ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 7 (446)

УДК 517.982

В.Л. КРЕПКОГОРСКИЙ

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ И ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ ДЛЯ КВАЗИНОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВ БЕСОВА

Применим функтор $(\cdot,\cdot)_{\theta,q}$ к паре пространств Бесова $B^{s_i}_{p_i}$. Результат хорошо известен [1] в двух случаях: а) при выбранном θ параметр q принимает одно определенное значение $q = q_\theta := (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1$; б) параметр $q \in (0,\infty]$ может быть любым, но $p_0 = p_1$. Получающиеся в результате интерполяционные пространства были найдены Питре в 60-х годах [2].

При дополнительных условиях $s_i{=}1/p_i{+}b$, $i = 0,1$, $\forall q{\in}(0,\infty]$ пространства $(B^{s_0}_{p_0}(T), B^{s_1}_{p_1}(T))_{\theta,q}$ (T — единичная окружность на C) изучались в [3] и [4]. Интерполяция для пар (BMO, B) в случае $q = q_\theta := \theta/q_1$ исследовалась в [5]. Наконец, сводку результатов по интерполяции в парах общего вида (B,B) и (BMO,B) при $q = q_\theta$ можно найти в ([6], п. 3.9.4).

В [7] дано описание пространств $(B^{s_0}_{p_0}, B^{s_1}_{p_1})_{\theta,q}$ в случае, когда $1 < p_i < \infty$, $-\infty < s_i < \infty$, $\forall q \in (0,\infty]$. Нормы пространств Бесова задаются при этом с помощью последовательности сверток. Переход к общему случаю $0 < p_i < \infty$ затруднен тем обстоятельством, что при $p_i < 1$ имеет место $l^{s_i}_{p_i}[L_{p_i}] \notin S'$, и обычно используемая конструкция ретракции не имеет смысла. В данной работе получено описание пространств $(B^{s_0}_{p_0}, B^{s_1}_{p_1})_{\theta,q} = BL^{s,k}_{p,q}$ в общем случае. Показано, что пространства типа BL наследуют многие свойства пространств Бесова. В частности, они образуют систему пространств, "замкнутую относительно теорем вложения".

1. Основные определения и обозначения

Квазинормой назовем функционал $\|\cdot\|$, обладающий обычными свойствами нормы, за исключением неравенства треугольника, которое заменено более слабым неравенством $\|f+g\| \le \gamma\{\|f\| + \|g\|\}$, где постоянная $\gamma > 1$.

Назовем квазинормированной (банаховой) решеткой квазинормированное (банахово) пространство функций E, квазинорма (норма) которого обладает свойством монотонности

$$|f(x)| \le |g(x)| \;\; \forall x \Rightarrow \|\, f \mid E\,\| \le \|\, g \mid E\,\|.$$

Пусть даны две квазинормированные решетки $E(X)$ и $G(Y)$, а также функция двух переменных $f(x,y)$, $x \in X$, $y \in Y$. Смешанной квазинормой назовем функционал $\|\, f \mid G[E]\,\| = \|\,\|\, f(x,y) \mid E(X)\,\| \mid G(Y)\|$.

Пусть F — оператор Фурье, S — пространство Шварца и S' — пространство умеренных распределений на R_n. Обозначим через $\Phi(R_n)$ совокупность всех систем функций $\varphi = \{\varphi_j(x)\}_{j=0}^\infty \subset S(R_n)$ таких, что

$$\operatorname{supp}\varphi_0 \subset \{x : |x| \le 2\};$$
$$\operatorname{supp}\varphi_j \subset \{x : 2^{j-1} \le |x| \le 2^{j+1}\}, \quad j = 1,2,3,\dots;$$

для каждого мультииндекса α существует положительное число c_α, при котором

$$2^{j|\alpha|}|D^\alpha \varphi_j(x)| \le c_\alpha$$

для всех $j = 0, 1, 2, \dots$ и всех $x \in R_n$ и $\sum\limits_{j=0}^{\infty} \varphi_j(x) = 1$ для каждого $x \in R_n$.

Пусть l_q^s — пространство числовых последовательностей; $L_{p,q}(X, \omega, \mu)$ — пространство Лоренца с весом ω на множестве X с мерой μ; $B^s_{p,q,(r)}(R_n)$ — пространство Бесова, $B^s_p := B^s_{p,p,(p)}$; $F^s_{p,q,(r)}(R_n)$ — пространство Лизоркина–Трибеля с квазинормами

$$\|(a_j)_{j=0}^{\infty} \mid l_q^s\| = \|a_j 2^{js} \mid l_q\|;$$
$$\|f \mid L_{p,q}\| = \left(\int_0^{\infty} (t^{1/p} (f)^{*(\mu)}(t))^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q},$$

где $f^{*(\mu)}$ — невозрастающая равноизмеримая относительно меры μ перестановка функции f;

$$\|f \mid B^s_{p,q,(r)}\| = \|F^{-1} \varphi_j F f \mid l_q^s[L_{p,r}]\|, \quad (\varphi_j) \in \Phi;$$
$$\|f \mid F^s_{p,q,(r)}\| = \|F^{-1} \varphi_j F f \mid L_{p,r}[l_q^s]\|, \quad (\varphi_j) \in \Phi.$$

Здесь предполагается, что $-\infty < s < \infty$, $0 < p < \infty$, $0 < q, r \le \infty$.

При интерполяции пар пространств Бесова получаются пространства

$$BL^{s,k}_{p,q} := \{ f \in S' : \|f \mid BL\| = \|(F^{-1}\varphi_j F f) \mid L^{s,k}_{p,q}\| < \infty \},$$

где $L^{s,k}_{p,q} := L_{p,q}(2^{j(s-k/p)},\ m_n \times (2^{jk}\nu))$ — пространство Лоренца $L_{p,q}$, состоящее из функций, определенных на $R_n \times N$, $N = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, с весом $2^{j(s-k/p)}$, m_n — лебегова мера на R_n, $2^{jk}\nu$ — атомическая мера на N с мерой атома $\{j\}$, равной 2^{jk}, k — угловой коэффициент прямой, проходящей через точки $(1/p_0, s_0)$ и $(1/p_1, s_1)$.

2. Интерполяция в классе квазинормированных пространств Бесова

В этом разделе доказана интерполяционная теорема для пространств $B^s_p(R_n)$, аналогичная теореме 1 из [7]. Отличие состоит в том, что здесь будет рассмотрен общий случай, когда $0 < p < \infty$. При этом возникают трудности, связанные с тем, что обычно оператор ретракции не определен на пространстве $l_p^s[L_p]$, $p < 1$. Здесь приведено доказательство, основанное на том, что для K-метода достаточно доказать действие ретракции не на всем пространстве $l_p^s[L_p]$, а на более узком множестве.

Теорема 1. *Пусть* $-\infty < s_0, s_1 < \infty$, $0 < \theta < 1$, $0 < p_0, p_1 < \infty$, $p_0 \ne p_1$, $0 < q \le \infty$, k *— угловой коэффициент прямой, проходящей через точки* $(1/p_0, s_0)$ *и* $(1/p_1, s_1)$. *Если* $s = (1-\theta)s_0 + \theta s_1$ *и* $1/p = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1$, *то*

$$(B^{s_0}_{p_0}(R_n), B^{s_1}_{p_1}(R_n))_{\theta,q} = BL^{s,k}_{p,q}.$$

Доказательство разобьем на несколько частей.

1) Проинтерполируем связанные с пространствами Бесова квазинормированные структуры. Рассматривая структуры $l_p^s[L_p]$ как пространства L_p на $R^n \times N$ с весом 2^{js}, $j \in N$, применим формулу Фрейтага [8]. Подробные вычисления можно найти в [7]. В результате получаем равенства

$$(l^{s_0}_{p_0}[L_{p_0}], l^{s_1}_{p_1}[L_{p_1}])_{\theta,q} = L^{s,k}_{p,q} = L_{p,q}(2^{j(s-k/p)},\ m_n \times (2^{jk}\nu)),$$
$$\|(g_j) \mid L^{s,k}_{p,q}\| = \left(\int_0^{\infty} (t^{1/p} (g_j(x) 2^{j(s-k/p)})^{*(\mu)})^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}, \quad \mu = m_n \times (2^{jk}\nu).$$

2) Пусть H — подмножество квазинормированной структуры A. Через $M(H)$ обозначим множество $\{f \in A; \exists g \in H;\ |g| \ge |f|\}$.

Пусть L_0 и L_1 — квазинормированные структуры, B_0 и B_1 — квазинормированные пространства, $T \in \mathcal{L}(B_i, L_i)$, причем $\|f \mid B_i\| = \|Tf \mid L_i\|$, $i = 0, 1$. Через $T(H)$ обозначим образ множества H при отображении T. Допустим, что существует линейный оператор R, определенный на $M(T(B_0+B_1))$, ограниченный на $L_i \cap M(T(B_0+B_1))$, $i=0,1$, и $RT=I$. Сравним K-функционалы $K(t,f,B_0,B_1)$ и $K(t,Tf,L_0,L_1)$. Очевидно,

$$K(t,f,B_0,B_1) = \inf_{f_0+f_1=f}(\|Tf_0 \mid L_0\| + t\|Tf_1 \mid L_1\|) \geq$$
$$\geq \inf_{g_0+g_1=Tf}(\|g_0 \mid L_0\| + t\|g_1 \mid L_1\|) = K(t,Tf,L_0,L_1).$$

С другой стороны, инфимум в последнем K-функционале достигается на элементах $g_0, g_1 \in M(T(B_0+B_1))$, поэтому оператор R определен на них и $Rg_0+Rg_1 = R(Tf) = f$. Очевидно, $\|Rg_0 \mid B_0\| + t\|Rg_1 \mid B_1\| \leq C(\|g_0 \mid L_0\| + t\|g_1 \mid L_1\|)$. Следовательно, $K(t,f,B_0,B_1) \leq C \inf_{g_0+g_1=Tf}(\|Rg_0 \mid B_0\| + t\|Rg_1 \mid B_1\| \leq CK(t,Tf,L_0,L_1)$. Итак, в этом случае

$$K(t,f,B_0,B_1) \simeq K(t,Tf,L_0,L_1) \quad \text{и} \quad \|f \mid (B_0,B_1)_{\theta,q}\| \simeq \|Tf \mid (L_0,L_1)_{\theta,q}\|. \tag{1}$$

3) Рассмотрим любую пару пространств $(B^{s_0}_{p_0}, B^{s_1}_{p_1})$. Определим операторы $Tf := \{F^{-1}\varphi_j Ff\}_{j=0}^{\infty}$; $R(\{f_j\}_{j=0}^{\infty}) = \sum_{S'\, j=0}^{\infty} F^{-1}\varphi_j Ff_j$, $\varphi_j \in \Phi$. Покажем, что оператор R определен на $M(T(B^{s_0}_{p_0}, B^{s_1}_{p_1}))$. Для этого используем теорему вложения 2.7.1 [1], в которой утверждается, что $B^s_{p,q}(R_n) \subset B^{s'}_{p',q}(R_n)$ при $0 < p_0 \leq p_1 \leq \infty$, $0 < q \leq \infty$, $-\infty < s' \leq s < \infty$ и $s - n/p = s' - n/p'$. Очевидно также, $B^s_{p,q} \subset B^{s^*}_{p,q}$ при $s^* < s$, $B^s_{p,q} \subset B^s_{p,q^*}$ при $q < q^*$. Поэтому $B^s_p = B^s_{p,p} \subset B^{s'}_{p',p} \subset B^{s'}_{p',p'} = B^{s'}_{p'}$ при $s' \leq s - n/p + n/p'$, $p \leq p'$. Для произвольной пары пространств $(B^{s_0}_{p_0}, B^{s_1}_{p_1})$ положим $s = s_0$, $p = p_0$ или $s = s_1$, $p = p_1$, а $p' = \max(p_i, 2)$, $s' = \min(s_i - n/p_i + n/p')$, $i = 0,1$. Тогда $B^{s_i}_{p_i} \subset B^{s'}_{p'}$ и $1 < p' < \infty$. Более того, $B^{s_0}_{p_0} + B^{s_1}_{p_1} \subset B^{s'}_{p'}$, и $T(B^{s_0}_{p_0} + B^{s_1}_{p_1}) \subset l^{s'}_{p'}[L_{p'}]$, $M(T(B^{s_0}_{p_0} + B^{s_1}_{p_1})) \subset l^{s'}_{p'}[L_{p'}]$. Поэтому оператор R определен на $M(T(B^{s_0}_{p_0} + B^{s_1}_{p_1}))$. Как видно из п. 2), теперь достаточно убедиться, что оператор R ограничен на $l^{s_i}_{p_i}[L_{p_i}] \cap M(T(B^{s_0}_{p_0} + B^{s_1}_{p_1}))$.

4) Докажем ограниченность оператора R, считая $s = s_0$, $p = p_0$ или $s = s_1$, $p = p_1$. Для доказательства воспользуемся теоремой 1.6.3 [1].

Теорема А. *Пусть $0 < p < \infty$, $0 < q \leq \infty$, $\Omega = \{\Omega_k\}_{k=0}^{\infty}$ — последовательность компактных подобластей в R_n и $d_k > 0$ — диаметр Ω_k. Если $\varkappa > n/2 + n/\min(p,q)$, то существует постоянная C такая, что неравенство*

$$\|F^{-1}M_k Ff_k \mid L_p(l_q)\| \leq C \sup_{\ell} \|M_\ell(d_\ell \cdot) \mid H_2^{\varkappa}\| \, \|f_k \mid L_p(l_q)\|$$

выполняется для всех систем $\{f_k\}_{k=0}^{\infty} \in L_p^{\Omega}(l_q)$ и для всех последовательностей $\{M_k(x)\}_{k=0}^{\infty} \subset H_2^{\varkappa}$. Здесь

$$\{f_k\}_{k=0}^{\infty} \in L_p^{\Omega}(l_q) \Rightarrow f_k \in L_p^{\Omega_k} = \{f \in L_p : \operatorname{supp} Ff \subset \Omega_k;\ \|f \mid L_p^{\Omega_k}\| = \|f \mid L_p\| < \infty\}.$$

Выберем значения параметров q, $\varkappa$, r, положив $q := p$, $\varkappa := n/2 + n/p$, r — любое число, большее $\varkappa$. Зададим последовательность $\{f_j\} \in M(T(B^{s_0}_{p_0} + B^{s_1}_{p_1}))$ и оценим норму

$$\|R(f_j) \mid B^s_p\| = \Big\| \Big(F^{-1}\varphi_k F\Big(\sum_{j=0}^{\infty} F^{-1}\varphi_j Ff_j\Big)\Big)_{k=0}^{\infty} \Big| \, l^s_p[L_p] \Big\| =$$
$$= \Big\| \Big(F^{-1}2^{ks}\varphi_k F\Big(\sum_{j=0}^{\infty} F^{-1}\varphi_j Ff_j\Big)\Big)_{k=0}^{\infty} \Big| \, L_p[l_p] \Big\| =$$
$$= \Big\| \Big(\sum_{j=0}^{\infty} F^{-1}2^{ks}\varphi_k\varphi_j Ff_j\Big)_{k=0}^{\infty} \Big| \, L_p[l_p] \Big\| \leq \|(F^{-1}2^{ks}\varphi_k\varphi_{k-1}Ff_{k-1}) \mid L_p[l_p]\| +$$
$$+ \|(F^{-1}2^{ks}\varphi_k\varphi_k Ff_k) \mid L_p[l_p]\| + \|(F^{-1}2^{ks}\varphi_k\varphi_{k+1}Ff_{k+1}) \mid L_p[l_p]\|.$$

Оценим, используя теорему A,

$$\|(F^{-1}2^{ks}\varphi_k\varphi_{k+\varepsilon}Ff_{k+\varepsilon})_{k=\max(-\varepsilon,0)}^{\infty} \mid L_p[l_p]\|, \quad \varepsilon=-1,0,1.$$

Для того чтобы $f_{k+\varepsilon}\in L_p^{\Omega_k}[l_p]$, нужно положить $\Omega_k=\{x\in R_n : |x|\le 2^{k+\varepsilon+1}\}$ и $d_k=2^{k+\varepsilon+1}$. Тогда

$$\|(F^{-1}2^{ks}\varphi_k\varphi_{k+\varepsilon}Ff_{k+\varepsilon}) \mid L_p[l_p]\| \le C\sup_k \|\varphi_k(d_k\cdot)\varphi_{k+\varepsilon}(d_k\cdot) \mid H_2^{\varkappa}\|\,\|(f_{k+\varepsilon})2^{ks} \mid L_p[l_p]\| \le$$
$$\le C\sup_k \|\varphi_k(2^{k+\varepsilon+1}x)\varphi_{k+\varepsilon}(2^{k+\varepsilon+1}x) \mid W_2^r\|\,\|(f_k)_{k=0}^{\infty} \mid L_p[l_p^s]\|.$$

Оценим

$$\|\varphi_k(2^{k+\varepsilon+1}x)\varphi_{k+\varepsilon}(2^{k+\varepsilon+1}x) \mid W_2^r\| = \Big(\sum_{|\alpha|\le r}\|D^\alpha(\varphi_k(2^{k+\varepsilon+1}x)\varphi_{k+\varepsilon}(2^{k+\varepsilon+1}x)) \mid L_2\|\Big)^{1/2} \le$$
$$\le C\Big(\sum_{|\beta|+|\gamma|\le r}\|D^\beta(\varphi_k(2^{k+\varepsilon+1}x))D^\gamma(\varphi_{k+\varepsilon}(2^{k+\varepsilon+1}x)) \mid L_2\|^2\Big)^{1/2}.$$

Положим $2^{k+\varepsilon+1}x=u$, тогда

$$|D_x^\beta(\varphi_k(2^{k+\varepsilon+1}x))| = |2^{(k+\varepsilon+1)|\beta|}D_u^\beta(\varphi_k(u))| \le C.$$

Аналогично показывается, что $|D_x^\gamma(\varphi_{k+\varepsilon}(2^{k+\varepsilon+1}x))|\le C^*$. При этом постоянные C и C^* не зависят от k. Кроме того, $\varphi_k(2^{k+\varepsilon+1}x)=0$ и $\varphi_{k+\varepsilon}(2^{k+\varepsilon+1}x)=0$, если $|x|>2$. Следовательно, независимо от k

$$\|D^\alpha\varphi_k(2^{k+\varepsilon+1}x)\varphi_{k+\varepsilon}(2^{k+\varepsilon+1}x) \mid L_2\| \le C.$$

Поэтому $\sup_k\|\varphi_k(d_k\cdot)\varphi_{k+\varepsilon}(d_k\cdot) \mid H_2^{\varkappa}\|<\infty$, и мы получаем, что оператор R ограничен на $l_{p_i}^{s_i}[L_{p_i}]\cap M(T(B_{p_0}^{s_0}+B_{p_1}^{s_1}))$. В силу (1) это означает

$$\|f \mid (B_{p_0}^{s_0},B_{p_1}^{s_1})_{\theta,q}\| \simeq \|Tf \mid (l_{p_0}^{s_0}[L_{p_0}],l_{p_1}^{s_1}[L_{p_1}])_{\theta,q}\| = \|Tf \mid L_{p,q}^{s,k}\| = \|f \mid BL_{p,q}^{s,k}\|. \quad \square$$

Замечание. Из равенства (1) и дальнейшего доказательства следует

$$K(t,f,B_{p_0}^{s_0},B_{p_1}^{s_1}) \simeq K(t,F^{-1}\varphi_jFf,l_{p_0}^{s_0}[L_{p_0}],l_{p_1}^{s_1}[L_{p_1}]).$$

Можно применить полученный результат для описания интерполяции в паре пространств $BMO(R_n)$ и $B_p^s(R_n)$. Определим пространство $BMO(R_n) := \Big\{f\in L_1^{\mathrm{loc}}(R_n) : \|f \mid BMO\| = \sup_Q\Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q|f-f_Q|dx\Big)<\infty\Big\}$, где Q — n-мерный куб и $f_Q:=\frac{1}{|Q|}\int_Q f\,dx$.

В [5] доказано, что

$$(BMO,\, B_{p_1,q_1,(r_1)}^{s_1})_{\theta,q} = B_{p,q,(q)}^{s}$$

при $s_1\ne 0$, $1/p=\theta/p_1$, $1/q=\theta/q_1$, $s=\theta s_1$, $p_1,q_1,r_1\in(0,\infty)$. В частности, полагая $q_1=p_1=r_1$, получим формулу

$$(BMO,\, B_{p_1}^{s_1})_{\theta,q} = B_p^s.$$

Заметим, что эти интерполяционные формулы позволяют найти пространство $(\cdot,\cdot)_{\theta,q}$, только если $q=\theta/q_1$, т. е. только при одном значении из всего интервала $(0,\infty)$. Следующая теорема позволяет сделать это при любом $q\in(0,\infty]$.

Теорема 2. *Пусть $s_1\ne 0$, $1/p=\theta/p_1$, $s=\theta s_1$, $p_1\in(0,\infty)$, $k=p_1s_1$, $q\in(0,\infty]$, $\theta\in(0,1)$. Тогда*

$$(BMO,\, B_{p_1}^{s_1})_{\theta,q} = BL_{p,q}^{s,k}.$$

Доказательство. Построим систему координат на плоскости, в которой пространства B^s_p будем изображать точками $(1/p, s)$. В этом случае соотношения $1/p = \theta/p_1$, $s = \theta s_1$ означают, что точка $(1/p, s)$ лежит на отрезке, соединяющем точки $0(0,0)$ и $A(1/p_1, s_1)$, причем делит его в отношении $(1-\theta){:}\theta$. Можно сказать, что с точки зрения теории интерполяции пространство BMO соответствует пространству B^0_∞. Выберем параметры θ_0 и θ_2 так, чтобы $0 < \theta_0 < \theta < \theta_2 < 1$. По теореме о реитерации при $1/p_0 = \theta_0/p_1$, $1/p_2 = \theta_2/p_1$, $s_0 = \theta_0 s_1$, $s_2 = \theta_2 s_1$ и соответствующем $\lambda \in (0,1)$ получим равенство

$$(BMO,\, B^{s_1}_{p_1})_{\theta,q} = ((BMO,\, B^{s_1}_{p_1})_{\theta_0,p_0}, (BMO,\, B^{s_1}_{p_1})_{\theta_2,p_2})_{\lambda,q} = (B^{s_0}_{p_0}, B^{s_2}_{p_2})_{\lambda,q} = BL^{s,k}_{p,q},$$

где k — угловой коэффициент прямой, проходящей через точки $A_0(1/p_0, s_0)$ и $A_2(1/p_2, s_2)$. На этой же прямой лежат точки $0(0,0)$ и $A_1(1/p_1, s_1)$. Легко видеть, что ее угловой коэффициент $k = s_1 p_1$. $\square$

3. Теоремы вложения для пространств BL

Пространства типа BL "наследуют" ряд свойств, характерных для пространств Бесова. Например, для них можно доказать теоремы вложения. Интерполируя известные результаты о вложениях пространств $B(R_n)$, получим следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть $0 < p_0 \le p_1 < \infty$, $0 < q \le \infty$, $-\infty < s_1 < s_0 < \infty$, $-\infty < k_0, k_1 < \infty$. Тогда*

а) $BL^{s_0,k_0}_{p_0,q_0}(R_n) \subset BL^{s_1,k_1}_{p_1,q_1}(R_n)$ *при* $s_0 > s_1 - n/p_1 + n/p_0$;
б) $BL^{s_0,n}_{p_0,q_0}(R_n) \subset BL^{s_1,n}_{p_0,q_0}(R_n)$ *при* $s_0 - n/p_0 = s_1 - n/p$;
в) $B^{s_0}_{p_0}(R_n) \subset BL^{s_1,k_1}_{p_1,q_1}(R_n)$; $BL^{s_0,k_0}_{p_0,q_0}(R_n) \subset B^{s_1}_{p_1}(R_n)$ *при* $s_0 > s_1 - n/p_1 + n/p_0$;
г) $BL^{m+n/p,n}_{p,q} \subset C^m(R_n)$, $0 < p \le \infty$, $0 < q < 1$, $m = 0, 1, 2, \ldots$
д) $BL^{s,k}_{p,q}(R_n) \subset C^m(R_n)$ *при* $s > m + n/p$;
е) $BL^{s_0,k}_{p,q}(R_n) \subset \mathcal{R}^s(R_n) := B^s_{\infty,\infty}(R_n)$, $s > 0$, $0 < p < \infty$, $0 < q \le \infty$, $s_0 > s + n/p$.

Представим пространство R_n как декартово произведение $R_n = R_{n-1} \times R_1$, $x \in R_n \Rightarrow x = \{x', x_n\}$, $x' = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}\}$. Известно, что для функций из пространства Бесова $B^s_p(R_n)$ имеют смысл следы $f(x',0)$, $\frac{\partial f}{\partial x_n}(x',0), \ldots, \frac{\partial^r f}{\partial x_n^r}(x',0)$ при условии, что

$$s > r + 1/p \max(0, (n-1)(1/p - 1)). \tag{2}$$

Для любого пространства $BL^{s,k}_{p,q}(R_n)$ такого, что справедливо неравенство (2), можно найти такое пространство $B^{s'}_{p'}$, для которого выполняется условие (2) и $BL^{s,k}_{p,q}(R_n) \subset B^s_p(R_n)$. В этом случае функции из $BL^{s,k}_{p,q}(R_n)$ имеют следы на R_{n-1}, принадлежащие S'. Определим на $BL^{s,k}_{p,q}(R_n)$ оператор

$$\Re f := \Big\{ f(x',0), \frac{\partial f}{x_n}(x',0), \ldots, \frac{\partial^r f}{\partial x_n^r}(x',0) \Big\}.$$

Рассмотрим декартово произведение квазинормированных пространств $\prod_{j=0}^{r} B_j$. Определим на нем квазинорму $\Big\| (f_j)_{j=0}^r \;\Big|\; \prod_{j=0}^{r} B_j \Big\| := \sum_{j=0}^{r} \|f_j \mid B_j\|$.

Теорема 4. *Если $0 < p < \infty$, $0 < q < \infty$, $s > r + 1/p \max(0, (n-1)(1/p - 1))$, то $\Re$ — ретракция*

$$BL^{s,k}_{p,q}(R_n) \quad \text{на} \quad \prod_{j=0}^{r} BL^{s-1/p-j,k-1}_{p,q}(R_{n-1}).$$

Доказательство. Так как в теореме 2.7.2 [1] указано, что оператор $\Re$ является ретракцией $BL^s_p(R_n)$ на $\prod\limits_{j=0}^{r} B^{s-1/p-j}_{p,q}(R_{n-1})$, то очевидно, оператор $\Re$ – ретракция $(BL^s_p(R_n))_{\theta,q}$ на $\Big(\prod\limits_{j=0}^{r} B^{s-1/p-j}_{p,q}(R_{n-1})\Big)_{\theta,q}$. На произведении $\prod\limits_{j=0}^{r} B_j$ зададим нормы

$$\Big\|(g_j)\ \Big|\ \prod_{j=0}^{r} B_j\Big\| := \sum \|(g_j)\ |\ B_j\|.$$

Заметим, что $\sum \|(g_j)\ |\ B_j\| \simeq \max \|(g_j)\ |\ B_j\|$. Для любого набора (B^0_j, B^1_j) очевидно,

$$K\Big(t, (g_j), \prod_{j=0}^{r} B^0_j,\ \prod_{j=0}^{r} B^1_j\Big) = \sum_{j=0}^{r} K(t, g_j, B_j) \simeq \max K(t, g_j, B_j).$$

Тогда

$$\Phi_{\theta,q}(K(t,(g_j),B^0_j,B^1_j)) = \Phi_{\theta,q}\Big(\sum_{j=0}^{\infty} K(t,(g_j),B^0_j,B^1_j)\Big) \le$$
$$\le \sum_{j=0}^{r} \Phi_{\theta,q}(K(t,(g_j),B^0_j,B^1_j)) \simeq \max \Phi_{\theta,q}(K(t,(g_j),B^0_j,B^1_j)) \le$$
$$\le \Phi_{\theta,q}(\max K(t,g_j,B^0_j,B^1_j)) \le \Phi_{\theta,q}\Big(\sum_{j=0}^{r} K(t,g_j,B^0_j,B^1_j)\Big).$$

Отсюда следует

$$\Phi_{\theta,q}\Big(K\Big(t,(g_j),\prod_{j=0}^{r} B^0_j,\ \prod_{j=0}^{r} B^1_j\Big)\Big) \simeq \sum_{j=0}^{r} \Phi_{\theta,q}(K(t,g_j,B^0_j,B^1_j)) = \Big\|(g_j)\ \Big|\ \prod_{j=0}^{r} (B_j)_{\theta,q}\Big\|.$$

Выберем пару точек $(1/p_i, s_i)$, $i = 0,1$, так, чтобы, во-первых, $s > r + 1/p\ \max(0, (n-1)(1/p - 1))$, во-вторых, точка $(1/p, s)$ должна лежать в середине отрезка с концами в точках $(1/p_i, s_i)$, наконец, в-третьих, пусть угловой коэффициент прямой, проходящей через точки $(1/p_i, s_i)$, будет равен k. В этом случае $k = (s_1 - s_0)/(1/p_1 - 1/p_0)$. Подсчет углового коэффициента прямой, проходящей через точки $(1/p_i, s_i - 1/p_i - j)$, приводит к результату $k_j = k - 1$. Поэтому оператор $\Re$ отображает $BL^{s,k}_{p,q}(R_n) = (B^{s_0}_{p_0}, B^{s_1}_{p_1})_{1/2,q}$ на

$$\prod_{j=0}^{r} B^{s-1/p-j,k-1}_{p,q}(R_{n-1}) = \Big(\prod_{j=0}^{r} B^{s_0-1/p_0-j,k-1}_{p_0}(R_{n-1}),\ \prod_{j=0}^{r} B^{s_1-1/p-j,k-1}_{p_1}(R_{n-1})\Big)_{1/2,q}$$

и является ретракцией. $\square$

Литература

1. Трибель Х. *Теория функциональных пространств.* – М.: Мир, 1986. – 447 с.
2. Peetre J. *Sur les spaces de Besov* // Compt. Rend. Acad. Sci. – Paris, 1967. – V. 264. – № 6. – P. 281–283.
3. Пеллер В.В. *Описание операторов Ганкеля класса σ_p при $p > 0$, исследование скорости рациональной аппроксимации и другие приложения* // Матем. сб. – 1983. – Т. 122. – № 4. – С. 481–510.
4. Пекарский А.А. *Классы аналитических функций, определенные наилучшими рациональными приближениями в H_p* // Матем. сб. – 1985. – Т. 127. – № 1. – С. 3–20.
5. Peetre J., Svensson E. *On the generalized Hardy's inequality of McGehee, Pigno and Smith and the problem of interpolation between BMO and a Besov space* // Math. Scand. – 1984. – V. 54. – P. 221–241.

6. Bruddnyi Yu.A., Krugliak N.Ya. *Interpolation functors and interpolation spaces.* I. – North-Holland, 1991. - 717 p.
7. Крепкогорский В.Л. *Интерполяция в пространствах Лизоркина–Трибеля и Бесова* // Матем. сб. – 1994. – Т. 185. – № 7. – С. 63–76.
8. Freitag D. *Real interpolation of weighted L_p-spaces* // Math. Nachr. - 1978. – Bd. 86. – S. 15–18.

Казанское высшее военное
командно-инженерное училище

Поступила
19.03.1996