g \in L_p(\Omega)$ для функции $\mathbf{u} \in \{L_1(\Omega)\}^3$, если

$$\int_\Omega g\varphi d\mathbf{x} = -\int_\Omega (\operatorname{grad} \varphi \cdot \mathbf{u}) d\mathbf{x} \quad \text{при всех} \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \text{и}$$

$\operatorname{rot} \mathbf{u} = \mathbf{h} \in \{L_p(\Omega)\}^3$, если

$$\int_\Omega (\mathbf{h} \cdot \boldsymbol{\psi}) d\mathbf{x} = \int_\Omega (\operatorname{rot} \boldsymbol{\psi} \cdot \mathbf{u}) d\mathbf{x} \quad \text{при всех} \quad \boldsymbol{\psi} \in \{\mathcal{D}(\Omega)\}^3.$$

Определим следующие пространства вектор-функций:

$$H_p(\operatorname{div}; \Omega) = \{\mathbf{u} \in \{L_p(\Omega)\}^3 \mid \operatorname{div} \mathbf{u} \in L_p(\Omega)\},$$
$$H_p(\operatorname{rot}; \Omega) = \{\mathbf{u} \in \{L_p(\Omega)\}^3 \mid \operatorname{rot} \mathbf{u} \in \{L_p(\Omega)\}^3\}.$$

Лемма 1.1. $H_p(\operatorname{div}; \Omega)$, $H_p(\operatorname{rot}; \Omega)$ — *банаховы пространства с соответствующими нормами*

$$\|\mathbf{u}\|_{H_p(\operatorname{div}; \Omega)} = \{\|\mathbf{u}\|^p_{\{L_p(\Omega)\}^3} + \|\operatorname{div} \mathbf{u}\|^p_{L_p(\Omega)}\}^{1/p},$$
$$\|\mathbf{u}\|_{H_p(\operatorname{rot}; \Omega)} = \{\|\mathbf{u}\|^p_{\{L_p(\Omega)\}^3} + \|\operatorname{rot} \mathbf{u}\|^p_{\{L_p(\Omega)\}^3}\}^{1/p}.$$

Через $H_p^0(\operatorname{div}; \Omega)$ и $H_p^0(\operatorname{rot}; \Omega)$ обозначим замыкание множества $\{\mathcal{D}(\Omega)\}^3$ в $H_p(\operatorname{div}; \Omega)$ и в $H_p(\operatorname{rot}; \Omega)$ соответственно.

Замечание. Если ограниченная область Ω имеет гладкую границу, то при $p = 2$ можно показать, что

$$H_0(\mathrm{div};\Omega) = H_2^0(\mathrm{div};\Omega) = \{\mathbf{u} \in H(\mathrm{div};\Omega),\ \mathbf{u} \times \mathbf{n} = 0,\ \mathbf{x} \in \Gamma\},$$
$$H_0(\mathrm{rot};\Omega) = H_2^0(\mathrm{rot};\Omega) = \{\mathbf{u} \in H(\mathrm{rot};\Omega),\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0,\ \mathbf{x} \in \Gamma\},$$

где граничные операторы понимаются в смысле теории следов ([4], с. 19; [5], с. 315).

2. Основные результаты. Неравенства, приведенные в теоремах 2.1–2.3, будут доказаны в п. 4 на основании рассмотренных в п. 3 представлений вектор-функций в звездных областях.

Пусть $\Omega \subset R^3$ — открытое ограниченное множество с диаметром $d(\Omega) > 0$, звездное относительно некоторой точки.

Теорема 2.1. *При $p > 3/2$, $q = p/(p-1)$ существует положительная постоянная C_1, зависящая только от области Ω и p, такая, что при любых $\mathbf{u} \in H_p(\mathrm{div};\Omega)$, $\mathbf{v} \in H_q^0(\mathrm{rot};\Omega)$ будет справедливо неравенство*

$$\left| \int_\Omega (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) dx \right| \le C_1 \big(\|\mathbf{u}\|_{\{L_p(\Omega)\}^3} \| \mathrm{rot}\, \mathbf{v}\|_{\{L_q(\Omega)\}^3} + \|\mathbf{v}\|_{\{L_q(\Omega)\}^3} \| \mathrm{div}\, \mathbf{u}\|_{L_p(\Omega)} \big). \tag{2.1}$$

Теорема 2.2. *При $p > 3/2$, $q = p/(p-1)$ существует положительная постоянная C_2, зависящая только от области Ω и p, такая, что при любых $\mathbf{u} \in H_q^0(\mathrm{div};\Omega)$, $\mathbf{v} \in H_p(\mathrm{rot};\Omega)$ будет справедливо неравенство*

$$\left| \int_\Omega (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) dx \right| \le C_2 (\|\mathbf{u}\|_{\{L_q(\Omega)\}^3} \| \mathrm{rot}\, \mathbf{v}\|_{\{L_p(\Omega)\}^3} + \\ + \|\mathbf{v}\|_{\{L_p(\Omega)\}^3} \| \mathrm{div}\, \mathbf{u}\|_{L_q(\Omega)} + \| \mathrm{rot}\, \mathbf{v}\|_{\{L_p(\Omega)\}^3} \| \mathrm{div}\, \mathbf{u}\|_{L_q(\Omega)}). \tag{2.2}$$

Теорема 2.3. *При $p > 3$, $q = p/(p-1)$ существует положительная постоянная C_3, зависящая только от области Ω и p, такая, что при любых $\mathbf{u} \in H_q^0(\mathrm{div};\Omega)$, $\mathbf{v} \in H_p(\mathrm{rot};\Omega)$ справедливо неравенство*

$$\left| \int_\Omega (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) d\mathbf{x} \right| \le C_3 (\|\mathbf{u}\|_{\{L_q(\Omega)\}^3} \| \mathrm{rot}\, \mathbf{v}\|_{\{L_p(\Omega)\}^3} + \|\mathbf{v}\|_{\{L_p(\Omega)\}^3} \| \mathrm{div}\, \mathbf{u}\|_{L_q(\Omega)}). \tag{2.3}$$

3. Предварительные утверждения. Справедлива

Теорема 3.1. *Пусть $\Omega \subset R^3$ — открытая, ограниченная, локально-звездная область. Тогда множество вектор-функций, принадлежащих $\{\mathcal{D}(\overline{\Omega})\}^3$ плотно в пространствах $H_p(\mathrm{div};\Omega)$ и $H_p(\mathrm{rot};\Omega)$.*

Доказательство этой теоремы для $p = 2$ ([4], с. 14; [5], с. 314) практически без изменений переносится на случай $1 \le p < \infty$.

Пусть область $\Omega \subset R^3$ звездна относительно некоторой точки $\mathbf{y} \in \Omega$. Непосредственно проверяется

Теорема 3.2. *Для всех $\mathbf{u} \in \{C^1(\Omega)\}^3$ справедливы тождества*

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathrm{grad}_{\mathbf{x}} \left\{ \int_0^1 \mathbf{u}(\mathbf{z}_\tau(\mathbf{x},\mathbf{y})) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\tau \right\} + \int_0^1 \tau [\mathrm{rot}_{\mathbf{z}}\, \mathbf{u}(\mathbf{z}_\tau(\mathbf{x},\mathbf{y})) \times (\mathbf{x} - \mathbf{y})] d\tau, \tag{3.1}$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathrm{rot}_{\mathbf{x}} \left\{ \int_0^1 \tau [\mathbf{u}(\mathbf{z}_\tau(\mathbf{x},\mathbf{y})) \times (\mathbf{x} - \mathbf{y})] d\tau \right\} + \int_0^1 \tau^2 (\mathbf{x} - \mathbf{y})\, \mathrm{div}_{\mathbf{z}}\, \mathbf{u}(\mathbf{z}_\tau(\mathbf{x},\mathbf{y})) d\tau. \tag{3.2}$$

Здесь $\mathbf{z}_\tau(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{y} + \tau(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \in \Omega$, $\mathrm{rot}_{\mathbf{z}}\, \mathbf{u}(\mathbf{z}_\tau(\mathbf{x},\mathbf{y})) = \mathrm{rot}_{\mathbf{z}}\, \mathbf{u}(\mathbf{z})$ в точке $\mathbf{z} = \mathbf{z}_\tau(\mathbf{x},\mathbf{y})$, аналогично $\mathrm{div}_{\mathbf{z}}\, \mathbf{u}(\mathbf{z}_\tau(\mathbf{x},\mathbf{y})) = \mathrm{div}_{\mathbf{z}}\, \mathbf{u}(\mathbf{z})$ в точке $\mathbf{z} = \mathbf{z}_\tau(\mathbf{x},\mathbf{y})$.

Пусть $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$, $\mathbf{s} = (\mathbf{x} - \mathbf{y})/r \in S = \{\boldsymbol{\theta} \in R^3,\ |\boldsymbol{\theta}| = 1\}$, $\xi = \tau r$. Тогда тожества (3.1), (3.2) запишутся в виде

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \operatorname{grad}_{\mathbf{x}} \left\{ \int_0^r (\mathbf{u}(\mathbf{y} + \xi\mathbf{s}) \cdot \mathbf{s}) d\xi \right\} + \frac{1}{r} \int_0^r \xi [\operatorname{rot} \mathbf{u}(\mathbf{y} + \xi\mathbf{s}) \times \mathbf{s}] d\xi, \tag{3.3}$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \operatorname{rot}_{\mathbf{x}} \left\{ \int_0^r \xi [\mathbf{u}(\mathbf{y} + \xi\mathbf{s}) \times \mathbf{s}] d\xi \right\} + \frac{\mathbf{s}}{r^2} \int_0^r \xi^2 \operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{y} + \xi\mathbf{s}) d\xi. \tag{3.4}$$

Получим некоторые оценки для интегралов, присутствующих в (3.1)–(3.4).

Пусть $\Omega \subset R^3$ — открытое ограниченное множество с диаметром $d(\Omega) > 0$, звездное относительно некоторой точки $\mathbf{y} \in \Omega$. Для каждого $m > -1$ и функций $\varphi \in C(\overline{\Omega})$ и $\boldsymbol{\varphi} \in \{C(\overline{\Omega})\}^3$ определим функции $Q_m(\varphi) : \Omega \to R^1$, $\mathbf{Q}_m(\boldsymbol{\varphi}) : \Omega \to R^3$ соотношениями

$$Q_m(\varphi)(\mathbf{x}) = r^{-m} \int_0^r \xi^m \varphi(\mathbf{y} + \xi\mathbf{s}) d\xi, \tag{3.5}$$

$$\mathbf{Q}_m(\boldsymbol{\varphi})(\mathbf{x}) = r^{-m} \int_0^r \xi^m \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y} + \xi\mathbf{s}) d\xi. \tag{3.6}$$

Лемма 3.1. *При всех $m > -1$, $q > \max\{1, 3/(m+1)\}$ существует такая положительная постоянная $C_m(q, \Omega) > 0$, зависящая только от m, q и области Ω, что для любых $\varphi \in C(\overline{\Omega})$ справедливо неравенство*

$$\|Q_m(\varphi)\|_{L_q(\Omega)} \le C_m(q, \Omega) \|\varphi\|_{L_q(\Omega)}. \tag{3.7}$$

Доказательство. Имеем

$$|Q_m(\varphi)(\mathbf{x})| \le r^{-m} \int_0^r \xi^m |\varphi(\mathbf{y} + \xi\mathbf{s})| d\xi = r^{-m} \int_0^r \xi^{m - \frac{2}{q}} \xi^{\frac{2}{q}} |\varphi(\mathbf{y} + \xi\mathbf{s})| d\xi \le$$

$$\le r^{-m} \left\{ \int_0^r \xi^{(m - \frac{2}{q})\frac{q}{q-1}} d\xi \right\}^{\frac{q-1}{q}} \left\{ \int_0^r \xi^2 |\varphi(\mathbf{y} + \xi\mathbf{s})|^q d\xi \right\}^{1/q} =$$

$$= \left(\frac{q-1}{q(m+1) - 3} \right)^{\frac{q-1}{q}} r^{\frac{q-3}{q}} \left\{ \int_0^r \xi^2 |\varphi(\mathbf{y} + \xi\mathbf{s})|^q d\xi \right\}^{1/q}.$$

Пусть, далее, $R_{\mathbf{s}}(\mathbf{y}) = \sup\{r \in R^1 : \mathbf{y} + r\mathbf{s} \in \Omega\}$ $(0 < R_{\mathbf{s}}(\mathbf{y}) < d(\Omega))$, $d\mathbf{s}$ — элемент площади единичной сферы S. Тогда получим

$$\|Q_m(\varphi)\|^q_{L_q(\Omega)} = \int_S d\mathbf{s} \int_0^{R_{\mathbf{s}}(\mathbf{y})} r^2 |Q_m(\varphi)(\mathbf{y} + r\mathbf{s})|^q dr \le$$

$$\le A \int_S d\mathbf{s} \int_0^{R_{\mathbf{s}}(\mathbf{y})} r^{q-1} \int_0^r \xi^2 |\varphi(\mathbf{y} + \xi\mathbf{s})|^q d\xi dr \le$$

$$\le A \int_S d\mathbf{s} \int_0^{R_{\mathbf{s}}(\mathbf{y})} r^{q-1} \int_0^{R_{\mathbf{s}}(\mathbf{y})} \xi^2 |\varphi(\mathbf{y} + \xi\mathbf{s})|^q d\xi dr \le$$

$$\le A \int_S d\mathbf{s} \frac{R_{\mathbf{s}}(\mathbf{y})}{q} \int_0^{R_{\mathbf{s}}(\mathbf{y})} \xi^2 |\varphi(\mathbf{y} + \xi\mathbf{s})|^q d\xi dr \le$$

$$\le A \frac{(d(\Omega))^q}{q} \int_S d\mathbf{s} \int_0^{R_{\mathbf{s}}(\mathbf{y})} \xi^2 |\varphi(\mathbf{y} + \xi\mathbf{s})|^q d\xi dr = A \left(\frac{d(\Omega)}{q^{1/q}} \|\varphi\|_{L_q(\Omega)} \right)^q,$$

$$A = \left(\frac{q-1}{q(m+1) - 3} \right)^{q-1}.$$

Остается положить

$$C_m(q, \Omega) = A^{1/q} \frac{d(\Omega)}{q^{1/q}}. \quad \square \tag{3.8}$$

В частности, из леммы 3.1 следуют справедливые при всех $\varphi \in C(\overline{\Omega})$ оценки

$$\|Q_0(\varphi)\|_{L_q(\Omega)} \le \left(\frac{q-1}{q-3}\right)^{\frac{q-1}{q}} \frac{d(\Omega)}{q^{1/q}} \|\varphi\|_{L_q(\Omega)}, \quad q > 3,$$

$$\|Q_1(\varphi)\|_{L_q(\Omega)} \le \left(\frac{q-1}{2q-3}\right)^{\frac{q-1}{q}} \frac{d(\Omega)}{q^{1/q}} \|\varphi\|_{L_q(\Omega)}, \quad q > \frac{3}{2},$$

$$\|Q_2(\varphi)\|_{L_q(\Omega)} \le \frac{3^{1/q} d(\Omega)}{3q^{1/q}} \|\varphi\|_{L_q(\Omega)}, \qquad q > 1.$$

Для функции $\boldsymbol{\varphi} \in \{C(\overline{\Omega})\}^3$, применяя лемму 3.1 к функции $|\boldsymbol{\varphi}| \in C(\overline{\Omega})$, имеем

$$\|\mathbf{Q}_m(\boldsymbol{\varphi})\|_{\{L_q(\Omega)\}^3} \le \|Q_m(|\boldsymbol{\varphi}|)\|_{L_q(\Omega)} \le C_m(q,\Omega) \| |\boldsymbol{\varphi}| \|_{L_q(\Omega)} = C_m(q,\Omega)\|\boldsymbol{\varphi}\|_{\{L_q(\Omega)\}^3}.$$

Полученные оценки показывают, что оператор Q_m, рассматриваемый как отображение из $L_q(\Omega)$ в $L_q(\Omega)$, непрерывен на множестве $C(\overline{\Omega})$, плотном в $L_q(\Omega)$. Следовательно, его можно продолжить до некоторого линейного ограниченного оператора, обозначаемого в дальнейшем также через Q_m, определенного на всем пространстве $L_q(\Omega)$. Оценка (3.7) остается справедливой и для этого оператора.

Аналогично, оператор $\mathbf{Q}_m$ продолжается по непрерывности на $\{L_q(\Omega)\}^3$.

Теорема 3.3. *Пусть $\Omega \subset R^3$ — открытое ограниченное множество, звездное относительно некоторой точки $y \in \Omega$. Для всех $\mathbf{u} \in H_p(\mathrm{div};\Omega)$ при $p > 3/2$ справедливо тождество*

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathrm{rot}_{\mathbf{x}}[\mathbf{Q}_1(\mathbf{u}) \times \mathbf{s}] + \mathbf{s}Q_2(\mathrm{div}\,\mathbf{u}). \tag{3.9}$$

Доказательство. Пусть $\mathbf{u} \in H_p(\mathrm{div};\Omega)$, $p > 3/2$. Согласно теореме 3.1 найдется последовательность $\{\mathbf{u}_n\} \subset \{\mathcal{D}(\overline{\Omega})\}^3$ такая, что $\mathbf{u}_n \to \mathbf{u}$ при $n \to \infty$ в $H_p(\mathrm{div};\Omega)$. Для всех $\mathbf{u}_n$ справедливо представление (3.3), которое с учетом (3.5), (3.6) можно записать в виде

$$\mathbf{u}_n(\mathbf{x}) = \mathrm{rot}_{\mathbf{x}}[\mathbf{Q}_1(\mathbf{u}_n) \times \mathbf{s}] + \mathbf{s}Q_2(\mathrm{div}\,\mathbf{u}_n). \tag{3.10}$$

Ввиду (3.7) $\mathbf{u}_n \to \mathbf{u}$, $\mathbf{s}Q_2(\mathrm{div}\,\mathbf{u}_n) \to \mathbf{s}Q_2(\mathrm{div}\,\mathbf{u})$ в $\{L_p(\Omega)\}^3$ при $n \to \infty$.

Последовательность $\{\mathrm{rot}_{\mathbf{x}}[\mathbf{Q}_1(\mathbf{u}_n) \times \mathbf{s}]\}$, таким образом, фундаментальна в $\{L_p(\Omega)\}^3$, следовательно, сходится к некоторому элементу $\mathbf{v} \in \{L_p(\Omega)\}^3$. С другой стороны, $\mathrm{rot}_{\mathbf{x}}[\mathbf{Q}_1(\mathbf{u}_n) \times \mathbf{s}] \to \mathrm{rot}_{\mathbf{x}}[\mathbf{Q}_1(\mathbf{u}) \times \mathbf{s}]$ в пространстве распределений. Действительно,

$$\begin{aligned} |\langle \mathrm{rot}_{\mathbf{x}}[\mathbf{Q}_1(\mathbf{u}_n) \times \mathbf{s}] - \mathrm{rot}_{\mathbf{x}}[\mathbf{Q}_1(\mathbf{u}) \times \mathbf{s}], \boldsymbol{\psi}\rangle| &= |\langle [\mathbf{Q}_1(\mathbf{u}_n - \mathbf{u}) \times \mathbf{s}], \mathrm{rot}\,\boldsymbol{\psi}\rangle| \le \\ &\le C_1(p,\Omega)\|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}\|_{\{L_p(\Omega)\}^3} \|\mathrm{rot}\,\boldsymbol{\psi}\|_{\{L_p(\Omega)\}^3} \to 0 \end{aligned}$$

для любой $\boldsymbol{\psi} \in \{\mathcal{D}(\Omega)\}^3$. Так как функции $\mathrm{rot}_{\mathbf{x}}[\mathbf{Q}_1(\mathbf{u}) \times \mathbf{s}]$ и $\mathbf{v}$ определяют одинаковые распределения, то $\mathrm{rot}_{\mathbf{x}}[\mathbf{Q}_1(\mathbf{u}) \times \mathbf{s}] = \mathbf{v}$, и, переходя к пределу в равенстве (3.10), получим (3.9). $\square$

Теорема 3.4. *Пусть $\Omega \subset R^3$ — открытое ограниченное множество, звездное относительно некоторой точки. Для любой $\mathbf{u} \in H_p(\mathrm{rot};\Omega)$ при $p > 3/2$ найдется функция $Q \in L_p(\Omega)$ такая, что справедливо тождество*

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathrm{grad}_{\mathbf{x}}\, Q + [\mathbf{Q}_1(\mathrm{rot}\,\mathbf{u}) \times \mathbf{s}], \tag{3.11}$$

причем, если $p > 3$, можно взять $Q = (\mathbf{Q}_0(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{s})$. Дифференциальные операторы понимаются в смысле теории распределений.

Доказательство. Пусть $\mathbf{u} \in H_p(\mathrm{rot};\Omega)$, $p > 3/2$. Согласно теореме 3.1 найдется последовательность $\{\mathbf{u}_n\} \subset \{\mathcal{D}(\overline{\Omega})\}^3$ такая, что $\mathbf{u}_n \to \mathbf{u}$ при $n \to \infty$ в $H_p(\mathrm{rot};\Omega)$. Для всех $\mathbf{u}_n$ справедливо представление (3.4), которое с учетом (3.5), (3.6) можно записать в виде

$$\mathbf{u}_n(\mathbf{x}) = \mathrm{grad}_{\mathbf{x}}(\mathbf{Q}_0(\mathbf{u}_n) \cdot \mathbf{s}) + [\mathbf{Q}_1(\mathrm{rot}\,\mathbf{u}_n) \times \mathbf{s}]. \tag{3.12}$$

При $n \to \infty$ $\mathbf{u}_n \to \mathbf{u}$, $[\mathbf{Q}_1(\operatorname{rot}\mathbf{u}_n) \times \mathbf{s}] \to [\mathbf{Q}_1(\operatorname{rot}\mathbf{u}) \times \mathbf{s}]$ в $\{L_p(\Omega)\}^3$ ввиду (3.7).

Последовательность $\{\operatorname{grad}_{\mathbf{x}}(\mathbf{Q}_0(\mathbf{u}_n) \cdot \mathbf{s})\}$, таким образом, фундаментальна в $\{L_p(\Omega)\}^3$, следовательно, сходится к некоторому $\mathbf{v} \in \{L_p(\Omega)\}^3$. Известны следующие утверждения.

Лемма 3.2 ([4], с. 20) (характеризация градиента распределения). *Пусть $\Omega \subset R^3$ — открытое множество, $\mathbf{f} \in \{D'(\Omega)\}^3$, $V = \{\mathbf{v} \in \{D(\Omega)\}^3;\ \operatorname{div}\mathbf{v} = 0\}$. Для того чтобы $\mathbf{f} = \operatorname{grad} p$ для некоторого $p \in D'(\Omega)$, необходимо и достаточно, чтобы $\langle \mathbf{f}, \mathbf{v}\rangle = 0$ для всех $\mathbf{v} \in V$.*

Лемма 3.3 ([9], с. 26) (неравенство Пуанкаре). *Пусть $\Omega \subset R^3$ — область класса $C^{0,1}$, $p > 1$. Существует положительная постоянная $A(\Omega, p)$, при которой для каждой $u \in D'(\Omega)$ такой, что $\operatorname{grad} u \in \{L_p(\Omega)\}^3$, найдется такое число $C^* > 0$, что*

$$\|u - C^*\|_{L_p(\Omega)} \le A(\Omega, p)\|\operatorname{grad} u\|_{\{L_p(\Omega)\}^3}.$$

Следовательно, $\mathbf{v} = \operatorname{grad} Q$, где $Q \in L_p(\Omega)$ определена с точностью до аддитивной константы.

Если $p > 3$, то $\operatorname{grad}_{\mathbf{x}}(\mathbf{Q}_0(\mathbf{u}_n) \cdot \mathbf{s})$ стремится к $\operatorname{grad}_{\mathbf{x}}(\mathbf{Q}_0(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{s})$ в пространстве распределений, поэтому можно положить $Q = (\mathbf{Q}_0(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{s})$. Переходя к пределу в равенстве (3.12), получим (3.11). $\square$

Следствием теорем 3.3, 3.4 является

Лемма 3.4. *Пусть $\Omega \subset R^3$ — открытое ограниченное множество, звездное относительно некоторой точки. Для всех $\mathbf{u} \in H_p(\operatorname{div}; \Omega)$ $[\mathbf{Q}_1(\mathbf{u}) \times \mathbf{s}] \in H_p(\operatorname{rot}; \Omega)$. Для всех $\mathbf{u} \in H_p(\operatorname{rot}; \Omega)$ функция Q, определяемая теоремой 3.4, лежит в пространстве Соболева $W^{1,p}(\Omega)$.*

4. Доказательство основных неравенств. Для доказательства теоремы 2.1 положим $\mathbf{u} \in \{\mathcal{D}(\overline{\Omega})\}^3$, $\mathbf{v} \in \{\mathcal{D}(\Omega)\}^3$. Используя представление 3.9 для $\mathbf{u}$, получим

$$\int_\Omega (\mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}))d\mathbf{x} = \int_\Omega (\mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \operatorname{rot}_{\mathbf{x}}[\mathbf{Q}_1(\mathbf{u}) \times \mathbf{s}])d\mathbf{x} + \int_\Omega (\mathbf{v} \cdot \mathbf{s})Q_2(\operatorname{div}\mathbf{u})d\mathbf{x} =$$
$$= \int_\Omega (\operatorname{rot}\mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot [\mathbf{Q}_1(\mathbf{u}) \times \mathbf{s}])d\mathbf{x} + \int_\Omega (\mathbf{v} \cdot \mathbf{s})Q_2(\operatorname{div}\mathbf{u})d\mathbf{x} + \int_\Gamma ([\mathbf{v}(\mathbf{x}) \times [\mathbf{Q}_1(\mathbf{u}) \times \mathbf{s}]] \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}))d\Gamma.$$

Последний интеграл, получившийся в результате применения тождества

$$(\operatorname{rot}\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\operatorname{rot}\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}) + \operatorname{div}[\mathbf{a} \times \mathbf{b}]$$

и теоремы Гаусса–Остроградского, равен нулю за счет выбора $\mathbf{v}$. Используя неравенство Гёльдера с показателями p и q и оценки для Q_m, получим

$$\left|\int_\Omega (\mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}))d\mathbf{x}\right| \le \|\operatorname{rot}\mathbf{v}\|_{\{L_q(\Omega)\}^3}\|\mathbf{Q}_1(\mathbf{u})\|_{\{L_p(\Omega)\}^3} + \|\mathbf{v}\|_{\{L_q(\Omega)\}^3}\|Q_2(\operatorname{div}\mathbf{u})\|_{L_p(\Omega)} \le$$
$$\le C_1(\|\operatorname{rot}\mathbf{v}\|_{\{L_q(\Omega)\}^3}\|\mathbf{u}\|_{\{L_p(\Omega)\}^3} + \|\mathbf{v}\|_{\{L_q(\Omega)\}^3}\|\operatorname{div}\mathbf{u}\|_{L_p(\Omega)}),$$

где $C_1 = C_1(\Omega, p)$.

Согласно теореме о плотности и определению пространства $H_q^0(\operatorname{rot}; \Omega)$ найденная оценка справедлива для $\mathbf{u} \in H_p(\operatorname{div}; \Omega)$, $\mathbf{v} \in H_q^0(\operatorname{rot}; \Omega)$ и теорема 2.1 доказана.

Для доказательства теорем 2.2, 2.3 возьмем $\mathbf{v} \in \{\mathcal{D}(\overline{\Omega})\}^3$, $\mathbf{u} \in \{\mathcal{D}(\Omega)\}^3$. Из представления (3.11) для $\mathbf{v}$ и оценки для Q_1 получаем

$$\|\operatorname{grad}_{\mathbf{x}}(\mathbf{Q}_0(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{s})\|_{\{L_p(\Omega)\}^3} \le \|\mathbf{v}\|_{\{L_p(\Omega)\}^3} + \|\mathbf{Q}_1(\operatorname{rot}\mathbf{v})\|_{\{L_p(\Omega)\}^3} \le \|\mathbf{v}\|_{\{L_p(\Omega)\}^3} + C_1(\Omega, p)\|\operatorname{rot}\mathbf{v}\|_{\{L_p(\Omega)\}^3}.$$

Согласно лемме 3.3 найдется такое число $C^* > 0$, зависящее от $\mathbf{v}$, что

$$\|(\mathbf{Q}_0(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{s}) - C^*\|_{L_p(\Omega)} \le A(\Omega, p)\|\operatorname{grad}_{\mathbf{x}}(\mathbf{Q}_0(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{s})\|_{\{L_p(\Omega)\}^3} \le$$
$$\le A(\Omega, p)\|\mathbf{v}\|_{\{L_p(\Omega)\}^3} + A(\Omega, p)C_1(\Omega, p)\|\operatorname{rot}\mathbf{v}\|_{\{L_p(\Omega)\}^3}. \quad (4.1)$$

Далее,

$$\int_\Omega (\mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}))d\mathbf{x} = \int_\Omega (\mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \operatorname{grad}_{\mathbf{x}}\{(\mathbf{Q}_0(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{s}) - C^*\})d\mathbf{x} +$$
$$+ \int_\Omega (\mathbf{u} \cdot [\mathbf{Q}_1(\operatorname{rot}\mathbf{u}) \times \mathbf{s}])d\mathbf{x} = -\int_\Omega ((\mathbf{Q}_0(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{s}) - C^*) \operatorname{div}\mathbf{u} d\mathbf{x} +$$
$$+ \int_\Omega (\mathbf{u} \cdot [\mathbf{Q}_1(\operatorname{rot}\mathbf{u}) \times \mathbf{s}])d\mathbf{x} + \int_\Gamma ((\mathbf{Q}_0(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{s}) - \mathrm{C}^*)\mathbf{u}_n d\Gamma.$$

Последний интеграл, полученный в результате применения тождества

$$b \operatorname{div}\mathbf{a} = \operatorname{div} b\mathbf{a} - (\operatorname{grad} b \cdot \mathbf{a})$$

и теоремы Гаусса–Остроградского, равен нулю за счет выбора $\mathbf{u}$. Применяя неравенство Гёльдера с показателями p и q, оценки для Q_m и неравенство 4.1, получим

$$\left| \int_\Omega (\mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}))d\mathbf{x} \right| \leq \|\operatorname{div}\mathbf{u}\|_{L_q(\Omega)} (A(\Omega,p)\|\mathbf{v}\|_{\{L_p(\Omega)\}^3} +$$
$$+ A(\Omega,p)C_1(\Omega,p)\|\operatorname{rot}\mathbf{v}\|_{\{L_p(\Omega)\}^3}) + \|\mathbf{u}\|_{\{L_q(\Omega)\}^3}\|\mathbf{Q}_1(\operatorname{rot}\mathbf{u})\|_{L_p(\Omega)} \leq$$
$$\leq C_2(\|\operatorname{div}\mathbf{u}\|_{L_q(\Omega)}\|\mathbf{v}\|_{\{L_p(\Omega)\}^3} + \|\operatorname{div}\mathbf{u}\|_{L_q(\Omega)}\|\operatorname{rot}\mathbf{v}\|_{\{L_p(\Omega)\}^3} + \|\mathbf{u}\|_{\{L_q(\Omega)\}^3}\|\operatorname{rot}\mathbf{v}\|_{\{L_p(\Omega)\}^3}),$$

где $C_2 = \max(A(\Omega,p), C_1(\Omega,p), A(\Omega,p)C_1(\Omega,p))$.

С помощью предельного перехода, теоремы о плотности и определения пространства $H_q^0(\operatorname{div};\Omega)$ установим справедливость оценки (2.2) для $\mathbf{u} \in H_q^0(\operatorname{div};\Omega)$, $\mathbf{v} \in H_p(\operatorname{rot};\Omega)$. Теорема 2.2, таким образом, доказана.

Если $p > 3$, из представления 3.12 для $\mathbf{v}$ и оценок для $\mathbf{Q_1}$, $\mathbf{Q}_0$ имеем

$$\int_\Omega (\mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}))d\mathbf{x} = \int_\Omega (\mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \operatorname{grad}_{\mathbf{x}}(\mathbf{Q}_0(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{s}))d\mathbf{x} + \int_\Omega (\mathbf{u} \cdot [\mathbf{Q}_1(\operatorname{rot}\mathbf{u}) \times \mathbf{s}])d\mathbf{x} =$$
$$= -\int_\Omega (\mathbf{Q}_0(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{s}) \operatorname{div}\mathbf{u} d\mathbf{x} + \int_\Omega (\mathbf{u} \cdot [\mathbf{Q}_1(\operatorname{rot}\mathbf{u}) \times \mathbf{s}])d\mathbf{x},$$
$$\left| \int_\Omega (\mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}))d\mathbf{x} \right| \leq C_0(\Omega,p)\|\operatorname{div}\mathbf{u}\|_{L_q(\Omega)}\|\mathbf{v}\|_{\{L_p(\Omega)\}^3} +$$
$$+ \|\mathbf{u}\|_{\{L_q(\Omega)\}^3}\|\mathbf{Q_1}(\operatorname{rot}\mathbf{u})\|_{\{L_p(\Omega)\}^3} \leq$$
$$\leq C_3(\|\operatorname{div}\mathbf{u}\|_{L_q(\Omega)}\|\mathbf{v}\|_{\{L_p(\Omega)\}^3} + \|\mathbf{u}\|_{\{L_q(\Omega)\}^3}\|\operatorname{rot}\mathbf{v}\|_{\{L_p(\Omega)\}^3}),$$

где $C_3 = C_0(\Omega,p)$.

Так как $\{\mathcal{D}(\overline{\Omega})\}^3$ плотно в пространстве $H_p(\operatorname{rot};\Omega)$, а множество $\{\mathcal{D}(\Omega)\}^3$ — в пространстве $H_q^0(\operatorname{div};\Omega)$, теорема 2.3 доказана.

5. Некоторые следствия основных неравенств для случая $p = 2$**.** Обозначим $H(\operatorname{rot};\Omega) = H_2(\operatorname{rot};\Omega)$, $H(\operatorname{div};\Omega) = H_2(\operatorname{div};\Omega)$.

Поскольку неравенства (2.1), (2.2) при $p = q = 2$ оценивают скалярные произведения функций в $\{L_2(\Omega)\}^3$, из них следуют известные условия ортогональности соленоидальных и потенциальных векторных полей в $\{L_2(\Omega)\}^3$ (см. [1]–[8]) для звездных областей.

Далее, из неравенств (2.1), (2.2) при $\mathbf{v} = \mathbf{u}$ вытекают следствия теорем 2.1, 2.2. Пусть $\Omega \subset R^3$ — открытое ограниченное множество с диаметром $d(\Omega) > 0$, звездное относительно некоторой точки.

Теорема 5.1. *Существует положительная постоянная C_4, зависящая только от области Ω, такая, что при любых $\mathbf{u} \in H(\operatorname{div};\Omega) \bigcap H^0(\operatorname{rot};\Omega)$ будет выполняться неравенство*

$$\|\mathbf{u}\|_{\{L_2(\Omega)\}^3} \leq C_4(\|\operatorname{rot}\mathbf{u}\|_{\{L_2(\Omega)\}^3} + \|\operatorname{div}\mathbf{u}\|_{L_2(\Omega)}).$$

Теорема 5.2. *Существует положительная постоянная C_5, зависящая только от области Ω, такая, что при любых $\mathbf{u} \in H^0(\mathrm{div};\Omega) \bigcap H(\mathrm{rot};\Omega)$ будет выполняться неравенство*

$$\|\mathbf{u}\|_{\{L_2(\Omega)\}^3} \le C_5(\|\operatorname{rot}\mathbf{u}\|_{\{L_2(\Omega)\}^3} + \|\operatorname{div}\mathbf{u}\|_{L_2(\Omega)}).$$

Доказательство. Справедливо неравенство (2.2), где $\mathbf{v} = \mathbf{u}$, т. е.

$$\left|\int_\Omega \mathbf{u}^2 dx\right| \le C_2(\|\mathbf{u}\|_{\{L_2(\Omega)\}^3}(\|\operatorname{rot}\mathbf{u}\|_{\{L_2(\Omega)\}^3} + \|\operatorname{div}\mathbf{u}\|_{L_2(\Omega)}) + \|\operatorname{rot}\mathbf{u}\|_{\{L_2(\Omega)\}^3}\|\operatorname{div}\mathbf{u}\|_{L_2(\Omega)}).$$

Обозначив $z = \|\mathbf{u}\|_{\{L_2(\Omega)\}^3}$, $a = \|\operatorname{div}\mathbf{u}\|_{L_2(\Omega)}$, $b = \|\operatorname{rot}\mathbf{u}\|_{\{L_2(\Omega)\}^3}$ и разрешив неравенство

$$z^2 - C_2(a+b)z - C_2ab \le 0$$

относительно $z \ge 0$, получим

$$z \le \frac{C_2(a+b) + \sqrt{C_2^2(a+b)^2 + 4C_2ab}}{2} \le \frac{C_2(a+b) + \sqrt{(a+b)^2(C_2^2 + 2C_2)}}{2} \le$$
$$\le (a+b)\frac{C_2 + \sqrt{C_2^2 + 2C_2}}{2} \le (a+b)(C_2 + \tfrac{1}{2}),$$

откуда и следует требуемая оценка с константой $C_5 = C_2 + 1/2$. □

Пусть теперь $\Omega \subset R^3$ — открытое ограниченное множество (не обязательно звездное).

Обозначим через $\ker(\mathrm{div};\Omega)$, $\ker(\mathrm{rot};\Omega)$ ядра операторов div и rot соответственно, $\ker^\perp(\mathrm{div};\Omega)$, $\ker^\perp(\mathrm{rot};\Omega)$ — ортогональные дополнения к ним в $\{L_2(\Omega)\}^3$.

Лемма 5.1. $\ker^\perp(\mathrm{div};\Omega)$ *совпадает с замыканием в* $\{L_2(\Omega)\}^3$ *множества* $\{\operatorname{grad}\varphi, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\}$.

Доказательство. Обозначим замыкание множества $\{\operatorname{grad}\varphi, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\}$ в $\{L_2(\Omega)\}^3$ через M. Пусть $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\mathbf{v} \in \ker(\mathrm{div};\Omega)$, $\int\limits_\Omega(\mathbf{v}\cdot\operatorname{grad}\varphi)d\mathbf{x} = 0$ по определению $\operatorname{div}\mathbf{v}$, т. е. $\operatorname{grad}\varphi \in \ker^\perp(\mathrm{div};\Omega)$. Так как $\ker^\perp(\mathrm{div};\Omega)$ — замкнутое подпространство $\{L_2(\Omega)\}^3$, то $M \subset \ker^\perp(\mathrm{div};\Omega)$.

Обратно, пусть M — собственное подпространство в $\ker^\perp(\mathrm{div};\Omega)$. Тогда найдется ненулевой элемент $\mathbf{z} \in \ker^\perp(\mathrm{div};\Omega)$, ортогональный M. В частности, $\int\limits_\Omega(\mathbf{z}\cdot\operatorname{grad}\varphi)d\mathbf{x} = 0$ для всех $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, т. е. $\mathbf{z} \in \ker(\mathrm{div};\Omega)$, и, следовательно, $\mathbf{z} = \mathbf{0}$. Полученное противоречие доказывает лемму. □

Аналогично доказывается

Лемма 5.2. $\ker^\perp(\mathrm{rot};\Omega)$ *совпадает с замыканием в* $\{L_2(\Omega)\}^3$ *множества* $\{\operatorname{rot}\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\psi} \in \{\mathcal{D}(\Omega)\}^3\}$.

Теорема 5.3 (теорема Юнга). *Каждое открытое множество $\Omega \subset R^n$ с диаметром $d(\Omega)>0$ принадлежит некоторому открытому шару $B_R(\mathbf{y}) = \{\mathbf{x} \in R^n : |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \le R\}$, где*

$$R = \sqrt{\frac{n}{2(n+1)}}d(\Omega). \tag{5.1}$$

Теорема 5.4. *Пусть $\Omega \subset R^3$ — открытое ограниченное множество с диаметром $d(\Omega) > 0$. Тогда при всех $\mathbf{u} \in H_0(\mathrm{div};\Omega) \bigcap \ker^\perp(\mathrm{div};\Omega)$ выполняется неравенство*

$$\int_\Omega \mathbf{u}^2(\mathbf{x})d\mathbf{x} \le \frac{d^2(\Omega)}{16}\int_\Omega |\operatorname{div}\mathbf{u}(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}.$$

Доказательство. Пусть $\mathbf{u} \in H_0(\mathrm{div};\Omega) \bigcap \ker^\perp(\mathrm{div};\Omega)$. Тогда существуют последовательности $\{\varphi^n\} \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\{\boldsymbol{\psi}^n\} \in \{\mathcal{D}(\Omega)\}^3$ пробных функций такие, что $\|\mathbf{u} - \operatorname{grad}\varphi^n\|_{\{L_2(\Omega)\}^3} \to 0$, $\|\mathbf{u} - \boldsymbol{\psi}^n\|_{H(\mathrm{div};\Omega)} \to 0$ при $n \to \infty$.

По теореме Юнга найдется $\mathbf{y} \in R^3$, при котором $\Omega \subset B_R(\mathbf{y})$, где R определяется соотношением (5.1).

Определим для каждого $n = 1, 2, \dots$ пробные функции $\varphi_R^n \in \mathcal{D}(B_R(\mathbf{y}))$, $\boldsymbol{\psi}_R^n \in \{\mathcal{D}(B_R(\mathbf{y}))\}^3$ соотношениями

$$\varphi_R^n = \begin{cases} \varphi^n, & \text{если } \mathbf{x} \in \Omega; \\ 0, & \text{если } \mathbf{x} \in B_R(\mathbf{y}) \setminus \Omega, \end{cases} \qquad \boldsymbol{\psi}_R^n = \begin{cases} \boldsymbol{\psi}^n, & \text{если } \mathbf{x} \in \Omega; \\ 0, & \text{если } \mathbf{x} \in B_R(\mathbf{y}) \setminus \Omega. \end{cases}$$

Согласно (3.2) при всех $\mathbf{x} \in B_R(\mathbf{y})$ имеем

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\psi}_R^n(\mathbf{x}) = \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \Big\{ \int_0^1 \tau^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \operatorname{div} \boldsymbol{\psi}_R^n(\tau\mathbf{x} + (1-\tau)\mathbf{y}) d\tau \Big\}.$$

Умножая это равенство на φ_R^n и интегрируя по шару $B_R(\mathbf{y})$, получим

$$\int\limits_{B_R(\mathbf{y})} \varphi_R^n(\mathbf{x}) \operatorname{div} \boldsymbol{\psi}_R^n(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int\limits_{B_R(\mathbf{y})} \varphi_R^n(\mathbf{x}) \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \Big\{ \int_0^1 \tau^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \operatorname{div} \boldsymbol{\psi}_R^n(\tau\mathbf{x} + (1-\tau)\mathbf{y}) d\tau \Big\} d\mathbf{x}$$

или

$$\Big| \int\limits_{B_R(\mathbf{y})} (\boldsymbol{\psi}_R^n(\mathbf{x}) \cdot \operatorname{grad} \varphi_R^n(\mathbf{x})) d\mathbf{x} \Big| =$$

$$= \Big| \int\limits_{B_R(\mathbf{y})} (\operatorname{grad} \varphi_R^n(\mathbf{x}) \cdot \int_0^1 \tau^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \operatorname{div} \boldsymbol{\psi}_R^n(\tau\mathbf{x} + (1-\tau)\mathbf{y}) d\tau) d\mathbf{x} \Big| \leq$$

$$\Big\{ \int\limits_{B_R(\mathbf{y})} (\operatorname{grad} \varphi_R^n(\mathbf{x}))^2 d\mathbf{x} \Big\}^{1/2} \Big\{ \int\limits_{B_R(\mathbf{y})} \Big(\int_0^1 \tau^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \operatorname{div} \boldsymbol{\psi}_R^n(\tau\mathbf{x} + (1-\tau)\mathbf{y}) d\tau \Big)^2 d\mathbf{x} \Big\}^{1/2}.$$

В силу (3.7)

$$\Big| \int\limits_{B_R(\mathbf{y})} (\boldsymbol{\psi}_R^n(\mathbf{x}) \cdot \operatorname{grad} \varphi_R^n(\mathbf{x})) d\mathbf{x} \Big| \leq \frac{R}{\sqrt{6}} \Big\{ \int\limits_{B_R(\mathbf{y})} (\operatorname{grad} \varphi_R^n(\mathbf{x}))^2 d\mathbf{x} \Big\}^{1/2} \Big\{ \int\limits_{B_R(\mathbf{y})} (\operatorname{div} \boldsymbol{\psi}_R^n(\mathbf{x}))^2 d\mathbf{x} \Big\}^{1/2}$$

или

$$\Big| \int_\Omega (\boldsymbol{\psi}_R^n(\mathbf{x}) \cdot \operatorname{grad} \varphi_R^n(\mathbf{x})) d\mathbf{x} \Big| \leq \frac{R}{\sqrt{6}} \Big\{ \int_\Omega (\operatorname{grad} \varphi_R^n(\mathbf{x}))^2 d\mathbf{x} \Big\}^{1/2} \Big\{ \int_\Omega (\operatorname{div} \boldsymbol{\psi}_R^n(\mathbf{x}))^2 d\mathbf{x} \Big\}^{1/2}.$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $n \to \infty$ и принимая во внимание (5.1), получим неравенство

$$\int_\Omega \mathbf{u}^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \leq \frac{d(\Omega)}{4} \Big\{ \int_\Omega \mathbf{u}^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \Big\}^{1/2} \Big\{ \int_\Omega |\operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \Big\}^{1/2},$$

из которого следует требуемая оценка. $\square$

Теорема 5.5. *Пусть $\Omega \subset R^3$ — открытое ограниченное множество с диаметром $d(\Omega) > 0$. Тогда при всех $\mathbf{u} \in H_0(\mathrm{rot}; \Omega) \bigcap \ker^\perp(\mathrm{rot}; \Omega)$ выполняется неравенство*

$$\int_\Omega \mathbf{u}^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \leq \frac{3d^2(\Omega)}{16} \int_\Omega |\operatorname{rot} \mathbf{u}(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}.$$

Доказательство. Пусть $\mathbf{u} \in H_0(\mathrm{rot}; \Omega) \bigcap \ker^\perp(\mathrm{rot}; \Omega)$. Тогда существуют последовательности $\{\boldsymbol{\varphi}^n\} \in \{\mathcal{D}(\Omega)\}^3$, $\{\boldsymbol{\psi}^n\} \in \{\mathcal{D}(\Omega)\}^3$ пробных функций такие, что $\|\mathbf{u} - \operatorname{rot} \boldsymbol{\varphi}^n\|_{\{L_2(\Omega)\}^3} \to 0$, $\|\mathbf{u} - \boldsymbol{\psi}^n\|_{H(\mathrm{rot};\Omega)} \to 0$ при $n \to \infty$.

По теореме Юнга найдется $\mathbf{y} \in R^3$, при котором $\Omega \subset B_R(\mathbf{y})$, где $R = \sqrt{3}d(\Omega)/2\sqrt{2}$.

Определим для каждого $n = 1, 2, \ldots$ пробные функции $\boldsymbol{\varphi}_R^n \in \{\mathcal{D}(B_R(\mathbf{y}))\}^3$, $\boldsymbol{\psi}_R^n \in \{\mathcal{D}(B_R(\mathbf{y}))\}^3$ соотношениями

$$\boldsymbol{\varphi}_R^n = \begin{cases} \boldsymbol{\varphi}^n, & \text{если } \ \mathbf{x} \in \Omega; \\ 0, & \text{если } \ \mathbf{x} \in B_R(\mathbf{y}) \setminus \Omega, \end{cases} \qquad \boldsymbol{\psi}_R^n = \begin{cases} \boldsymbol{\psi}^n, & \text{если } \ \mathbf{x} \in \Omega; \\ 0, & \text{если } \ \mathbf{x} \in B_R(\mathbf{y}) \setminus \Omega. \end{cases}$$

Согласно (3.1) при всех $\mathbf{x} \in B_R(\mathbf{y})$ имеем

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{\psi}_R^n(\mathbf{x}) = \operatorname{rot}_{\mathbf{x}} \left\{ \int_0^1 \tau [\operatorname{rot} \boldsymbol{\psi}_R^n(\tau \mathbf{x} + (1-\tau)\mathbf{y}) \times (\mathbf{x} - \mathbf{y})] d\tau \right\}.$$

Умножая это равенство скалярно на $\boldsymbol{\varphi}_R^n$ и интегрируя по шару $B_R(\mathbf{y})$, получим

$$\left| \int\limits_{B_R(\mathbf{y})} (\boldsymbol{\varphi}_R^n(\mathbf{x}) \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{\psi}_R^n(\mathbf{x})) d\mathbf{x} \right| =$$

$$= \left| \int\limits_{B_R(\mathbf{y})} \left(\boldsymbol{\varphi}_R^n(\mathbf{x}) \cdot \operatorname{rot}_{\mathbf{x}} \left\{ \int_0^1 \tau [\operatorname{rot} \boldsymbol{\psi}_R^n(\tau \mathbf{x} + (1-\tau)\mathbf{y}) \times (\mathbf{x} - \mathbf{y})] d\tau \right\} \right) d\mathbf{x} \right| =$$

$$= \left| \int\limits_{B_R(\mathbf{y})} \left(\operatorname{rot} \boldsymbol{\varphi}_R^n(\mathbf{x}) \cdot \operatorname{rot} \left\{ \int_0^1 \tau [\operatorname{rot} \boldsymbol{\psi}_R^n(\tau \mathbf{x} + (1-\tau)\mathbf{y}) \times (\mathbf{x} - \mathbf{y})] d\tau \right\} \right) d\mathbf{x} \right| \leq$$

$$\leq \left\{ \int\limits_{B_R(\mathbf{y})} (\operatorname{rot} \boldsymbol{\varphi}_R^n(\mathbf{x}))^2 d\mathbf{x} \right\}^{1/2} \left\{ \int\limits_{B_R(\mathbf{y})} \left(\int_0^1 \tau [\operatorname{rot} \boldsymbol{\psi}_R^n(\tau \mathbf{x} + (1-\tau)\mathbf{y}) \times (\mathbf{x} - \mathbf{y})] d\tau \right)^2 d\mathbf{x} \right\}^{1/2}.$$

В силу (3.8)

$$\left| \int\limits_{B_R(\mathbf{y})} (\boldsymbol{\varphi}_R^n(\mathbf{x}) \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{\psi}_R^n(\mathbf{x})) d\mathbf{x} \right| \leq \frac{R}{\sqrt{2}} \left\{ \int\limits_{B_R(\mathbf{y})} (\operatorname{rot} \boldsymbol{\varphi}_R^n(\mathbf{x}))^2 d\mathbf{x} \right\}^{1/2} \left\{ \int\limits_{B_R(\mathbf{y})} \left(\int_0^1 (\operatorname{rot} \boldsymbol{\psi}_R^n(\mathbf{x})) d\tau \right)^2 d\mathbf{x} \right\}^{1/2},$$

откуда

$$\left| \int_\Omega (\boldsymbol{\varphi}_R^n(\mathbf{x}) \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{\psi}_R^n(\mathbf{x})) d\mathbf{x} \right| \leq \frac{R}{\sqrt{2}} \left\{ \int_\Omega (\operatorname{rot} \boldsymbol{\varphi}_R^n(\mathbf{x}))^2 d\mathbf{x} \right\}^{1/2} \left\{ \int_\Omega (\operatorname{rot} \boldsymbol{\psi}_R^n(\mathbf{x}))^2 d\mathbf{x} \right\}^{1/2}.$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $n \to \infty$ и принимая во внимание 5.1, получим оценку

$$\int_\Omega \mathbf{u}^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \leq \frac{\sqrt{3} d(\Omega)}{4} \left\{ \int_\Omega (\operatorname{rot} \mathbf{u}(\mathbf{x}))^2 d\mathbf{x} \right\}^{1/2} \left\{ \int_\Omega \mathbf{u}^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right\}^{1/2},$$

из которой следует доказываемое неравенство. □

Литература

1. Вейль Г. *Метод ортогональной проекции в теории потенциала.* В кн.: Вейль Г. Математика. Теоретическая физика. – М.: Наука, 1984. – 511 с.
2. Ладыженская О.А. *Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости.* – М.: Физматгиз, 1961. – 203 с.
3. Владимиров В.С. *Обобщенные функции в математической физике.* – М.: Наука, 1976. – 280 с.
4. Темам Р. *Уравнение Навье–Стокса. Теория и численный анализ.* – М.: Мир, 1981. – 408 с.
5. Дюво Г., Лионс Ж.-Л. *Неравенства в механике и физике.* – М.: Наука, 1980. – 383 с.
6. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. *Неоднородные граничные задачи и их приложения.* – М.: Мир, 1971. – 371 с.

7. Галанин М.П., Попов Ю.П. *Квазистационарные электромагнитные поля в неоднородных средах.* – М.: Физматгиз, 1995. – 320 с.
8. Быховский Э.Б., Смирнов Н.В. *Об ортогональном разложении пространства вектор-функций, квадратично суммируемых по заданной области, и операторах векторного анализа* // Тр. матем. ин-та АН СССР. – 1960. – Т. 59. – С. 5–36.
9. Мазья В.Г. *Пространства С.Л. Соболева.* – Л.: Изд-во ЛГУ, 1985. – 415 с.
10. Калинин А.В. *Некоторые оценки теории векторных полей* // Вестн. Нижегородск. ун-та. Сер. матем. моделир. и оптимал. управление. – 1997. – № 1. – С.32–39.

Нижегородский государственный университет

Поступила
10.01.2002