ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 9 (436)

УДК 514.752

Л.А. МАСАЛЬЦЕВ

О МИНИМАЛЬНЫХ ПОДМНОГООБРАЗИЯХ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Связные минимальные поверхности постоянной гауссовой кривизны в пространственных формах классифицированы в работе Р. Брайента [1]. Изометрические погружения областей n-мерного пространства Лобачевского в $2n-1$-мерное евклидово пространство E^{2n-1} рассматривались в [2]–[4]. В [2] доказано существование базиса в нормальном расслоении L^n в E^{2n-1} с нулевыми коэффициентами кручения, в [3] введены координаты в L^n с помощью асимптотических направлений, в [4] доказана возможность введения локальных координат в виде линий кривизны на области D пространства Лобачевского L^n изометрически погруженной в E^{2n-1}. В [5] рассмотрены изометрические погружения L^n в E^{n+m}, $m \geq n-1$, с дополнительным условием: нормальная связность погружения плоская. Это условие равносильно существованию n главных направлений в каждой точке погруженной области D пространства L^{n+m}. С помощью главных направлений можно ввести ортогональные координаты $u_1, \dots, u_n$ в области D, в которых линейный элемент имеет вид $ds^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} \sin^2 \sigma_i du_i^2$. Выберем ортонормированный базис нормальных полей ξ_p, $p = 1, \dots, m$, коэффициенты кручения которых равны нулю. В этом базисе вторые квадратичные формы области D имеют диагональный вид $\mathrm{II}^{(p)} = \sum\limits_{i=1}^{n} L_{ii}^{(p)} du_i^2$, $p = 1, \dots, m$. В [5] доказано, что всякому изометрическому класса C^3 погружению области L^n в E^{n+m}, $m \geq n-1$, с плоской нормальной связностью можно поставить в соответствие $(m+1)\times(m+1)$ ортогональную матрицу

$$\begin{bmatrix} \sin\sigma_1 & \dots & \sin\sigma_n & H_{n+1} & \dots & H_{m+1} \\ \dfrac{L_{11}^{(1)}}{\sin\sigma_1} & \dots & \dfrac{L_{nn}^{(1)}}{\sin\sigma_n} & \Phi_{n+1\,1} & \dots & \Phi_{m+1\,1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{L_{11}^{(m)}}{\sin\sigma_1} & \dots & \dfrac{L_{nn}^{(m)}}{\sin\sigma_n} & \Phi_{n+1\,m} & \dots & \Phi_{m+1\,m} \end{bmatrix}.$$

Заметим, что $\sum\limits_{i=1}^{n} \sin^2\sigma_i \leq 1$. Основной результат данной статьи составляет

Теорема. *Область D пространства Лобачевского L^n нельзя изометрически в классе C^3 погрузить в евклидово пространство E^{n+m}, $m \geq n-1$, в виде минимального подмногообразия с плоской нормальной связностью.*

Замечание. В случае $m = n-1$ требование плоскости нормальной связности излишне и получается иное доказательство теоремы 2 из [3] в случае, когда объемлющее пространство евклидово.

Предварительно докажем лемму.

Лемма. *Для вектора средней кривизны H подмногообразия L^n в E^{n+m} выполняется равенство $H^2 = \frac{1}{n^2}\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{\sin^2\sigma_i} - 1$.*

Доказательство. Вектор средней кривизны H в координатах линий кривизны и в указанном выше параллельном базисе нормального расслоения равен

$$H = \frac{1}{n} \sum_{i,j,p,} g^{ij} L_{ij}^{(p)} \xi_p = \frac{1}{n} \sum_{p=1}^{m} \Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{L_{ii}^{(p)}}{\sin^2 \sigma_i} \Big) \xi_p .$$

Используя ортогональность столбцов указанной матрицы, имеем

$$n^2 H^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sin^4 \sigma_i} \Big(\sum_{p=1}^{m} (L_{ii}^{(p)})^2 \Big) + 2 \sum_{i<j} \frac{1}{\sin^2 \sigma_i \sin^2 \sigma_j} \sum_{p=1}^{m} L_{ii}^{(p)} L_{jj}^{(p)} =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sin^4 \sigma_i} (\cos^2 \sigma_i \sin^2 \sigma_i) + 2 \sum_{i<j} \frac{1}{\sin^2 \sigma_i \sin^2 \sigma_j} (- \sin^2 \sigma_i \sin^2 \sigma_j) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \operatorname{ctg}^2 \sigma_i - 2C_n^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sin^2 \sigma_i} - n^2 . \quad \Box$$

Доказательство теоремы. Допустим, что существует минимальное погружение L^n в E^{n+m} с плоской нормальной связностью. Используя выражение для H^2, полученное в лемме, и неравенство между средним гармоническим и средним арифметическим, имеем

$$H^2 = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sin^2 \sigma_i} - 1 \geq \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} \sin^2 \sigma_i} - 1.$$

При этом случай равенства возможен тогда и только тогда, когда

$$\frac{1}{\sin^2 \sigma_i} = \lambda(u_1, \ldots, u_n) \sin^2 \sigma_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Если погружение минимально, то $H^2 \equiv 0$ в области D, тогда $\sum\limits_{i=1}^{n} \sin^2 \sigma_i = 1$ и, следовательно, $\sin^2 \sigma_i \equiv \frac{1}{n}$, $i = 1, \ldots, n$, что противоречит неевклидовости метрики ds^2. $\Box$

Следствие. Пусть M^n — связное минимальное подмногообразие постоянной секционной кривизны K с плоской нормальной связностью в E^{n+m} $(m \geq n-1)$. Тогда $K \equiv 0$ и M^n есть область n-плоскости в E^{n+m}.

Действительно, как показано в [3], из уравнений Гаусса и минимальности следует, что $K \leq 0$, причем, если $K = 0$, то M^n является вполне геодезическим подмногообразием. Случай же $K < 0$ невозможен по доказанной нами теореме.

Литература

1. Bryant R. *Minimal surfaces of constant curvature in S^n* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1985. – V. 290. – № 1. – P. 259–271.
2. Cartan E. *Sur les variétes de courbure constante d'un espace euclidien et noneuclidien* // Bull. Soc. math. France. – 1920. – T. 48. – P. 132–208.
3. Moore J.D. *Isometric immersions of space forms in space forms* // Pacific J. Math. – 1972. – V. 40. – № 1. – P. 157–166.
4. Аминов Ю.А. *Изометрические погружения областей n-мерного пространства Лобачевского в $(2n-1)$-мерное евклидово пространство* // Матем. сб. – 1980. – Т. 111. – № 3. – С. 402–433.
5. Аминов Ю.А. *Изометрические погружения областей n-мерного пространства Лобачевского в евклидовы пространства с плоской нормальной связностью* // Матем. сб. – 1988. – Т. 137. – № 3. – С. 275–299.

Харьковский государственный университет (Украина)

Поступила
18.04.1996