ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2001 МАТЕМАТИКА № 10 (473)

УДК 519.63

Ю.П. ЖИГАЛКО, С.И. СОЛОВЬЕВ

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ БАЛКИ С ГАРМОНИЧЕСКИМ ОСЦИЛЛЯТОРОМ

Исследуется задача о собственных колебаниях балки с присоединенным на конце гармоническим осциллятором. Математически задача состоит в отыскании собственных значений и собственных функций краевой задачи четвертого порядка со спектральным параметром, нелинейно входящим в граничное условие в точке присоединения осциллятора. Доказано существование счетного множества конечнократных положительных собственных значений вариационной постановки дифференциальной задачи. Для приближенного решения нелинейной задачи на собственные значения строится схема метода конечных элементов. Установлена сходимость приближенных решений к точным. Результаты статьи могут быть использованы при исследовании и решении нелинейных задач на собственные значения, описывающих собственные колебания механических конструкций с упруго присоединенными грузами [1]–[3].

1. Постановка механической задачи

Сформулируем задачу о собственных колебаниях системы балка–осциллятор. Пусть ось балки длины l занимает в равновесном горизонтальном положении отрезок $[0,l]$ оси Ox. Обозначим через ρ и E линейную плотность и модуль упругости материала балки, через S и J — площадь поперечного сечения балки и момент инерции сечения относительно своей горизонтальной оси. Предположим, что конец балки $x=0$ заделан жестко, а конец $x=l$ свободен. В точке $x=l$ балки упруго присоединен груз массы M (гармонический осциллятор) с коэффициентом жесткости подвески K.

Обозначим через $w(x,t)$ отклонение от положения равновесия точки x оси балки в момент времени t, через $\xi(t)$ — отклонение от положения равновесия груза массы M в момент времени t. Эти функции связаны следующими соотношениями ([1], с. 89; [2], с. 17):

$$EJw_{xxxx}(x,t)+\rho Sw_{tt}(x,t)=0, \quad x\in(0,l), \quad t>0, \tag{1}$$

$$w(0,t)=w_x(0,t)=0, \quad t>0, \tag{2}$$

$$EJw_{xxx}(l,t)+M\xi_{tt}(t)=w_{xx}(l,t)=0, \quad t>0, \tag{3}$$

$$M\xi_{tt}(t)+K(\xi(t)+w(l,t))=0, \quad t>0. \tag{4}$$

Собственные колебания системы балка–осциллятор характеризуются функциями $w(x,t)$ и $\xi(t)$ вида

$$w(x,t)=u(x)v(t), \quad x\in[0,l], \quad \xi(t)=c_0u(l)v(t), \quad t>0,$$

где $v(t)=a_0\cos\sqrt{\lambda}t+b_0\sin\sqrt{\lambda}t$, $t>0$; a_0, b_0, c_0, λ — постоянные величины.

Из уравнения (4) находим $c_0=\varkappa/(\lambda-\varkappa)$, $\varkappa=K/M$. Уравнения (1)–(3) приводят к задаче на собственные значения: найти числа λ и ненулевые функции $u(x)$, $x\in[0,l]$, такие, что

$$EJu^{\mathrm{IV}}(x)=\lambda\rho Su(x), \quad x\in(0,l), \tag{5}$$

$$u(0)=u'(0)=0, \quad u''(l)=0, \quad EJu'''(l)=\frac{\lambda\varkappa}{\lambda-\varkappa}Mu(l). \tag{6}$$

2. Задача на собственные значения в гильбертовом пространстве

Обозначим, как обычно, через $L_2(0,l)$ и $W_2^2(0,l)$ пространства Лебега и Соболева, наделенные соответственно нормами

$$|u|_0 = \left(\int_0^l u^2\, dx \right)^{1/2}, \quad \|u\|_2 = \left(\int_0^l ((u'')^2 + (u')^2 + u^2) dx \right)^{1/2}.$$

Положим $\Lambda^- = (0, \varkappa)$, $\Lambda^+ = (\varkappa, \infty)$, $\Lambda = (0, \infty)$, $H = L_2(0,l)$, $V = \{v : v \in W_2^2(0,l),\ v(0) = v'(0) = 0\}$. Заметим, что пространство V компактно вложено в H, любая функция из V является непрерывной и имеет непрерывную производную на отрезке $[0,l]$. В пространстве V нормой, эквивалентной норме $\|\cdot\|_2$, является полунорма $|u|_2 = |u''|_0$. Определим билинейные формы

$$a(u,v) = EJ \int_0^l u''v''\, dx, \quad u,v \in V; \quad b(u,v) = \rho S \int_0^l uv\, dx, \quad u,v \in H;$$
$$c(u,v) = Mu(l)v(l), \quad u,v \in V.$$

Обобщенная постановка дифференциальной задачи на собственные значения (5)–(6) заключается в нахождении $\lambda \in \Lambda$, $u \in V \setminus \{0\}$, $u^{\mathrm{IV}} \in H$, таких, что

$$EJu^{\mathrm{IV}} = \lambda \rho S u, \quad u''(l) = 0, \quad EJu'''(l) = \frac{\lambda \varkappa}{\lambda - \varkappa} Mu(l).$$

Эта задача эквивалентна следующей вариационной задаче на собственные значения: найти $\lambda \in \Lambda$, $u \in V \setminus \{0\}$ такие, что

$$a(u,v) + \frac{\lambda \varkappa}{\lambda - \varkappa} c(u,v) = \lambda b(u,v) \ \ \forall\, v \in V. \tag{7}$$

Теорема 1. *Задача* (7) *имеет счетное множество собственных значений конечной кратности* λ_k, $k = 1, 2, \ldots,$

$$0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_k \le \cdots, \quad \lim_{k \to \infty} \lambda_k = \infty.$$

Этим собственным значениям отвечают нормированные собственные функции u_k, $b(u_k, u_k) = 1$, $u_k(l) \ne 0$, $k = 1, 2, \ldots$

Доказательство теоремы опирается на результаты работы [4] для вариационной задачи (7) на интервалах Λ^- и Λ^+.

3. Конечноэлементная аппроксимация задачи

Отрезок $[0,l]$ разобьем точками $x_i = ih$, $i = 0, 1, \ldots, N$, $h = l/N$, на интервалы $e_k = (x_{k-1}, x_k)$, $k = 1, 2, \ldots, N$, и введем пространство эрмитовых конечных элементов порядка n ([5], с. 86): $V_h = \{v^h : v^h \in C^1([0,l]) \cap V,\ v^h \in P_n(e_k),\ k = 1, 2, \ldots, N\}$, где $C^1([0,l])$ — пространство непрерывно дифференцируемых функций на отрезке $[0,l]$, $P_n(e)$ — пространство полиномов степени n на множестве e. Задачу (7) будем аппроксимировать конечномерной задачей: найти $\lambda^h \in \Lambda$, $u^h \in V_h \setminus \{0\}$ такие, что

$$a(u^h, v^h) + \frac{\lambda^h \varkappa}{\lambda^h - \varkappa} c(u^h, v^h) = \lambda^h b(u^h, v^h) \ \ \forall\, v^h \in V_h. \tag{8}$$

Теорема 2. *Для фиксированного целого* $m \ge 1$ *при достаточно малых* h *задача* (8) *имеет* m *собственных значений конечной кратности* λ_k^h, $k = 1, 2, \ldots, m$,

$$0 < \lambda_1^h \le \lambda_2^h \le \cdots \le \lambda_m^h.$$

Этим собственным значениям отвечают нормированные собственные функции u_k^h, $b(u_k^h, u_k^h) = 1$, $u_k^h(l) \ne 0$, $k = 1, 2, \ldots$ *Справедливы неравенства* $\lambda_k \le \lambda_k^h$, $k = 1, 2, \ldots, m$.

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 1 с учетом результатов работы [4].

Теорема 3. *Пусть* λ_k *— собственное значение задачи* (7) *и* λ_k^h *— собственное значение схемы метода конечных элементов* (8). *Тогда имеет место сходимость* $\lambda_k^h \to \lambda_k$ *при* $h \to 0$*, причем из последовательности нормированных приближенных собственных функций* u_k^h*,* $b(u_k^h, u_k^h) = 1$*, отвечающих приближенным собственным значениям* λ_k^h*, можно выделить подпоследовательность, сходящуюся в пространстве* V *к нормированной собственной функции* u_k*,* $b(u_k, u_k) = 1$*, задачи* (7). *Если* λ_k *— простое собственное значение, то сходимость имеет место для всей последовательности* u_k^h*, т. е.* $u_k^h \to u_k$ *в* V *при* $h \to 0$.

Доказательство вытекает из результатов работы [4].

Литература

1. Филиппов А.П. *Колебания деформируемых систем.* – М.: Машиностроение, 1970. – 734 с.
2. Андреев Л.В., Дышко А.Л., Павленко И. Д. *Динамика пластин и оболочек с сосредоточенными массами.* – М.: Машиностроение, 1988. – 195 с.
3. Жигалко Ю.П., Ляшко А.Д., Соловьев С.И. *Колебания цилиндрической оболочки с присоединенными жесткими кольцевыми элементами* // Моделир. в механ. – 1988. – Т. 2. – № 2. – С. 68–85.
4. Соловьев С.И. *Метод конечных элементов для симметричных задач на собственные значения с нелинейным вхождением спектрального параметра* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1997. – Т. 37. – № 11. – С. 1311–1318.
5. Сьярле Ф. *Метод конечных элементов для эллиптических задач.* – М.: Мир, 1980. – 512 с.

Казанский государственный университет

Поступила
27.09.1999