ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2002 МАТЕМАТИКА № 1 (476)

УДК 517.988.8

С.Е. ЖЕЛЕЗОВСКИЙ

ОЦЕНКИ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ ПРОЕКЦИОННО-РАЗНОСТНОГО МЕТОДА ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Введение

В данной статье исследуется сходимость схемы решения абстрактного гиперболического уравнения в гильбертовом пространстве с переменными операторными коэффициентами, являющейся комбинацией схемы Галёркина по пространству и трехслойной разностной схемы с весами по времени. Какие-либо специальные условия на конечномерные подпространства, в которых должны принимать значения приближенные решения, отсутствуют. Устанавливаются асимптотические энергетические оценки скорости сходимости рассматриваемой вычислительной схемы. В конце статьи показано, что полученные результаты применимы к исследованию сходимости схем проекционно-разностного метода решения начально-краевых задач для гиперболических уравнений второго порядка с дискретизацией по пространству методом конечных элементов.

Основные результаты работы содержатся в теоремах 4–6. Теорема 4 относится к случаю естественной гладкости точного решения исходного уравнения, а теоремы 5, 6 — к случаям повышенной гладкости точного решения. В двух последних теоремах даны оценки, неулучшаемые по порядку. Близкие результаты для гиперболических уравнений второго порядка с коэффициентами, не зависящими от времени, и симметричных схем были получены в [1]. Для полудискретного метода Галёркина оценки, аналогичные установленным здесь, были получены в [2]. Для абстрактных параболических уравнений в случае чисто неявной разностной схемы по времени результаты, подобные результатам данной работы, устанавливались в [3], [4].

В статье используются стандартные обозначения вида $\mathcal{L}(X;Y)$, $C^k([0,T];X)$, $L^p(0,T;X)$, где X и Y — линейные нормированные пространства, $[0,T]$ — отрезок оси $\mathbf{R}$ (напр., [5], с. 579), а также следующие обозначения: $\mathcal{B}(X)$ — пространство билинейных форм $\varphi : X \times X \to \mathbf{R}$, для которых $\|\varphi\|_{\mathcal{B}(X)} = \sup\limits_{\|x_1\|_X = \|x_2\|_X = 1} |\varphi(x_1,x_2)| < \infty$; $W^{k,p}(0,T;X)$, $k \in \mathbf{N}$, $p = 1$ или $p = \infty$, — пространство функций из $C^{k-1}([0,T];X)$, производные k-го порядка которых, понимаемые в смысле распределений ([5], с. 20), принадлежат $L^p(0,T;X)$. Кроме того, используются обозначения вида $\widehat{y}$, $\check{y}$, y_t, $y_{\overline{t}}$, $y_{\overset{\circ}{t}}$, $y_{\overline{t}t}$, принятые в теории разностных схем ([6], сс. 613, 614; [7], с. 10).

1. Исходная задача

Пусть H — вещественное сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_H$ и нормой $\|\cdot\|_H$, $T > 0$ — заданное число. Будем рассматривать задачу Коши для абстрактного гиперболического уравнения

$$u''(t) + A(t)u(t) + B(t)u(t) = f(t), \quad t \in [0,T], \tag{1.1}$$

$$u(0) = u'(0) = 0, \tag{1.2}$$

где $u : [0,T] \to H$ — искомая функция, $A(t)$, $B(t)$, $t \in [0,T]$, — заданные операторы, $f : [0,T] \to H$ — заданная функция. Все операторы $A(t)$, $t \in [0,T]$, — неограниченные, самосопряженные и положительно определенные в H и имеют общую область определения $D \subset H$; оператор $(A(0))^{-1}$, обратный к $A(0)$, компактен в H. В силу теоремы Гайнца ([8], с. 177) все операторы $(A(t))^{1/2}$, $t \in [0,T]$, также имеют общую область определения, которую обозначим через V. Введем на D норму $\|\cdot\|_D = \|A(0)\cdot\|_H$, тем самым превратим D в банахово пространство. Примем, что для любых $v \in D$ и $t \in [0,T]$

$$\|v\|_D \leq a_1 \|A(t)v\|_H, \tag{1.3}$$

$$\|A(t)v\|_H \leq a_2 \|v\|_D, \tag{1.4}$$

где a_1, a_2 — константы, не зависящие от v и t. Обозначим энергетическое скалярное произведение и энергетическую норму, порожденные оператором $A(t)$, соответственно через $a(t,\cdot,\cdot\cdot)$ и $\|\cdot\|_{(t)}$, т. е. $a(t,v,w) = ((A(t))^{1/2}v,(A(t))^{1/2}w)_H$, $\|v\|_{(t)} = \|(A(t))^{1/2}v\|_H$, $t \in [0,T]$, $v,w \in V$. Снабдив V скалярным произведением $(\cdot,\cdot\cdot)_V = a(0,\cdot,\cdot\cdot)$ и соответственно нормой $\|\cdot\|_V = \|\cdot\|_{(0)}$, превратим это множество в сепарабельное гильбертово пространство. Будем считать, что функция "$t \to a(t,\cdot,\cdot\cdot)$" принадлежит пространству $W^{2,1}(0,T;\mathcal{B}(V))$, функция "$t \to B(t)$" — пространству $W^{1,1}(0,T;\mathcal{L}(V;H))$, а $f \in W^{1,1}(0,T;H)$.

Все сформулированные здесь условия всюду в дальнейшем считаются выполненными без специальных оговорок. Все дополнительные условия, налагаемые ниже на операторы $A(t)$, $B(t)$ и функцию f, считаются выполненными только тогда, когда об этом сказано явно.

Отметим для дальнейшего некоторые следствия принятых условий. Из (1.3), (1.4) по теореме Гайнца следует, что для любых $v \in D$ и $t \in [0,T]$

$$\|v\|_V \leq a_1^{1/2} \|v\|_{(t)}, \tag{1.5}$$

$$\|v\|_{(t)} \leq a_2^{1/2} \|v\|_V. \tag{1.6}$$

Так как "$t \to a(t,\cdot,\cdot\cdot)$" $\in W^{2,1}(0,T;\mathcal{B}(V))$, то заведомо "$t \to a(t,\cdot,\cdot\cdot)$" $\in C^1([0,T];\mathcal{B}(V))$, поэтому существует такая константа a_3, что для любых $t \in [0,T]$, $v,w \in V$

$$|a'(t,v,w)| \leq a_3 \|v\|_V \|w\|_V, \tag{1.7}$$

где "$t \to a'(t,\cdot,\cdot\cdot)$" — производная первого порядка функции "$t \to a(t,\cdot,\cdot\cdot)$". Так как "$t \to B(t)$" $\in W^{1,1}(0,T;\mathcal{L}(V;H))$, то заведомо "$t \to B(t)$" $\in C^0([0,T];\mathcal{L}(V;H))$, поэтому существует такая константа b_0, что для любых $t \in [0,T]$, $v \in V$

$$\|B(t)v\|_H \leq b_0 \|v\|_V. \tag{1.8}$$

Теорема 1. *Задача* (1.1), (1.2) *имеет единственное решение* $u \in W^{2,\infty}(0,T;H) \cap W^{1,\infty}(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;D)$, *удовлетворяющее уравнению* (1.1) *при почти всех* $t \in [0,T]$ *и начальным условиям* (1.2) *непосредственно.*

Доказательство существования решения задачи (1.1), (1.2) в указанном смысле проводится по известной схеме с использованием полудискретных аппроксимаций Галёркина ([5], сс. 22–27, 30–32; [9], с.213–220). Доказательство единственности решения аналогично, например, доказательству теоремы 2.1 в ([9], гл. IV, с. 206).

Ниже в теоремах 5, 6 предполагается, что решение u задачи (1.1), (1.2) обладает определенной повышенной гладкостью. Требуемая в этих теоремах (фактически несколько более высокая) гладкость решения задачи (1.1), (1.2) имеет место при надлежащем усилении условий на операторы $A(t)$, $B(t)$ и функцию f. Сформулируем здесь соответствующие результаты.

Теорема 2. *Пусть выполнены следующие условия*:

1) "$t \to A(t)$" $\in W^{1,1}(0,T;\mathcal{L}(D;H))$;
2) "$t \to a(t,\cdot,\cdot\cdot)$" $\in W^{3,1}(0,T;\mathcal{B}(V))$;
3) "$t \to B(t)$" $\in W^{2,1}(0,T;\mathcal{L}(V;H))$;
4) $f \in W^{2,1}(0,T;H)$;

5) $f(0) \in V$.

Тогда $u \in W^{3,\infty}(0,T;H) \cap W^{2,\infty}(0,T;V) \cap W^{1,1}(0,T;D)$.

Теорема 3. *Пусть выполнены следующие условия*:

1) “$t \to A(t)$” $\in W^{2,1}(0,T;\mathcal{L}(D;H))$;
2) “$t \to a(t,\cdot,\cdot\cdot)$” $\in W^{4,1}(0,T;\mathcal{B}(V))$;
3) “$t \to B(t)$” $\in W^{3,1}(0,T;\mathcal{L}(V;H))$;
4) $f \in W^{3,1}(0,T;H)$;
5) $f(0) \in D$, $f'(0) \in V$.

Тогда $u \in W^{4,\infty}(0,T;H) \cap W^{3,\infty}(0,T;V) \cap W^{2,1}(0,T;D)$.

Техника доказательства теорем 2, 3 близка используемой в ([5], с. 30–32; [9], с. 216–220).

2. Схема проекционно-разностного метода

Зададим последовательность $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ конечномерных подпространств пространства V. Примем обозначения: $A_n(t)$, $t \in [0,T]$, — действующий в V_n оператор, определенный из тождества $(A_n(t)v_n, w_n)_H = a(t, v_n, w_n)$, $v_n, w_n \in V_n$; P_n и Q_n — ортопроекторы на V_n соответственно в H и в V; E — тождественный оператор в V; $R_n = E - Q_n$. Будем считать, что последовательность подпространств $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ предельно плотна в V, т.е. для любого $v \in V$ $\|R_n v\|_V \to 0$ при $n \to \infty$. Далее, обозначим $\overline{\omega}_\tau = \{k\tau\}_{k=0}^{\infty} \cap [0,T]$ ($\overline{\omega}_\tau$ — сетка на отрезке $[0,T]$ с шагом τ и узлами $k\tau$, $k = 0,1,2,\dots$), $\omega_\tau = \overline{\omega}_\tau \setminus \{0, \max \overline{\omega}_\tau\}$, где τ — любое число из $]0, T/2]$.

Зафиксируем некоторые $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4 \in \mathbf{R}$, $\sigma_1 \geq \sigma_2$. Рассмотрим схему проекционно-разностного метода для задачи (1.1), (1.2):

$$y_{\bar{t}t} + A_n(t) y^{(\sigma_1,\sigma_2)}(t) + P_n B(t) y^{(\sigma_3,\sigma_4)}(t) = P_n f(t), t \in \omega_\tau, \tag{2.1}$$

$$y(t) \in V_n, \quad t \in \overline{\omega}_\tau, \quad y(0) \text{ и } y(\tau) \text{ заданы.} \tag{2.2}$$

Здесь $n \in \mathbf{N}$, $\tau \in]0, T/2]$, $y^{(\sigma_i,\sigma_{i+1})} = \sigma_i \widehat{y} + (1 - \sigma_i - \sigma_{i+1}) y + \sigma_{i+1} \check{y}$, $i = 1$ или $i = 3$. Все рассматриваемые пары значений (n,τ) всюду в этой работе считаем такими, что

$$\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \frac{1+\varepsilon}{4}\right) \tau^2 A_n(t) + E \geq 0, t \in \omega_\tau, \tag{2.3}$$

где $\varepsilon > 0$ — константа, не зависящая от n, τ и t, операторное неравенство понимается в смысле скалярного произведения пространства H. Условия $\sigma_1 \geq \sigma_2$ и (2.3) получаются, если записать для главной части уравнения (2.1) (без члена $P_n B(t) y^{(\sigma_3,\sigma_4)}(t)$) известные в теории операторно-разностных схем условия устойчивости ([6], с. 363; [7], с. 235). Очевидно, если $\sigma_1 + \sigma_2 > 1/2$, то условие (2.3) выполнено при любых n и τ с константой $\varepsilon = 2(\sigma_1 + \sigma_2) - 1$.

Лемма 1. *При любом выборе допустимой, т.е. удовлетворяющей* (2.3), *пары значений* $(n,\tau) \in \mathbf{N}\times]0,T/2]$, *где* τ *достаточно мало* ($\tau \leq \tau_1$, *где* $\tau_1 > 0$ – *константа, не зависящая от* n), *и заданных начальных значений* $y(0), y(\tau) \in V_n$ *задача* (2.1), (2.2) *имеет единственное решение* $y : \overline{\omega}_\tau \to V_n$.

Справедливость этой леммы вытекает из того, что при любом выборе допустимой пары (n,τ), где τ достаточно мало в указанном смысле, операторный коэффициент $\tau^{-2}E + \sigma_1 A_n(t) + \sigma_3 P_n B(t)$ при $\widehat{y}(t)$ в (2.1) положителен в смысле скалярного произведения пространства H для любого $t \in \omega_\tau$, в чем нетрудно убедиться, используя условия $\sigma_1 \geq \sigma_2$, (2.3) и неравенство (1.8).

Решение задачи (2.1), (2.2), соответствующее некоторой паре значений (n,τ), удовлетворяющей требованиям леммы 1, и некоторым заданным начальным значениям $y(0)$, $y(\tau) \in V_n$, будем трактовать как приближенное решение задачи (1.1), (1.2), построенное проекционно-разностным методом. Далее будем рассматривать следующие два варианта начальных условий к схеме (2.1), (2.2):

$$y(0) = y(\tau) = 0 \tag{2.4}$$

либо (при $f(0) \in V$)

$$y(0) = 0, \quad y(\tau) = \frac{\tau^2}{2} Q_n f(0). \tag{2.5}$$

Приведем нужную для дальнейшего оценку сеточных производных решения задачи (2.1), (2.2) первого и второго порядков.

Лемма 2. *При любом выборе допустимой, т. е. удовлетворяющей* (2.3), *пары значений* $(n, \tau) \in \mathbf{N} \times]0, T/2]$, *где* τ *достаточно мало* ($\tau \le \tau_2$, $\tau_2 \in]0, \tau_1]$ — *константа, не зависящая от* n; τ_1 — *константа, указанная в лемме* 1), *для решения задачи* (2.1), (2.2) *с начальными условиями* (2.4) *либо при* $f(0) \in V$ *с начальными условиями* (2.5) *выполнена оценка*

$$\max_{t \in \omega_\tau \cup \{0\}} \|y_t\|_V + \max_{t \in \omega_\tau} \|y_{\bar{t}t}\|_H \le M, \tag{2.6}$$

где M — *константа, не зависящая от* n *и* τ.

При доказательстве этой леммы используется техника сеточных энергетических оценок ([6], сс. 356–363, 370, 371; [7], сс. 225, 226, 233–236, 266, 267).

3. Основные результаты

Положим $\rho_n = \|R_n\|_{\mathcal{L}(D;V)}$, $n \in \mathbf{N}$. Будем оценивать скорость сходимости схемы проекционно-разностного метода (2.1), (2.2) для задачи (1.1), (1.2) в терминах величин ρ_n и τ. Из принятых условий предельной плотности последовательности подпространств $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ в V и компактности оператора $(A(0))^{-1}$ в H следует, что $\rho_n \to 0$ при $n \to \infty$. Во многих случаях при конкретном выборе подпространств V_n величину ρ_n можно оценить сверху (по крайней мере асимптотически) некоторой известной величиной, стремящейся к нулю при $n \to \infty$. В конце статьи указана типичная асимптотическая оценка сверху величины ρ_n в приложении к первой начально-краевой задаче для гиперболического уравнения второго порядка при дискретизации задачи по пространству методов конечных элементов.

Оценки скорости сходимости схемы (2.1), (2.2) даны в теоремах 4–6. Теорема 4 относится к случаю естественной гладкости точного решения u задачи (1.1), (1.2), теоремы 5 и 6 — к случаям повышенной гладкости точного решения. Во всех этих теоремах имеется в виду, что $n \to \infty$, $\tau \to 0$ таким образом, что пара значений (n, τ) остается допустимой (удовлетворяющей (2.3)). В формулировке теоремы 6, где речь идет о схеме с начальными условиями (2.5), условие $f(0) \in V$, необходимое для того, чтобы второе начальное условие (2.5) имело смысл, опущено, т. к. оно является следствием явно указанных условий этой теоремы.

Теорема 4. *Скорость сходимости схемы* (2.1), (2.2) *с начальными условиями* (2.4) *характеризуется оценкой*

$$\max_{t \in \omega_\tau \cup \{0\},\, \delta \in [0,1]} [\|y_t - u'(t + \delta\tau)\|_H + \|y(t) - u(t + \delta\tau)\|_V] \le o(\rho_n^{1/2}) + O(\tau^{1/2}). \tag{3.1}$$

Теорема 5. *Пусть* $u \in W^{1,1}(0, T; D)$ *и выполнено условие* 1) *теоремы* 2. *Тогда скорость сходимости схемы* (2.1), (2.2) *с начальными условиями* (2.4) *характеризуется оценкой*

$$\max_{t \in \omega_\tau \cup \{0\},\, \delta \in [0,1]} [\|y_t - u'(t + \delta\tau)\|_H + \|y(t) - u(t + \delta\tau)\|_V] = O(\rho_n + \tau). \tag{3.2}$$

Теорема 6. *Пусть* $u \in W^{3,\infty}(0,T;H) \cap W^{2,\infty}(0,T;V) \cap W^{2,1}(0,T;D)$. *Пусть также выполнены условия* 3) *и* 4) *теоремы* 2 *и условие* 1) *теоремы* 3. *Тогда скорость сходимости симметричной* ($\sigma_1 = \sigma_2$, $\sigma_3 = \sigma_4$) *схемы* (2.1), (2.2) *с начальными условиями* (2.5) *характеризуется оценкой*

$$\max_{t\in\omega_\tau\cup\{0\}} \|y_t - u'(t+\tfrac{\tau}{2})\|_H + \max_{t\in\overline{\omega}_\tau} \|y(t) - u(t)\|_V = O(\rho_n + \tau^2). \tag{3.3}$$

Доказательство теоремы 4. Примем обозначения: $Q_n(t)$ — ортопроектор V на V_n в смысле скалярного произведения $a(t,\cdot,\cdot\cdot)$, $R_n(t) = E - Q_n(t)$, $z(t) = y(t) - u(t)$ ($t \in \overline{\omega}_\tau$), $Z(t,\theta) = \|z_t\|^2_H + ((\sigma_1+\sigma_2)/2 - 1/4)\|Q_n(\theta)(\widehat{z}(t) - z(t))\|^2_{(t)} + (1/4)\|Q_n(\theta)(\widehat{z}(t) + z(t))\|^2_{(t)}$ ($t \in \omega_\tau \cup \{0\}$, $\theta = t$ или $\theta = t+\tau$), $Z(t) = \|z_t\|^2_H + \|\widehat{z}(t)\|^2_V + \|z(t)\|^2_V$ ($t \in \omega_\tau \cup \{0\}$), $u^{(\sigma_i,\sigma_{i+1})}(t) = \sigma_i\widehat{u}(t) + (1-\sigma_i-\sigma_{i+1})u(t) + \sigma_{i+1}\check{u}(t)$ ($t \in \omega_\tau$, $i = 1$ или $i = 3$). Далее полагаем $\tau \le \tau_2$, где τ_2 — константа, указанная в лемме 2. Через c_i, $i = 1, 2, \ldots, 20$, ниже в этом доказательстве и в доказательствах теорем 5, 6 обозначим различные положительные константы, не зависящие от рассматриваемых значений n, τ и $t \in \omega_\tau$.

Заготовим для дальнейшего некоторые вспомогательные оценки. Пусть t — любой узел сетки ω_τ, v — любой элемент пространства V. На основе леммы Обэна–Нитше ([10], с. 139) с помощью (1.3) и (1.6) получаем

$$\|R_n(t)v\|_H \le a_1a_2\rho_n\|R_nv\|_V. \tag{3.4}$$

Отсюда, очевидно, следует

$$\|R_n(t)v\|_H \le a_1a_2\rho_n\|v\|_V. \tag{3.5}$$

При имеющейся гладкости функции u ($u \in W^{2,\infty}(0,T;H) \cap W^{1,\infty}(0,T;V)$, см. теорему 1)

$$\|u_{\overline{t}t}\|_H \le c_1, \tag{3.6}$$

$$\max_{\theta\in[t-\tau,t+\tau]} \|u(t) - u(\theta)\|_V \le c_2\tau, \tag{3.7}$$

$$\|u(t) - u^{(\sigma_i,\sigma_{i+1})}(t)\|_V \le c_3\tau, \quad i = 1 \text{ или } i = 3, \tag{3.8}$$

$$\|u(\tau)\|_H \le c_4\tau^2. \tag{3.9}$$

В силу (2.6), (3.6)

$$\|z_{\overline{t}t}\|_H \le c_5. \tag{3.10}$$

Согласно (3.7)

$$\|u_t\|_V \le c_2, \tag{3.11}$$

$$\|u(\tau)\|_V \le c_2\tau. \tag{3.12}$$

Из (3.7) также следует

$$\|u_{\overset{\circ}{t}}\|_V \le c_2. \tag{3.13}$$

Из (3.5), (3.11) и (3.5), (3.13) соответственно следуют оценки

$$\|R_n(t)u_t\|_H \le c_6\rho_n, \tag{3.14}$$

$$\|R_n(t)u_{\overset{\circ}{t}}\|_H \le c_6\rho_n. \tag{3.15}$$

Используя (3.15), получаем

$$\|Q_n(t)z_{\overset{\circ}{t}}\|_H \le \frac{1}{2}(\|z_t\|_H + \|z_{\overline{t}}\|_H) + c_6\rho_n, \tag{3.16}$$

$$\|Q_n(t)z_{\overset{\circ}{t}}\|_H \le \max_{\theta\in\omega_\tau\cup\{0\}} \|z_t(\theta)\|_H + c_6\rho_n. \tag{3.17}$$

С помощью (1.5), (1.6), (2.6) и (3.13) выводим оценку

$$\|Q_n(t)z_{\overset{\circ}{t}}\|_V \le c_7. \tag{3.18}$$

Перейдем непосредственно к выводу оценки (3.1). Заменим в уравнении (1.1) обозначение t на t_1 и почленно проинтегрируем это уравнение сначала по $t_1 \in [t_2, t_2+\tau]$, где t_2 — любое число из $[t-\tau, t]$, t — любой узел сетки ω_τ, а затем по $t_2 \in [t-\tau, t]$. Полученное соотношение почленно умножим на τ^{-2} и вычтем из (2.1). Вновь полученное равенство почленно умножим скалярно в H на $2\tau Q_n(t)z_{\overset{\circ}{t}}$ и, применяя приемы вывода основного энергетического тождества в ([6], сс. 356, 357), преобразуем к виду

$$Z(t,t) = Z(t-\tau, t) + \sum_{i=1}^{7} s_i + 2\tau^2(\sigma_2 - \sigma_1)\|Q_n(t)z_{\overset{\circ}{t}}\|^2_{(t)}, \tag{3.19}$$

где

$$\begin{aligned}
s_1 &= -2\tau(z_{\overline{t}t}, R_n(t)u_{\overset{\circ}{t}})_H,\\
s_2 &= 2\left[\tau^{-1}\int_{t-\tau}^{t}\int_{t_2}^{t_2+\tau} a(t_1, u(t_1), Q_n(t)z_{\overset{\circ}{t}})dt_1dt_2 - \tau a(t, u(t), Q_n(t)z_{\overset{\circ}{t}})\right],\\
s_3 &= 2\tau a(t,\, u(t) - u^{(\sigma_1,\sigma_2)}(t),\, Q_n(t)z_{\overset{\circ}{t}}),\\
s_4 &= 2\left(\tau^{-1}\int_{t-\tau}^{t}\int_{t_2}^{t_2+\tau} B(t_1)u(t_1)dt_1dt_2 - \tau B(t)u(t),\, Q_n(t)z_{\overset{\circ}{t}}\right)_H,\\
s_5 &= 2\tau(B(t)(u(t) - u^{(\sigma_3,\sigma_4)}(t)),\, Q_n(t)z_{\overset{\circ}{t}})_H,\\
s_6 &= -2\tau(B(t)z^{(\sigma_3,\sigma_4)}(t),\, Q_n(t)z_{\overset{\circ}{t}})_H,\\
s_7 &= 2\left(\tau f(t) - \tau^{-1}\int_{t-\tau}^{t}\int_{t_2}^{t_2+\tau} f(t_1)dt_1dt_2,\, Q_n(t)z_{\overset{\circ}{t}}\right)_H.
\end{aligned}$$

Применяя элементы техники вывода энергетического неравенства в ([6], сс. 362, 363) и лемму 2 из [11], учитывая при этом (1.5)–(1.7), получаем

$$Z(t-\tau, t) \le Z(t-\tau, t-\tau) + c_8\tau(\|z(t)\|_V^2 + \|\check{z}(t)\|_V^2). \tag{3.20}$$

С помощью (3.10) и (3.4) оценим

$$s_1 \le c_9\rho_n \int_{t-\tau}^{t+\tau} \|R_n u'(\theta)\|_V d\theta. \tag{3.21}$$

Представим s_2 в виде

$$s_2 = 2\tau^{-1}\int_{t-\tau}^{t}\int_{t_2}^{t_2+\tau}\int_{t}^{t_1} \frac{d}{d\theta} a(\theta, u(\theta), Q_n(t)z_{\overset{\circ}{t}})d\theta\, dt_1dt_2.$$

Учитывая (1.7), (1.6), тот факт, что $u \in W^{1,\infty}(0,T;V)$, и (3.18), получим оценку

$$s_2 \le c_{10}\tau^2. \tag{3.22}$$

В силу (1.6), (3.8) с $i=1$ и (3.18) имеем

$$s_3 \le c_{11}\tau^2. \tag{3.23}$$

С учетом принятого в § 1 условия "$t \to B(t)$" $\in W^{1,1}(0,T;\mathcal{L}(V;H))$, используя его следствие — неравенство (1.8), тот факт, что $u \in W^{2,\infty}(0,T;H)$, и неравенство (3.17), получаем

$$s_4 = 2\tau^{-1}\left(\int_{t-\tau}^{t}\int_{t_2}^{t_2+\tau}\int_{t}^{t_1}\frac{d}{d\theta}B(\theta)u(\theta)d\theta\,dt_1dt_2,\, Q_n(t)z_{\overset{\circ}{t}}\right)_H \le$$

$$\le c_{12}\tau\left[\int_{t-\tau}^{t+\tau}\|B'(\theta)\|_{\mathcal{L}(V;H)}d\theta+\tau\right](\max_{\theta\in\omega_\tau\cup\{0\}}\|z_t(\theta)\|_H+\rho_n). \quad (3.24)$$

Из (1.8), (3.8) с $i = 3$ и (3.17) следует

$$s_5 \le c_{13}\tau^2(\max_{\theta\in\omega_\tau\cup\{0\}}\|z_t(\theta)\|_H+\rho_n). \quad (3.25)$$

С помощью (1.8) и (3.16) выводим неравенство

$$s_6 \le c_{14}\tau(Z(t)+\check{Z}(t)+\rho_n\max_{\theta\in\overline{\omega}_\tau}\|z(\theta)\|_V). \quad (3.26)$$

Учитывая принятое в § 1 условие $f \in W^{1,1}(0,T;H)$ и применяя (3.17), получаем

$$s_7 = 2\tau^{-1}\left(\int_{t-\tau}^{t}\int_{t_2}^{t_2+\tau}\int_{t_1}^{t}f'(\theta)d\theta dt_1dt_2,\, Q_n(t)z_{\overset{\circ}{t}}\right)_H \le$$

$$\le \tau\int_{t-\tau}^{t+\tau}\|f'(\theta)\|_Hd\theta(\max_{\theta\in\omega_\tau\cup\{0\}}\|z_t(\theta)\|_H+c_6\rho_n). \quad (3.27)$$

Оценим сверху правую часть (3.19), используя (3.20)–(3.27) и условие $\sigma_1 \ge \sigma_2$, в силу которого последнее слагаемое в правой части (3.19) неположительно. Полученные неравенства, соответствующие $t = \tau, 2\tau, \ldots, \eta$, где η — любой узел сетки ω_τ, почленно сложим. Несколько увеличив правую часть вновь полученного неравенства, имеем

$$Z(\eta,\eta) \le Z(0,0) + C_1\Bigg[\rho_n r_n + \tau + (\rho_n+\tau)\max_{\theta\in\omega_\tau\cup\{0\}}(Z(\theta))^{1/2} +$$

$$+\tau\sum_{t=\tau}^{\eta}(Z(t)+\check{Z}(t))\Bigg], \quad \eta\in\omega_\tau, \quad (3.28)$$

где $r_n = \int\limits_0^T \|R_n u'(\theta)\|_V d\theta$; через C_i, $i = 1, 2, \ldots, 10$, в (3.28) и ниже (в том числе в доказательствах теорем 5, 6) обозначаются различные положительные константы, не зависящие от n, τ и η. Применяя теорему Лебега ([12], с. 302) с учетом того, что $u \in W^{1,\infty}(0,T;V)$ и последовательность подпространств $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ предельно плотна в V, получаем

$$r_n \to 0, \quad n\to\infty. \quad (3.29)$$

Используя (2.3), (3.14), (1.5), (1.6) и тот факт, что $u \in L^\infty(0,T;D)$ (см. теорему 1), выводим неравенство

$$Z(\eta) \le C_2(Z(\eta,\eta)+\rho_n^2), \eta\in\omega_\tau. \quad (3.30)$$

Данное неравенство аналогично известным в теории разностных схем оценкам снизу для составных норм ([6], с. 370). В силу (3.9) и (3.12) при рассматриваемых здесь начальных условиях (2.4)

$$Z(0,0) \le C_3\tau^2, \quad (3.31)$$

$$Z(0) \le C_4\tau^2. \quad (3.32)$$

Из (3.28), (3.30), (3.31) следует

$$Z(\eta) \le C_5\Big[\rho_n r_n + \rho_n^2 + \tau + (\rho_n + \tau) \max_{\theta\in\omega_\tau\cup\{0\}} (Z(\theta))^{1/2} + \tau \sum_{t=\tau}^{\eta} (Z(t) + \check{Z}(t))\Big], \quad \eta \in \omega_\tau. \quad (3.33)$$

Из (3.33), (3.32) с помощью леммы 4 из ([7], гл. III, § 1, с. 171) получаем, что при достаточно малых τ (при $\tau \le \tau^*$, где $\tau^* > 0$ — константа, не зависящая от n)

$$Z(\eta) \le C_6(\rho_n r_n + \rho_n^2 + \tau), \quad \eta \in \omega_\tau \cup \{0\}. \quad (3.34)$$

При имеющейся гладкости функции u

$$\max_{t\in\omega_\tau\cup\{0\},\, \delta\in[0,1]} \|u_t - u'(t+\delta\tau)\|_H = O(\tau). \quad (3.35)$$

Из (3.34) с учетом (3.35), (3.7) и (3.29) получаем (3.1). □

Доказательство теоремы 5. Действуем по образцу доказательства теоремы 4, с той разницей, что вместо (3.21)–(3.23) получаем и используем оценки

$$\begin{aligned}
&s_1 \le c_9\rho_n^2 \int_{t-\tau}^{t+\tau} \|u'(\theta)\|_D d\theta, && (3.36)\\
&s_2 \le c_{15}\tau \int_{t-\tau}^{t+\tau} (\|A'(\theta)\|_{\mathcal{L}(D;H)} + \|u'(\theta)\|_D) d\theta (\max_{\theta\in\omega_\tau\cup\{0\}} \|z_t(\theta)\|_H + \rho_n), &&\\
&s_3 \le c_{16}\tau \int_{t-\tau}^{t+\tau} \|u'(\theta)\|_D d\theta (\max_{\theta\in\omega_\tau\cup\{0\}} \|z_t(\theta)\|_H + \rho_n) &&
\end{aligned}$$

(в частности, (3.36) непосредственно следует из (3.21) по определению ρ_n при имеющемся условии $u \in W^{1,1}(0,T;D)$). В результате вместо (3.34) выводим оценку $Z(\eta) \le C_7(\rho_n^2 + \tau^2)$, $\eta \in \omega_\tau \cup \{0\}$, из которой с учетом (3.35) и (3.7) получаем (3.2). □

Доказательство теоремы 6. Вновь действуем в основном по образцу доказательства теоремы 4. Для s_2, s_3, s_4, s_5 и s_7 при условиях доказываемой теоремы удается установить оценки

$$\begin{aligned}
&s_2 \le c_{17}\tau^2 \Big[\int_{t-\tau}^{t+\tau} (\|A''(\theta)\|_{\mathcal{L}(D;H)} + \|u''(\theta)\|_D) d\theta + \tau\Big] (\max_{\theta\in\omega_\tau\cup\{0\}} \|z_t(\theta)\|_H + \rho_n), && (3.37)\\
&s_3 \le c_{18}\tau^2 \int_{t-\tau}^{t+\tau} \|u''(\theta)\|_D d\theta (\max_{\theta\in\omega_\tau\cup\{0\}} \|z_t(\theta)\|_H + \rho_n), && (3.38)\\
&s_4 \le c_{19}\tau^2 \Big[\int_{t-\tau}^{t+\tau} \|B''(\theta)\|_{\mathcal{L}(V;H)} d\theta + \tau\Big] (\max_{\theta\in\omega_\tau\cup\{0\}} \|z_t(\theta)\|_H + \rho_n), && (3.39)\\
&s_5 \le c_{20}\tau^3 (\max_{\theta\in\omega_\tau\cup\{0\}} \|z_t(\theta)\|_H + \rho_n), && (3.40)\\
&s_7 \le \frac{\tau^2}{3} \int_{t-\tau}^{t+\tau} \|f''(\theta)\|_H d\theta (\max_{\theta\in\omega_\tau\cup\{0\}} \|z_t(\theta)\|_H + c_6\rho_n). && (3.41)
\end{aligned}$$

Для $Z(0,0)$, $Z(0)$ при рассматриваемых здесь начальных условиях (2.5) получаем оценки

$$Z(0,0) \le C_8(\rho_n^2 + \tau^4), \quad Z(0) \le C_9(\rho_n^2 + \tau^4), \quad (3.42)$$

при этом используем формулу Маклорена для $u(\tau)$, условие $u \in W^{3,\infty}(0,T;H) \cap W^{2,\infty}(0,T;V)$ и неравенство $\|R_n v\|_H \le \rho_n \|v\|_V$, $v \in V$ (следствие леммы Обэна–Нитше), где полагаем $v = f(0)$. Применяя (3.37)–(3.42) вместо (3.22)–(3.25), (3.27), (3.31), (3.32), а также (3.36) вместо (3.21), выводим вместо (3.34) оценку

$$Z(\eta) \le C_{10}(\rho_n^2 + \tau^4), \quad \eta \in \omega_\tau \cup \{0\}. \quad (3.43)$$

В силу условия $u \in W^{3,\infty}(0,T;H)$

$$\max_{t\in\omega_\tau\cup\{0\}} \|u_t - u'(t+\tfrac{\tau}{2})\|_H = O(\tau^2). \qquad (3.44)$$

Из (3.43) и (3.44) следует (3.3). $\square$

Замечание 1. Следствием (3.2), (3.3) является оценка

$$\max_{t\in\overline{\omega}_\tau} \|y(t) - u(t)\|_V = O(\rho_n + \tau^p), \qquad (3.45)$$

где $p = 1$ при условиях теоремы 5, $p = 2$ при условиях теоремы 6. Уже в случае простейшего уравнения (1.1) с оператором A, не зависящим от t, и с $B(t) \equiv 0$ верно следующее: при любом выборе σ_1, σ_2 оценка (3.45) с $p = 1$ неулучшаема по порядку в классе точных решений, обладающих гладкостью, требуемой в теореме 5, как оценка погрешности схемы (2.1), (2.2) с начальными условиями (2.4); при любом выборе $\sigma \in \mathbf{R}$ оценка (3.45) с $p = 2$ неулучшаема по порядку в классе точных решений, обладающих гладкостью, требуемой в теореме 6, как оценка погрешности симметричной схемы (2.1), (2.2) с $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ и с начальными условиями (2.5) (о выборе σ_3, σ_4 здесь ничего не говорится, т. к. в указанном случае уравнение (2.1) не содержит члена $P_nB(t)y^{(\sigma_3,\sigma_4)}(t)$). Тем самым и оценки (3.2), (3.3) неулучшаемы по порядку в соответствующих классах вычислительных схем и достаточно гладких точных решений.

Замечание 2. Как видно из проведенных доказательств, если $f(0) \in V$, то теоремы 4 и 5 остаются в силе при замене начальных условий (2.4) на (2.5).

Приведем типичную асимптотическую оценку сверху величины ρ_n для случая, когда (1.1), (1.2) — первая начально-краевая задача для гиперболического уравнения второго порядка в цилиндрической области $\Omega \times [0,T]$, где $\Omega \subset \mathbf{R}^m$, $m \in \mathbf{N}$, — ограниченная область с гладкой границей, и дискретизация задачи по пространству проводится методом конечных элементов. Будем использовать обозначения пространств Соболева, принятые в ([10], с. 22). В данном случае $H = L^2(\Omega)$, $A(t)$ ($t \in [0,T]$) — эллиптические операторы второго порядка с гладкими коэффициентами, заданные на $D = H^2(\Omega)\cap H^1_0(\Omega)$, так что $V = H^1_0(\Omega)$, нормы $\|\cdot\|_D$ и $\|\cdot\|_{H^2(\Omega)}$ эквивалентны на D в силу второго основного неравенства для эллиптических операторов ([9], с. 118), нормы $\|\cdot\|_V$ и $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ эквивалентны на V в силу эллиптичности оператора $A(0)$. Для метода конечных элементов характерно следующее аппроксимационное свойство подпространств V_n (напр., [10], с. 135):

$$\min_{v_n\in V_n} \|v - v_n\|_{H^1(\Omega)} \le Ch_n\|v\|_{H^2(\Omega)},$$

где v — любая функция из $H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$, C — константа, не зависящая от v и n, h_n — максимальный из диаметров конечных элементов, порождающих подпространство V_n. Отсюда в силу сказанного об эквивалентности норм следует $\rho_n = O(h_n)$, $n \in \mathbf{N}$. Совмещая эту оценку с основными результатами данной работы, получаем оценки скорости сходимости схем проекционно-разностного метода решения первой начально-краевой задачи для гиперболического уравнения второго порядка с дискретизацией по пространству методом конечных элементов в терминах величин h_n и τ.

Литература

1. Злотник А.А. *Оценки скорости сходимости проекционно-сеточных методов для гиперболических уравнений второго порядка* // Вычисл. процессы и системы. – М., 1991. – № 8. – С. 116–167.
2. Железовский С.Е., Букесова Н.Н. *Оценки погрешности проекционного метода для абстрактного квазилинейного гиперболического уравнения* // Изв. вузов. Математика. – 1999. – № 5. – С. 94–96.

3. Смагин В.В. *Коэрцитивные оценки погрешностей проекционного и проекционно-разностного методов для параболических уравнений* // Матем. сб. – 1994. – Т. 185. – № 11. – С. 79–94.
4. Смагин В.В. *Оценки в сильных нормах погрешности проекционно-разностного метода приближенного решения абстрактного параболического уравнения* // Матем. заметки. – 1997. – Т. 62. – Вып. 6. – С. 898–909.
5. Лионс Ж.-Л. *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач.* – М.: Мир, 1972. – 588 с.
6. Самарский А.А. *Теория разностных схем.* – 3-е изд. – М.: Наука, 1989. – 616 с.
7. Самарский А.А., Гулин А.В. *Устойчивость разностных схем.* – М.: Наука, 1973. – 416 с.
8. Крейн С.Г. *Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве.* – М.: Наука, 1967. – 464 с.
9. Ладыженская О.А. *Краевые задачи математической физики.* – М.: Наука, 1973. – 408 с.
10. Сьярле Ф. *Метод конечных элементов для эллиптических задач.* – М.: Мир, 1980. – 512 с.
11. Смагин В.В. *Оценки погрешности полудискретных приближений по Галёркину для параболических уравнений с краевым условием типа Неймана* // Изв. вузов. Математика. – 1996. – № 3. – С. 50–57.
12. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. *Элементы теории функций и функционального анализа.* – 5-е изд. – М.: Наука, 1981. – 544 с.

Саратовский государственный социально-экономический университет

Поступила 20.09.2000