ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 12 (439)

УДК 519.853

Я.И. ЗАБОТИН, И.Н. ДАНЬШИН

АЛГОРИТМЫ С КОМБИНИРОВАНИЕМ, ПАРАМЕТРИЗАЦИЕЙ И ДВУСТОРОННИМ ПРИБЛИЖЕНИЕМ В МЕТОДЕ ЦЕНТРОВ

В [1], [2] был разработан метод центров для решения задачи математического программирования. Отыскание минимума функции при наличии ограничений сводилось к нахождению безусловного минимума последовательно строящихся функций максимума. Эта идея получила различные реализации (см., напр., библиографию в [3]). При параметризации метода центров [4], в методах с адаптацией параметра [5]–[7], в алгоритмах с неполной минимизацией функции максимума [8] первоначальный смысл "центра" терялся. В некоторых алгоритмах за счет выбора параметров исчезала и потребность нахождения последовательности решений вспомогательных задач. Оставалась только идея отыскания минимакса некоторой вспомогательной функции. Эта идея используется и в данной статье. Построен алгоритм, который позволяет вести двустороннее приближение к решению, что дает возможность находить решение с заданной точностью за конечное число итераций. Предложены также алгоритм, позволяющий комбинировать классический метод центров [1] с другими и параметризованный метод внешних центров.

1. Свойства функции максимума и ее минимумов

В параграфе находятся свойства функций максимума в том виде, в котором они понадобятся для построения алгоритмов. Всюду в параграфе считается, что функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ определены в n-мерном евклидовом пространстве R_n, функция $\max\{\varphi(x),\psi(x)\}$ называется функцией максимума, определенной функциями $\varphi(x)$, $\psi(x)$.

Лемма 1. *Пусть* $\phi(x) = \max\{\varphi(x),\psi(x)\}$, $z^* = \arg\inf\{\phi(x),\ x \in R_n\}$, $G = \{x : x \in R_n,\ \psi(x) \le 0\}$, $G \ne \emptyset$.

1. *Если* $\varphi(z) \le 0$ *для какой-либо точки* $z \in G$, *то* $z^* \in G$ *и* $\varphi(z^*) \le 0$.
2. *Если* $z^* \notin G$, *то* $\varphi(x) > 0$ *и* $\varphi(x) \ge \varphi(z^*)$ *для любой точки* $x \in G$.

Доказательство первого пункта вытекает из определения функции $\phi(x)$, т.к. $\phi(z^*) \le \phi(z) \le 0$.

Докажем второе утверждение. Так как в соответствии с условиями леммы $z^* \notin G$, то в силу первого утверждения $\varphi(x) > 0$ для всех $x \in G$. Но тогда по определению функции максимума и условиям леммы для любых $x \in G$ выполняется $\varphi(x) = \phi(x) \ge \phi(z^*) \ge \varphi(z^*)$ □.

Лемма 2. *Пусть* а) z^* — *точка локального минимума функции* $\phi(x)$, *функции* $\varphi(x)$, $\psi(x)$ *непрерывны в точке* z^*, б) $\varphi(z^*) > \psi(z^*)$. *Тогда* z^* — *точка локального минимума функции* $\varphi(x)$.

Доказательство. По условиям леммы существуют такие окрестности ω_1, ω_2 точки z^*, что $\phi(x) \ge \phi(z^*)$ для всех $x \in \omega_1$, и $\varphi(x) > \psi(x)$ для всех $x \in \omega_2$. Тогда для всех x из окрестности $\omega = \omega_1 \cap \omega_2$ выполняются условия $\varphi(x) = \phi(x) \ge \phi(z^*) = \varphi(z^*)$. □

Следствие. Если выполнено условие а) леммы 2 и z^* не является точкой локального минимума функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$, то $\varphi(z^*) = \psi(z^*)$.

Доказательство легко проводится от противного. $\square$

Обозначим через M множество функций, определенных в R_n, для которых каждый локальный минимум, если он существует, является абсолютным.

Лемма 3. *Пусть функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ определены в R_n, множество G из R_n не пусто,*

$$\phi_1(x) = \max\{\varphi(x), \psi(x)\}; \quad z_1 = \arg\inf\{\phi_1(x),\ x \in R_n\}, \tag{1}$$

$$\phi_2(x) = \max\{\beta(\varphi(x) - \varphi(z_1)),\ \alpha\psi(x)\}, \quad \text{где } \alpha, \beta > 0; \quad z_2 = \arg\inf\{\phi_2(x),\ x \in R_n\}. \tag{2}$$

Справедливы следующие утверждения

1. *Если $z_1 \in G$, $\varphi(x) \geq \psi(x)$ для всех $x \in G$, то $z_1 = \arg\inf\{\varphi(x),\ x \in G\}$.*
2. *Если $z_1 \notin G$, $z_2 \in G$, $G = \{x : x \in R_n,\ \psi(x) \leq 0\}$, то $z_2 = \arg\inf\{\varphi(x),\ x \in G\}$.*
3. *Если $z_1, z_2 \notin G$, $G = \{x : x \in R_n,\ \psi(x) \leq 0\}$, функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ непрерывны в R_n, $\psi \in M$, то*

$$\varphi(z_1) \geq \psi(z_1) \geq \frac{\beta}{\alpha}(\varphi(z_2) - \varphi(z_1)) \geq \psi(z_2) > 0. \tag{3}$$

Доказательство. Так как $\varphi(x) \geq \psi(x)$ для всех $x \in G$, то $\phi_1(x) = \varphi(x)$ для любого $x \in G$. Тогда, учитывая (1), установим, что $\varphi(z_1) = \phi_1(z_1) \leq \phi_1(x) = \varphi(x)$ для всех $x \in G$, и первое утверждение доказано.

Обозначим $\varphi_1(x) = \beta(\varphi(x) - \varphi(z_1))$, $\psi_1(x) = \alpha\psi(x)$. Так как $z_1 \notin G$, то по второму утверждению леммы 1 для всех $x \in G$ выполняется неравенство $\varphi(x) \geq \varphi(z_1)$. Но тогда $\varphi_1(x) \geq 0$, а значит, и $\varphi_1(x) \geq \psi_1(x)$ для всех $x \in G$. Отсюда в силу (2) и первого утверждения леммы $z_2 = \arg\inf\{\varphi_1(x),\ x \in G\}$. Следовательно, второе утверждение леммы доказано.

Докажем третье утверждение. Неравенства

$$\psi(z_1) > 0, \quad \psi(z_2) > 0 \tag{4}$$

равносильны условиям $z_1, z_2 \notin G$. Убедимся, что не может выполняться ни одно из неравенств

$$\varphi(z_1) < \psi(z_1); \quad \frac{\beta}{\alpha}(\varphi(z_2) - \varphi(z_1)) < \psi(z_2). \tag{5}$$

Действительно, z_1, z_2, являясь точками абсолютных минимумов функций $\phi_1(x)$, $\phi_2(x)$, в силу леммы 2 были бы при условиях (5) точками локальных минимумов функции $\psi(x)$. Но т.к. $\psi \in M$, то z_1, z_2 были бы и точками абсолютного минимума функции $\psi(x)$. А тогда неравенства (4) противоречат тому, что множество G не пусто. Таким образом, доказаны первое и третье из неравенств (3). Убедимся, наконец, в справедливости второго из неравенств (3). По условию (2) выполняется неравенство $\phi_2(z_2) \leq \phi_2(z_1)$. При этом $\phi_2(z_1) = \max\{\beta(\varphi(z_1) - \varphi(z_1)),\ \alpha\psi(z_1)\} = \max\{0,\ \alpha\psi(z_1)\} = \alpha\psi(z_1)$ в силу (4). Тогда $\phi_2(z_2) = \max\{\beta(\varphi(z_2) - \varphi(z_1)),\ \alpha\psi(z_2)\} \leq \phi_2(z_1) = \alpha\psi(z_1)$ и в силу определения функции максимума из этого неравенства, в частности, вытекает второе из неравенств (3). $\square$

Следствие. Пусть $\phi(x) = \max\{\varphi(x),\ \psi(x)\}$, $G = \{x : x \in R_n,\ \psi(x) \leq 0\}$ и $\varphi(x) \geq \psi(x)$ для всех $x \in G$, $x^* = \arg\inf\{\phi(x),\ x \in R_n\}$. Если $\phi(x^*) \leq 0$, то

1. $x^* \in G$,
2. $x^* = \arg\inf\{\varphi(x),\ x \in G\}$,
3. $\varphi(x^*) = \phi(x^*)$.

Доказательство. По определению функции максимума выполняется неравенство $\phi(x^*) \geq \psi(x^*)$. Отсюда и из неравенства $\phi(x^*) \leq 0$ следует $x^* \in G$. Но тогда в силу первого утверждения леммы 3 справедливо и второе утверждение следствия. Наконец, $\phi(x) = \varphi(x)$ для всех $x \in G$ по условию. В частности, в силу первого утверждения следствия выполняется и третье. $\square$

2. Постановка задачи и комбинированный алгоритм приближения по внутренним точкам

Пусть всюду в дальнейшем функции $f(x)$, $f_i(x)$, $i \in H = \{1, 2, \ldots, m\}$, определены и непрерывны в R_n, $D = \{x : x \in R_n,\ f_i(x) \le 0,\ i \in H\} = \{x : x \in R_n,\ g(x) \le 0\}$, где $g(x) = \max\{f_i(x),\ 1 \le i \le m\}$, множество $D' = \{x : x \in R_n,\ g(x) < 0\}$ не пусто и его замыкание $\overline{D'}$ совпадает с D. При использовании символа inf считается, что соответствующая точная нижняя грань функции на указанном множестве достигается, $f^* = \inf\{f(x),\ x \in D\}$, через x^* обозначим какую-либо точку из $D^* = \{x : x \in D,\ f(x) = f^*\}$. Требуется найти $\inf\{f(x),\ x \in D\}$. Предполагается, что множество D удовлетворяет условию регулярности, т. е. существует такая точка $y \in D$, что $g(y) < 0$.

Для минимизации функции $f(x)$ на множестве D предлагается алгоритм, позволяющий комбинировать метод центров с каким-либо методом минимизации при наличии ограничений.

Алгоритм 1. Выбирается точка $x_0 \in D$, числа $0 < p \le 1$, $t_0 \ge f(x_0)$. Если найдены x_k, t_k $(k \ge 0)$, то x_{k+1}, t_{k+1} находятся по следующей схеме.

1. Строится функция $F_k(x) = \max\{f(x) - t_k,\ g(x)\}$, $k \ge 0$.
2. Находится $z_{k+1} = \arg\inf\{F_k(x),\ x \in R_n\}$.
3. За x_{k+1} принимается точка из D, для которой $f(x_{k+1}) \le f(z_{k+1})$.
4. Выбирается число $t_{k+1} = t_k - r_k(t_k - f(x_{k+1}))$, $k \ge 0$, где $p \le r_k \le 1$.
5. Осуществляется переход к п. 1 при k, замененном на $k + 1$.

Лемма 4. *Для последовательностей $\{x_k\}$, $\{t_k\}$, построенных по алгоритму 1, выполняются условия*

$$f(x_{k+1}) \le t_{k+1} \le t_k \quad \forall k \ge 0. \tag{6}$$

Доказательство. Пусть для некоторого $k \ge 0$ выполняется неравенство $f(x_k) \le t_k$. Поскольку $f(x_k) - t_k \le 0$ и $g(x_k) \le 0$, то согласно лемме 1 выполняются неравенства $f(z_{k+1}) - t_k \le 0$, $g(z_{k+1}) \le 0$. Второе из этих неравенств означает, что $z_{k+1} \in D$, а в силу первого из них и п. 3 алгоритма выполняются условия $f(x_{k+1}) \le f(z_{k+1}) \le t_k$, $x_{k+1} \in D$. В соответствии с п. 4 число t_{k+1} является выпуклой комбинацией чисел $f(x_{k+1})$ и t_k. Следовательно, выполняется (6). А т. к. $t_0 \ge f(x_0)$, то условие (6) по индукции выполняется для всех $k \ge 0$. $\square$

Обосновывает сходимость алгоритма

Теорема 1. *Пусть $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на R_n, множество $D_0 = \{x : x \in D,\ f(x) \le t_0\}$ ограничено, множество $D' = \{x : x \in R_n,\ g(x) < 0\}$ не пусто и его замыкание $\overline{D'}$ совпадает с D. Тогда для последовательности $\{x_k\}$, построенной по алгоритму 1, $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = f^*$.*

Доказательство. В соответствии с леммой 4 последовательность $\{t_k\}$ ограничена снизу, убывает, сходится и

$$0 = \lim_{k\to\infty}(t_k - t_{k+1}) = \lim_{k\to\infty} r_k(t_k - f(x_{k+1})) \ge p \lim_{k\to\infty}(t_k - f(x_{k+1})) \ge 0.$$

Таким образом,

$$\lim_{k\to\infty}(t_k - f(x_{k+1})) = 0. \tag{7}$$

Обозначим $\gamma = \lim\limits_{k\to\infty} t_k$. Так как $t_k \ge f(x_k) \ge f(x^*)$ для всех k в силу леммы 4, то

$$\gamma \ge \varlimsup_{k\to\infty} f(x_k) \ge \varliminf_{k\to\infty} f(x_k) \ge f(x^*). \tag{8}$$

Убедимся, что $\gamma = f(x^*)$. Действительно, если допустить, что $\gamma > f(x^*)$, то существует такая окрестность ω точки x^*, что $\gamma > f(x)$ для всех $x \in \omega$. Но поскольку $x^* \in D$ и $\overline{D'} = D$, то в ω найдется точка y из D'. Следовательно, $f(y) < \gamma$ и $g(y) < 0$. Тогда учитывая, что

$f(x_{k+1}) \le f(z_{k+1})$ согласно п. 3 алгоритма и что $z_{k+1} = \arg\inf\{F_k(x),\ x \in R_n\}$, последовательно получим

$$f(x_{k+1}) - t_k \le f(z_{k+1}) - t_k \le \max\{f(z_{k+1}) - t_k,\ g(z_{k+1})\} = F_k(z_{k+1}) \le F_k(y) = \max\{f(y) - t_k,\ g(y)\}.$$

А т. к. последовательность $\{t_k\}$ убывающая, то из последнего неравенства следует

$$f(x_{k+1}) - t_k \le \max\{f(y) - t_k,\ g(y)\} \le \max\{f(y) - \gamma,\ g(y)\} = \mathrm{const} < 0,$$

что противоречит условию (7). Таким образом, $\gamma = f(x^*)$ и в силу (8) теорема доказана. □

Сравнивая предложенный алгоритм с известными, заметим, что при $t_0 = f(x_0)$, $x_{k+1} = z_{k+1}$ и $r_k = 1$ для всех k алгоритм 1 совпадает с методом центров (см. [1]). В [3] предложен алгоритм с управляющими параметрами $t_k = \tau f(x_k) + (1-\tau)t_{k-1}$ с фиксированным $\tau \in (0,1]$. В алгоритме 1 предусматривается возможность изменения параметра τ и его роль играют числа $r_k \in [p,1]$, где $0 < p \le 1$. Так как в соответствии с леммой 1 для любых k выполняется включение $z_{k+1} \in D$, то п. 3 означает, что возможно комбинирование алгоритмов метода центров с известной "функцией расстояния" (напр., [3], с. 79–80) с любым релаксационным методом минимизации функции при наличии ограничений и даже с любым возможным способом перехода в пределах множества D от точки z_{k+1} к точке с меньшим значением функции $f(x)$. В частности, если функция $f(x)$ дифференцируема и вектор $s = -f'(z_{k+1})$ является возможным направлением в точке x_k, то легко найти такое число $\lambda > 0$, что $x_{k+1} = x_k + \lambda s \in D$ и $f(x_{k+1}) < f(z_{k+1})$. Может оказаться направлением убывания для функции $f(x)$ в точке z_{k+1} и вектор $s = z_{k+1} - z_k$.

Следующие две леммы позволят сравнить значения целевой функции в итерационных точках, построенных по методу центров [1] и алгоритму 1, с некоторыми начальными условиями.

Лемма 5. *Пусть функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ определены и непрерывны в R_n, точка $z \in R_n$, $F(x) = \max\{\varphi(x) - \varphi(z),\ \psi(x)\}$, $\overline{F}(x) = \max\{\varphi(x) - t,\ \psi(x)\}$,*

$$t > \varphi(z), \tag{9}$$

$$y_1 = \arg\inf\{F(x),\ x \in R_n\}, \tag{10}$$

$$y_2 = \arg\inf\{\overline{F}(x),\ x \in R_n\}. \tag{11}$$

Тогда

$$\overline{F}(y_2) \le F(x) \quad \forall x \in R_n. \tag{12}$$

Если к тому же y_1, y_2 не являются точками локальных минимумов функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$, то

$$\varphi(y_1) < \varphi(y_2). \tag{13}$$

Доказательство. В силу (11) и (9) для любого $x \in R_n$ получаем

$$\overline{F}(y_2) \le \overline{F}(x) = \max\{\varphi(x) - t,\ \psi(x)\} \le \max\{\varphi(x) - \varphi(z),\ \psi(x)\} = F(x)$$

и неравенство (12) доказано.

Докажем (13). Так как по условиям леммы y_1, y_2 не являются точками локальных минимумов функций $\varphi(x) - \mathrm{const}$ и $\psi(x)$, то в соответствии со следствием к лемме 2 имеем

$$\varphi(y_1) - \varphi(z) = \psi(y_1) = F(y_1), \tag{14}$$

$$\varphi(y_2) - t = \psi(y_2) = \overline{F}(y_2). \tag{15}$$

Из (9) и (15) получаем $\varphi(y_2) - \varphi(z) > \varphi(y_2) - t = \psi(y_2)$. А т. к. функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ непрерывны, то найдется такая окрестность ω точки y_2, что $\varphi(x) - \varphi(z) > \psi(x)$ для всех $x \in \omega$. Следовательно,

$F(x) = \varphi(x) - \varphi(z)$ для всех $x \in \omega$. Отсюда, а также из (14) и (10) вытекает $\varphi(y_1) - \varphi(z) = F(y_1) \le F(x) = \varphi(x) - \varphi(z)$ для всех $x \in \omega$. Таким образом,

$$\varphi(y_1) \le \varphi(x) \ \ \forall x \in \omega. \tag{16}$$

Если допустить, что $\varphi(y_2) \le \varphi(y_1)$, то из (16) будет следовать, что $\varphi(y_2) \le \varphi(x)$ для всех $x \in \omega$. Но это значит, что y_2 — точка локального минимума функции $\varphi(x)$, что противоречит условиям леммы. Таким образом, доказано (13). $\square$

Лемма 6. *Пусть последовательности $\{u_k\}$, $\{x_k\}$ построены по методу центров и алгоритму 1 соответственно, причем $f(x_0) < t_0$, $x_0 = u_0$; $x_{k+1} = z_{k+1}$ и u_k, x_k не являются точками локальных минимумов функций $f(x)$, $g(x)$ для любого $k \ge 0$. Тогда*

$$f(u_k) < f(x_k) \ \ \textit{для всех} \ \ k = 1, 2, \ldots \tag{17}$$

Доказательство. Пусть для некоторого $k \ge 1$ выполняется $f(u_k) < f(x_k)$. Тогда в силу неравенства (6) имеем

$$f(u_k) < t_k. \tag{18}$$

Отсюда и из леммы 5 неравенство (17) выполняется для номера $k+1$. А т. к. выполнение неравенства $f(u_1) < f(x_1)$ вытекает из условий леммы и леммы 5, то неравенство (17) по индукции выполняется для всех $k \ge 1$. $\square$

Обозначим через $\Omega(u_k)$ окрестность точки u_k такую, что $f(x) < f(x_k)$ для всех $x \in \Omega(u_k)$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия леммы 6 и последовательность $\{u'_k\}$ такова, что $u'_k \in \Omega(u_k) \cap D$ для всех $k \ge 0$. Тогда $\lim\limits_{k\to\infty} f(u'_k) = f^*$.*

Доказательство. Так как по условиям теоремы $u'_k \in D$ для всех $k \ge 0$, то $f(x_k) > f(u'_k) \ge f^*$ $\forall k \ge 0$. С другой стороны, $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = f^*$. Это и означает, что $\lim\limits_{k\to\infty} f(u'_k) = f^*$. $\square$

Таким образом, теорема 2 показывает, что в методе центров нет необходимости на каждом итерационном шаге минимизировать вспомогательную функцию максимума до конца, а достаточно в качестве следующей итерационной точки брать точку из множества D, принадлежащую некоторой окрестности точки абсолютного минимума вспомогательной функции максимума.

3. Параметризованный метод внешних центров

В данном параграфе считается, что $f(x) \ge g(x)$ для всех $x \in D$. Это условие выполняется, например, если $f(x)$ — неотрицательно определенная квадратичная функция. Тогда для минимизации функции $f(x)$ на множестве D предлагается и обосновывается

Алгоритм 2. Строится функция $F(x) = \max\{f(x),\ g(x)\}$ и пусть $x_0 = \arg\inf\{F(x),\ x \in R_n\}$. Если $x_0 \in D$, то $x_0 = \arg\inf\{f(x),\ x \in D\}$ согласно лемме 3.

Пусть $x_0 \notin D$. Тогда фиксируются последовательности

$$\{\alpha_k\},\ \ k = 0, 1, 2, \ldots\ ;\ \ \alpha_k > 0,\ \ \alpha_{k+1} > \alpha_k\ \ \forall k;\ \ \lim_{k\to\infty} \alpha_k = +\infty,$$
$$\{\beta_k\},\ \ k = 0, 1, 2, \ldots\ ;\ \ \beta_k > 0,\ \ \beta_{k+1} < \beta_k\ \ \forall k;\ \ \lim_{k\to\infty} \beta_k = 0.$$

Если найдена точка x_k, то переход к x_{k+1} осуществляется по следующей схеме.

1. Строится функция $F_k(x) = \max\{\beta_k(f(x) - f(x_k)),\ \alpha_k g(x)\}$, $k \ge 0$.
2. Находится $x_{k+1} = \arg\inf\{F_k(x),\ x \in R_n\}$.
3. Осуществляется переход к п. 1 при k, замененном на $k+1$.

Вспомогательная функция максимума вида $\max\{\beta(f(x)-f(x_0)),\ \alpha g(x)\}$, где $\alpha,\beta>0$ и $x_0\in D$, впервые была введена в [4]. Там же был обоснован факт, что для любого $\varepsilon>0$ существует такое достаточно большое $\overline{\alpha}>0$ (достаточно малое $\overline{\beta}>0$), что для любого $\alpha\geq\overline{\alpha}$ $(0<\beta\leq\overline{\beta})$ и точки $x_1=\arg\inf\{\max\{\beta(f(x)-f(x_0)),\ \alpha g(x)\},\ x\in R_n\}$ будет справедливо $|f(x_1)-f^*|<\varepsilon$, что говорит о том, что можно подобрать такое число $\overline{\alpha}>0$ $(\overline{\beta}>0)$, что на первом же итерационном шаге мы получим ε-решение. В [7] этот факт был доказан и для функции $\max\{\beta(f(x)-\gamma),\ \alpha g(x)\}$, γ — произвольно зафиксированное число.

Следующая лемма позволяет использовать результаты леммы 3 для функций $F_k(x)$, построенных по алгоритму 2.

Лемма 7. *Пусть функции $f(x)$, $g(x)$ определены в R_n, точки $z,z'\in R_n$, $\varphi(x)=\beta'(f(x)-f(z))$, $\psi(x)=\alpha' g(x)$, $\alpha',\beta'>0$;*

$$F'(x)=\max\{\varphi(x),\ \psi(x)\};$$
$$F''(x)=\max\{\beta''(f(x)-f(z')),\ \alpha'' g(x)\},\quad \text{где}\ \ \alpha'',\beta''>0.$$

Тогда

$$F''(x)=\max\{\overline{\beta}(\varphi(x)-\varphi(z')),\ \overline{\alpha}\psi(x)\},\quad \text{где}\ \ \overline{\beta}=\beta''/\beta',\ \ \overline{\alpha}=\alpha''/\alpha'.$$

Доказательство.

$$F''(x)=\max\{\beta''(f(x)-f(z')),\ \alpha'' g(x)\}=$$
$$=\max\left\{\frac{\beta''}{\beta'}(\beta'(f(x)-f(z))-\beta'(f(z')-f(z))),\ \frac{\alpha''}{\alpha'}\alpha' g(x)\right\}=\max\{\overline{\beta}(\varphi(x)-\varphi(z')),\ \overline{\alpha}\psi(x)\}.\quad\square$$

Факт роста последовательности $\{f(x_k)\}$ в методе внешних центров известен (напр., [3], с. 75). Этот факт имеет место и в параметризованном методе внешних центров.

Лемма 8. *Пусть последовательность $\{x_k\}$ построена по алгоритму 2. Если для некоторого $k\geq 0$ $x_k\notin D$ и $f(x_{k+1})\neq f^*$, то имеет место*

1. $x_{k+1}\notin D$.

Если к тому же $g\in M$, то

2. $f(x_{k+1})>f(x_k)$.

Доказательство. Допустим, что $x_0\notin D$, но $x_1\in D$. Тогда в силу второго утверждения леммы 3 $f(x_1)=f^*$, что противоречит условиям леммы. Значит, $x_1\notin D$. Для всех $k\geq 1$ первое утверждение леммы доказывается аналогично.

В силу леммы 7 и третьего утверждения леммы 3

$$\frac{\beta_k\alpha_{k-1}}{\beta_{k-1}\alpha_k}(\beta_{k-1}(f(x_{k+1})-f(x_{k-1}))-\beta_{k-1}(f(x_k)-f(x_{k-1})))>0.$$

Так как $\alpha_k,\alpha_{k-1},\beta_k,\beta_{k-1}>0$, то $f(x_{k+1})-f(x_{k-1})-f(x_k)+f(x_{k-1})>0$ или $f(x_{k+1})>f(x_k)$ и второе утверждение леммы доказано. $\square$

Сходимость алгоритма обосновывает

Теорема 3. *Пусть $g\in M$. Тогда для последовательности $\{x_k\}$, построенной по алгоритму 2, выполняется $\lim\limits_{k\to\infty}f(x_k)=f^*$.*

Доказательство. Если для некоторого $k\geq 0$ $x_k\in D$, то по лемме 3 $f(x_k)=f^*$ и, следовательно, теорема справедлива.

Пусть теперь для любого $k\geq 0$ $x_k\notin D$. Докажем, что имеет место

$$f^*\geq f(x_k).\tag{19}$$

Предположим, что существует номер k, для которого $f(x_k) > f^*$. Но тогда

$$F_{k-1}(x_k) = \max\{\beta_{k-1}(f(x_k) - f(x_{k-1})),\ \alpha_{k-1}g(x_k)\} > \\ > \max\{\beta_{k-1}(f(x^*) - f(x_{k-1})),\ \alpha_{k-1}g(x^*)\} = F_{k-1}(x^*),$$

что противоречит п. 2 алгоритма 2. Значит, неравенство (19) справедливо для всех k. Отсюда и из второго утверждения леммы 8 заключаем, что

$$\lim_{k\to\infty}(f(x_{k+1}) - f(x_k)) = 0. \tag{20}$$

Из третьего утверждения леммы 3 следует

$$0 < g(x_{k+1}) \le g(x_k) \ \text{ для любого } \ k \ge 0. \tag{21}$$

Допустим, что $\lim\limits_{k\to\infty} g(x_k) = C > 0$. Из (20) следует, что существует такой номер k, что $\beta_k(f(x_{k+1}) - f(x_k)) < \alpha_k g(x_{k+1})$ и $F_k(x_{k+1}) = \alpha_k g(x_{k+1})$. Тогда существует такая окрестность $\Omega(x_{k+1})$ точки x_{k+1}, что для любого $x \in \Omega(x_{k+1})$ выполняется $\beta_k(f(x) - f(x_k)) < \alpha_k g(x)$ и $F_k(x) = \alpha_k g(x)$. В соответствии с п. 2 алгоритма $\alpha_k g(x_{k+1}) = F_k(x_{k+1}) \le F_k(x) = \alpha_k g(x)$ для всех $x \in \Omega(x_{k+1})$. Так как $\alpha_k > 0\ \forall k \ge 0$ и $g \in M$, то x_{k+1} — точка абсолютного минимума функции $g(x)$ и $g(x_{k+1}) > 0$ — противоречит тому, что множество D не пусто. Следовательно,

$$\lim_{k\to\infty} g(x_k) = 0. \tag{22}$$

Из неравенств (20), (22) и второго утверждения леммы 3 вытекает, что $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = f^*$. $\square$

Замечание. Если условие $f(x) \ge g(x)$ для всех $x \in D$ не выполняется для функции $f(x)$, тогда возможно удастся отыскать такую константу $\gamma > 0$, что $f(x) + \gamma \ge g(x)$ для всех $x \in D$ и минимизировать функцию $f_1(x) = f(x) + \gamma$, причем $\operatorname{Arg}\inf\{f(x),\ x \in D\} = \operatorname{Arg}\inf\{f_1(x),\ x \in D\}$.

4. Алгоритм с двусторонним приближением к минимуму

Пусть функция $f(x)$ такова, что $f(x) \ge g(x)$, для всех $x \in D$. Для минимизации функции $f(x)$ на множестве D предлагается

Алгоритм 3. Строится функция $F(x) = \max\{f(x),\ g(x)\}$ и пусть $x_0 = \arg\inf\{F(x),\ x \in R_n\}$. Если $x_0 \in D$, то $x_0 = \arg\inf\{f(x),\ x \in D\}$ согласно лемме 3, если же $x_0 \notin D$, тогда выбирается точка $y_0 \in D$, числа $\underline{\lambda}$, $\overline{\lambda}$ такие, что $0 < \underline{\lambda} \le \overline{\lambda} < 1$, фиксируются последовательности

$$\{\alpha_k\},\ \ k = 0, 1, 2, \dots\ ;\ \ \alpha_k > 0,\ \ \alpha_{k+1} > \alpha_k\ \ \forall k;\ \ \lim_{k\to\infty}\alpha_k = +\infty;$$
$$\{\beta_k\},\ \ k = 0, 1, 2, \dots\ ;\ \ \beta_k > 0,\ \ \beta_{k+1} < \beta_k\ \ \forall k;\ \ \lim_{k\to\infty}\beta_k = 0.$$

Если найдены x_k, y_k $(k \ge 0)$, то переход к x_{k+1}, y_{k+1} осуществляется по следующей схеме.

1. Выбирается число $\delta_k = \lambda_k f(x_k) + (1 - \lambda_k) f(y_k)$, где $\lambda_k \in [\underline{\lambda}, \overline{\lambda}]$.
2. Строится функция $F_k(x) = \max\{\beta_k(f(x) - \delta_k),\ \alpha_k g(x)\}$, $k \ge 0$.
3. Находится $z_{k+1} = \arg\inf\{F_k(x),\ x \in R_n\}$.
4. Если $z_{k+1} \in D$, то $y_{k+1} = z_{k+1}$, $x_{k+1} = x_k$. Если $z_{k+1} \notin D$, то полагаем $x_{k+1} = z_{k+1}$, $y_{k+1} = y_k$.
5. Осуществляется переход к п. 1 при k, замененном на $k + 1$.

Замечание. Так как согласно алгоритму 3 $f(y_k) \ge f^*$ для всех k, а в точках x_k достигают абсолютного минимального значения функции вида $\max\{\varphi(x),\ \psi(x)\}$ и $x_k \notin D$ для всех k, то согласно второму из утверждений леммы 1 для всех $x \in D$ выполняется неравенство $\varphi(x) \ge \varphi(x_k)$. Все это и означает, что

$$f(y_k) \ge f^* \ge f(x_k)\ \ \forall k, x^* \in D^*. \tag{23}$$

Определим два множества индексов $K_1 = \{k : k \geq 0,\ z_{k+1} \in D\}$ и $K_2 = \{k : k \geq 0,\ z_{k+1} \notin D\}$.

Лемма 9. *Пусть последовательности $\{x_k\}$, $\{y_k\}$ построены по алгоритму 3, $f(y_k) \neq f^*$ для всех $k \geq 0$ и $g \in M$. Тогда имеют место*

1. $f(y_{k+1}) \leq \delta_k$ *для всех $k \in K_1$;* (24)
2. $f(x_{k+1}) \geq \delta_k$ *для всех $k \in K_2$.* (25)

Доказательство. Предположим, что существует такой номер $k \in K_1$, что $f(y_{k+1}) > \delta_k$. В этом случае $g(y_{k+1}) \leq 0 < \beta_k(f(y_{k+1}) - \delta_k)) = F_k(y_{k+1}) \leq F_k(x)$ для всех $x \in R_n$. Отсюда $g(x) \leq 0 < F_k(x) = \beta_k(f(x) - \delta_k)$ для всех $x \in D$. А т. к. $\beta_k > 0$ для всех $k \geq 0$, то из последних двух соотношений $f(y_{k+1}) \leq f(x)$ для всех $x \in D$, что противоречит условиям леммы. Первое утверждение леммы доказано.

Допустим, что существует такой номер $k \in K_2$, что $f(x_{k+1}) < \delta_k$. Тогда $\alpha_k g(x_{k+1}) > 0 > \beta_k(f(x_{k+1}) - \delta_k)$. Найдется такая окрестность Ω точки x_{k+1}, что для всех $x \in \Omega$ будет выполняться $\beta_k(f(x) - \delta_k) < \alpha_k g(x)$. Отсюда $F_k(x) = \alpha_k g(x)$ для всех $x \in \Omega$. Так как $F_k(x_{k+1}) \leq F_k(x)$ для всех $x \in R_n$, то имеем $\alpha_k g(x_{k+1}) = F_k(x_{k+1}) \leq F_k(x) = \alpha_k g(x)$ для всех $x \in \Omega$. По условиям леммы $g \in M$, следовательно, x_{k+1} — точка абсолютного минимума функции $g(x)$, к тому же $g(x_{k+1}) > 0$ — противоречит тому, что множество D не пусто и второе утверждение леммы доказано. □

Следствие. Пусть выполняются условия леммы 9, тогда имеют место

1. $f(y_k) \geq f(y_{k+1})$ для всех $k \geq 0$; (26)
2. $f(x_{k+1}) \geq f(x_k)$ для всех $k \geq 0$. (27)

Доказательство. Если $y_{k+1} = y_k$, то неравенство (26) выполняется. В противном случае $y_{k+1} = \arg\inf\{F_k(x),\ x \in R_n\}$ и $k \in K_1$. Тогда неравенство (26) вытекает из определения числа δ_k и неравенств (23), (24).

Справедливость неравенства (27) доказывается аналогично. □

Лемма 10. *Пусть числа γ_1, γ_2, $\underline{\lambda}$, $\overline{\lambda}$, ε, a_1, a_2 таковы, что $0 < \underline{\lambda} \leq \overline{\lambda} < 1$, $\gamma_1 - \varepsilon < a_1 \leq \gamma_1 < \gamma_2 \leq a_2 < \gamma_2 + \varepsilon$ и $\varepsilon \leq \min\{\underline{\lambda}(\gamma_2 - \gamma_1),\ (1 - \overline{\lambda})(\gamma_2 - \gamma_1)\}$. Тогда*

$$\gamma_1 < \lambda a_1 + (1 - \lambda) a_2 < \gamma_2 \quad \text{для всех} \quad \lambda \in [\underline{\lambda}, \overline{\lambda}]. \tag{28}$$

Доказательство. Из условий леммы последовательно получаем

$$\lambda a_1 + (1-\lambda) a_2 = a_1 + (1-\lambda)(a_2 - a_1) > \gamma_1 - \varepsilon + (1-\overline{\lambda})(\gamma_2 - \gamma_1) \geq \gamma_1 - (1-\overline{\lambda})(\gamma_2 - \gamma_1) + (1-\overline{\lambda})(\gamma_2 - \gamma_1) = \gamma_1$$

и первое из неравенств (28) доказано.

Справедливость второго из неравенств (28) доказывается аналогично. □

Теорема 4. *Пусть последовательности $\{x_k\}$, $\{y_k\}$ построены по алгоритму 3, $f(y_k) \neq f^*$ для всех $k \geq 0$ и $g \in M$. Тогда $\lim\limits_{k\to\infty} f(y_k) = f^* = \lim\limits_{k\to\infty} f(x_k)$.*

Доказательство. Из неравенств (23), (26), (27) следует, что последовательность $\{f(x_k)\}$ возрастает и ограничена сверху, а последовательность $\{f(y_k)\}$ убывает и ограничена снизу. Значит, последовательности $\{f(x_k)\}$, $\{f(y_k)\}$ сходятся. Обозначим $\gamma_1 = \lim\limits_{k\to\infty} f(x_k)$, $\gamma_2 = \lim\limits_{k\to\infty} f(y_k)$. Тогда с учетом вышесказанного имеем

$$f(y_k) \geq \gamma_2 \geq \gamma_1 \geq f(x_k) \quad \text{для всех} \quad k \geq 0. \tag{29}$$

Предположим, что $\gamma_1 < \gamma_2$. Из сходимости последовательностей $\{f(x_k)\}$, $\{f(y_k)\}$ следует, что для $\varepsilon = \min\{\underline{\lambda}(\gamma_2 - \gamma_1),\ (1 - \overline{\lambda})(\gamma_2 - \gamma_1)\} > 0$ существует такой номер N, что для всех $k \geq N$ выполняется $|f(y_k) - \gamma_2| < \varepsilon$ и $|f(x_k) - \gamma_1| < \varepsilon$ или с учетом неравенства (29) $f(y_k) < \gamma_2 + \varepsilon$ и $f(x_k) > \gamma_1 - \varepsilon$ для всех $k \geq N$.

Тогда из леммы 10 и из неравенств (29) для любого $k \geq N$ выполняется $f(x_{k+1}) \leq \gamma_1 < \delta_k = \lambda_k f(x_k) + (1-\lambda_k)f(y_k) < \gamma_2 \leq f(y_{k+1})$. Если $k \in K_1$, то последнее неравенство противоречит неравенству (24), а если $k \in K_2$, то противоречит (25).

Следовательно, $\gamma_1 = \gamma_2$. А из неравенства (23) имеем $\lim\limits_{k\to\infty} f(y_k) = f^* = \lim\limits_{k\to\infty} f(x_k)$. □

Следствие. Пусть для некоторого номера $p \geq 0$ выполняется $z_{p+1} \in D$ и $f(x_p) < f^*$ ($z_{p+1} \notin D$ и $f(y_p) > f^*$). Тогда существует такой номер $k > p$, что $z_{k+1} \notin D$ ($z_{k+1} \in D$).

Доказательство. Пусть $z_{p+1} \in D$ и $f(x_p) < f^*$. Допустим, что для всех $k > p$ выполняется $z_{k+1} \in D$. Это означает, что $f(x_{k+1}) = f(x_k) = \gamma$ для $\forall k \geq p$. Из теоремы 4 и п. 1 алгоритма 3 следует, что $\lim\limits_{k\to\infty} \delta_k = \lim\limits_{k\to\infty} f(y_k)$. Но с другой стороны, для всех $k > p$

$$f(y_k) - \delta_k = f(y_k) - (1-\lambda_k)f(y_k) - \lambda_k f(x_k) = \lambda_k(f(y_k) - f(x_k)) \geq \underline{\lambda}(f^* - \gamma) = \mathrm{const} > 0$$

— получили противоречие.

Случай, когда $z_{p+1} \notin D$ и $f(y_p) > f^*$, доказывается аналогично. □

Замечание. Алгоритм 3 обеспечивает по заданному $\varepsilon > 0$ выполнение неравенства $|f(y_k) - f(x_k)| < \varepsilon$, начиная с некоторого номера k. Оно легко проверяется в процессе вычислений и гарантирует в силу (23) близость значений $f(x_k)$, $f(y_k)$ к минимальному значению функции $f(x)$ на множестве D с точностью до ε.

Все предлагаемые алгоритмы, как обычно в методах центров, являются принципиальными. Для того чтобы они стали численно реализуемыми, на функции $f(x)$, $g(x)$ должны быть наложены дополнительные требования, позволяющие применить те или иные численные методы нахождения абсолютного минимума вспомогательной функции максимума.

Литература

1. Bui Trong Lieu, Huard P. *La methode des centres dans un espace topologique* // Numer. Math. – 1966. – Bd. 8. – S. 56–67.
2. Huard P. *Resolution of mathematical programming with nonlinear constraints by the method of centres* // Non. progr. – 1967. – P. 207–219.
3. Гроссман К., Каплан А.А. *Нелинейное программирование на основе безусловной минимизации.* – Новосибирск: Наука, 1981. – 183 с.
4. Заботин Я.И. *Минимаксный метод решения задачи математического программирования* // Изв. вузов. Математика. – 1975. – № 6. – С. 36–43.
5. Заботин Я.И., Князев Е.А. *Алгоритм с адаптацией в параметризованном методе центров* // Исследов. по прикладной матем. – Казань, 1987. – № 14. – С. 9–15.
6. Заботин И.Я., Князев Е.А. *Вариант параметризованного метода центров* // Изв. вузов. Математика. – 1995. – № 12. – С. 26–32.
7. Князев Е.А. *Алгоритмы с адаптацией в методе центров* // Дис. … канд. физ.-матем. наук. – Казань, 1987. – 134 с.
8. Крейнин М.И. *Релаксационные алгоритмы минимизации недифференцируемых функций* // Дис. … канд. физ.-матем. наук. – Казань, 1981. – 140 с.

Казанский государственный университет

Поступила 24.05.1998