ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2005 МАТЕМАТИКА № 12 (523)

УДК 517.977

В.А. СРОЧКО, С.Н. УШАКОВА

МЕТОД БИЛИНЕАРИЗАЦИИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ ПРОГРАММНЫХ УПРАВЛЕНИЙ

1. Введение. Постановка задачи

Проблема построения, анализа и реализации вычислительных методов оптимального управления исследовалась в работах многих авторов (напр., [1]–[10]). Вариационная специфика задач оптимального управления породила большое разнообразие идей, подходов и методов численного решения. Выделим обширный класс методов, которые конструируются по следующей стандартной схеме:

1) построение вспомогательной задачи поиска направления спуска (вспомогательного управления);

2) процедура варьирования исходного управления на основе вспомогательного с использованием некоторых параметров;

3) поиск параметров варьирования с целью уменьшения функционала качества.

В рамках задач оптимального управления реализация этой схемы на этапах 1, 2 допускает немало вариантов (слабая, игольчатая, фазовая аппроксимации функционалов вместе с соответствующим варьированием). Как правило, вспомогательная задача для большинства методов не содержит параметров варьирования, т. е. этапы 1, 2 независимы.

Тем не менее, представляют интерес методы, в которых этапы 1, 2 объединяются, т. е. во вспомогательную задачу включается процедура варьирования вместе с параметрами. Это связано с тем обстоятельством, что вспомогательная задача решается в некоторой допустимой окрестности номинального управления, которая конструируется в параметрической форме. Целесообразность локального решения вполне понятна — любые аппроксимации, вообще говоря, хорошо моделируют исходный функционал лишь в некоторой окрестности изучаемого процесса. При этом третий этап указанной схемы предполагает поиск приемлемой окрестности за счет варьирования параметров.

Следует отметить, что в задачах математического программирования подобные процедуры решения называют методами доверительной области [11]. В задачах оптимального управления известный метод последовательной линеаризации из [2] построен в рамках именно такой структуры.

В данной работе изучается обыкновенная задача оптимального управления без фазовых и терминальных ограничений. Динамическая система линейно зависит от управления, которое ограничено с помощью выпуклого компактного множества. В качестве аппроксимации функционала используется фазовая вариация с модифицированной сопряженной системой. Формирование семейства допустимых окрестностей производится на основе выпуклой комбинации управлений. В результате вспомогательная задача относительно пары “управление, состояние” носит

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 05-01-00187) и программы “Университеты России” (проект № ур.03.01.064).

билинейный характер и содержит параметр выпуклой комбинации, характеризующий окрестность базового управления. Решение вспомогательной задачи предлагается проводить с помощью метода приращений [9], который является наиболее эффективным для билинейных задач. Доказывается свойство локального улучшения для управлений, не удовлетворяющих принципу максимума. В целом, предлагаемый метод билинеаризации с параметром открывает дополнительные возможности для численного решения задач оптимального управления.

Определим основную задачу оптимального управления (*задача* A) следующими соотношениями:

$$\Phi(u) = \varphi(x(t_1)) \to \min,$$
$$\dot{x} = f(x,u,t), \quad x(t_0) = x^0, \quad u(t) \in U, \quad t \in T = [t_0, t_1].$$

Здесь t — время (независимая переменная), $u(t) \in R^r$ — вектор-функция управляющих переменных (управление), $x(t) \in R^n$ — вектор-функция фазовых переменных (состояние).

Внесем необходимые предположения:

1) целевая функция $\varphi(x)$ непрерывно дифференцируема на R^n;

2) вектор-функция $f(x,u,t)$ правых частей фазовой системы непрерывно дифференцируема по $x \in R^n$, линейно зависит от $u \in R^r$ и кусочно-непрерывна по $t \in T$;

3) множество $U \subset R^r$ выпукло и компактно, начальное состояние x^0 и промежуток управления T заданы.

Класс допустимых управлений V в задаче A введем как множество кусочно-непрерывных вектор-функций $u(t)$, удовлетворяющих поточечному ограничению $u(t) \in U$, $t \in T$. Предположим, что каждое допустимое управление $u(t)$, $t \in T$, в силу фазовой системы порождает единственную кусочно-дифференцируемую траекторию $x(t) = x(t,u)$, которая определена на T.

Отметим типовые конструкции для задачи A:

$H(\psi,x,u,t) = \langle \psi, f(x,u,t)\rangle$ — функция Понтрягина,

$\dot{\psi} = -H_x(\psi,x,u,t)$, $\psi(t_1) = -\varphi_x(x(t_1))$ — сопряженная система.

Пусть $u(t)$, $t \in T$, — допустимое управление с фазовой траекторией $x(t)$ и решением $\psi(t)$ сопряженной системы. Как известно, принцип максимума в задаче A представляется соотношением

$$u(t) = \arg\max_{v\in U} \langle H_u(\psi(t),x(t),t), v\rangle, \quad t \in T,$$

и получается на основе игольчатой аппроксимации функционала Φ на паре $u, w \in V$

$$\Phi(w) - \Phi(u) = \delta_0\Phi(u,w) + o(\rho), \tag{1}$$
$$\delta_0\Phi(u,w) = -\int_T \langle H_u(\psi(t),x(t),t), w(t) - u(t)\rangle dt,$$
$$\rho = \mathrm{mes}\{t \in T : w(t) \neq u(t)\}.$$

Более высокий уровень аппроксимации целевого функционала определяется с помощью фазовой вариации следующим представлением ([9], с. 80):

$$\Phi(w) - \Phi(u) = \delta\Phi(u,w) + \eta(\|\Delta x\|), \tag{2}$$
$$\delta\Phi(u,w) = -\int_T \langle H_u(\psi(t,u,w),x(t),t), w(t) - u(t)\rangle dt,$$
$$\eta(\|\Delta x\|) = o_\varphi(\|\Delta x(t_1)\|) - \int_T o_H(\|\Delta x(t)\|)dt,$$

где $\Delta x(t) = x(t,w) - x(t)$ — приращение фазовой траектории, o_φ, o_H — остаточные члены соответствующих приращений.

Сопряженная вектор-функция $\psi(t,u,w)$ в данном случае удовлетворяет модифицированной системе

$$\dot{\psi} = -H_x(\psi,x(t),w(t),t), \quad \psi(t_1) = -\varphi_x(x(t_1)),$$

в которой фазовая траектория $x(t)$ и управление $w(t)$ не согласованы. Такая структура сопряженной системы повышает качество аппроксимации функционала в сравнении со стандартным случаем (1). К примеру, в задачах A, линейных по состоянию x, аппроксимация (2) является точной ($\eta(\|\Delta x\|) = 0$), что не имеет места для представления (1).

2. Метод решения

Проведем построение и обоснование итерационного метода на основе бивариации $\delta\Phi(u, w)$. Прежде всего, представим ее в терминальной форме, используя фазовую вариацию $y(t)$, $t \in T$, вместе с соответствующей системой. В результате

$$\delta\Phi(u, w) = \langle \varphi_x(x(t_1)), y(t_1) \rangle,$$
$$\dot{y} = (f_x(x(t), w(t), t)y + f_u(x(t), t))(w(t) - u(t)), \quad y(t_0) = 0.$$

Данное представление проверяется непосредственно на основе дифференцирования скалярного произведения $\langle \psi(t, u, w), y(t) \rangle$, $t \in T$.

Понятно, что аппроксимация $\Delta_w \Phi(u) \approx \delta\Phi(u, w)$ действует вполне удовлетворительно только на управлениях w из некоторой окрестности базового управления u. В этой связи рассмотрим бивариацию $\delta\Phi(u, w)$ на семействе управлений $w_\alpha(t, v) = u(t) + \alpha(v(t) - u(t))$ с фиксированным параметром $\alpha \in (0, 1]$ и допустимыми управлениями $v(t)$. Для данного α вектор-функции $w_\alpha(t, v)$ с $v \in V$ образуют некоторую допустимую окрестность исходного управления $u(t)$.

Фиксируя $\alpha \in (0, 1]$, сформулируем вспомогательную задачу на множестве управлений $v \in V$ (*задача* B_α)

$$F_\alpha(v) = \langle \varphi_x(x(t_1)), y(t_1) \rangle \to \min, \quad v \in V,$$
$$\dot{y} = (f_x(x(t), w_\alpha(t, v), t)y + f_u(x(t), t))(w_\alpha(t, v) - u(t)), \quad y(t_0) = 0.$$

С учетом того, что матричная функция $f_x(x, u, t)$ линейно зависит от u, полученная система является билинейной относительно совокупности $\{y$ — фазовое состояние, v — управление$\}$.

Численное решение билинейной задачи B_α можно эффективно реализовать, например, с помощью метода приращений ([9], с. 22). Проведем описание метода в данной ситуации.

Введем функцию Понтрягина h и сопряженную p-систему для задачи B_α

$$h(p, y, v, t) = \langle p, \dot{y} \rangle = \langle H_x(p, x(t), w_\alpha(t, v), t), y \rangle +$$
$$+\langle H_u(p, x(t), t), w_\alpha(t, v) - u(t) \rangle = \langle H_x(p, x(t), u(t), t), y \rangle +$$
$$+\alpha\langle H_{xu}(p, x(t), t)(v(t) - u(t)), y \rangle + \alpha\langle H_u(p, x(t), t), v(t) - u(t) \rangle,$$
$$\dot{p} = -h_y(p, y, v, t) = -H_x(p, x(t), w_\alpha(t, v), t), \quad p(t_1) = -\varphi_x(x(t_1)).$$

Отметим, что решение $p_\alpha(t, v)$ этой системы совпадает с сопряженной вектор-функцией $\psi(t, u, w_\alpha(t, v))$.

Определим h-максимизирующее управление в задаче B_α

$$v^*(p, y, t) = \arg\max_{v \in U} \langle H_u(p, x(t), t) + H_{ux}(p, x(t), t)y, v \rangle.$$

Итерационная схема метода имеет следующий вид.

Пусть на k-й итерации получена допустимая пара $(v^k(t), y^k(t))$.

Сформируем управление $w_\alpha^k(t, p) = u(t) + \alpha(v^*(p, y^k(t), t) - u(t))$ и найдем решение $p^k(t)$ сопряженной системы

$$\dot{p} = -H_x(p, x(t), w_\alpha^k(t, p), t), \quad p(t_1) = -\varphi_x(x(t_1))$$

в совокупности с управлением $\overline{v}^k(t) = v^*(p^k(t), y^k(t), t)$, $t \in T$.

Сформируем управление

$$w_\alpha^k(t, y) = u(t) + \alpha(v^*(p^k(t), y, t) - u(t))$$

и найдем решение $y^{k+1}(t)$ системы в вариациях

$$\dot{y} = f_x(x(t), w_\alpha^k(t,y), t)y + \alpha f_u(x(t),t)(v^*(p^k(t), y, t) - u(t)), \quad y(t_0) = 0$$

вместе с управлением $v^{k+1}(t) = v^*(p^k(t), y^{k+1}(t), t)$, $t \in T$.

В итоге получаем допустимую пару $(v^{k+1}(t), y^{k+1}(t))$, что и завершает итерацию.

Свойство монотонности и сходимость метода характеризуются соотношениями

$$F_\alpha(v^k) \geq F_\alpha(\overline{v}^k) \geq F_\alpha(v^{k+1}), \quad F_\alpha(v^k) - F_\alpha(v^{k+1}) \to 0, \quad k \to \infty,$$

причем каждое улучшение по функционалу $F_\alpha(v)$ дается ценой решения лишь одной задачи Коши.

Определим условие остановки метода $F_\alpha(\overline{v}^k) - F_\alpha(v^{k+1}) = 0$ и дополнительно предположим выполнение условия регулярности $\overline{v}^k = v^{k+1}$.

Зафиксируем результирующее управление в рамках решения задачи B_α: $v_\alpha(t) = v^{k+1}(t)$, $t \in T$ (снимем зависимость от итерационного индекса k и подчеркнем зависимость полученного управления от параметра α).

Отметим, что в силу условия регулярности управление $v_\alpha(t)$ удовлетворяет принципу максимума в задаче B_α.

Построим очередное управление в рамках решения задачи A

$$u_\alpha(t) = u(t) + \alpha(v_\alpha(t) - u(t)), \quad t \in T, \tag{3}$$

и определим выбор параметра $\alpha \in (0,1]$ условием улучшения $\Phi(u_\alpha) \leq \Phi(u)$. Простейшей тактикой такого выбора может быть способ половинного деления:

$$\text{если } \Phi(u_\alpha) > \Phi(u), \text{ то } \alpha := \frac{1}{2}\alpha.$$

Более глубокая схема пересчета α реализуется, например, следующим образом [12].

Пусть $F_\alpha(v_\alpha) < 0$, т. е. $v_\alpha \neq u$. Введем отношение

$$\rho_\alpha = \frac{\Phi(u_\alpha) - \Phi(u)}{F_\alpha(v_\alpha)}$$

и назначим параметры

$$0 < \eta_1 < \eta_2 < 1, \quad 0 < \gamma_1 < 1 < \gamma_2.$$

Например, можно взять

$$\eta_1 = 0{,}25, \quad \eta_2 = 0{,}75; \quad \gamma_1 = 0{,}25, \quad \gamma_2 = 2.$$

Тактика пересчета α имеет вид

1) если $\rho_\alpha < \eta_1$, то $\alpha := \gamma_1\alpha$;
2) если $\eta_1 \leq \rho_\alpha < \eta_2$, то $\alpha := \alpha$;
3) если $\rho_\alpha \geq \eta_2$, то $\alpha := \min\{1, \gamma_2\alpha\}$.

3. Обоснование свойства монотонности

Проведем обоснование метода в части гарантированного локального улучшения.

Теорема. *Если управление $u \in V$ не удовлетворяет принципу максимума в задаче A, то для достаточно малых $\alpha \in (0,1]$ имеет место строгое улучшение $\Phi(u_\alpha) < \Phi(u)$.*

Доказательство. Введем невязку принципа максимума для управления $u \in V$ в задаче A

$$\delta(u) = \int_T \langle H_u(\psi(t), x(t), t), \overline{u}(t) - u(t)\rangle dt,$$
$$\overline{u}(t) = \arg\max_{v\in U} \langle H_u(\psi(t), x(t), t), v\rangle, \quad t \in T.$$

Управление $v_\alpha(t)$ удовлетворяет принципу максимума в задаче B_α. Это значит, что

$$v_\alpha(t) = \arg\max_{v\in U} \langle H_u(p_\alpha(t), x(t), t) + H_{ux}(p_\alpha(t), x(t), t) y_\alpha(t), v\rangle, \tag{4}$$

где траектории $y_\alpha(t)$, $p_\alpha(t)$ определяются уравнениями

$$\dot{y} = f_x(x(t), u_\alpha(t), t) y + \alpha f_u(x(t), t)(v_\alpha(t) - u(t)), \quad y(t_0) = 0, \tag{5}$$
$$\dot{p} = -H_x(p, x(t), u_\alpha(t), t), \quad p(t_1) = -\varphi_x(x(t_1)). \tag{6}$$

В соответствии с формулой приращения (2) имеет место представление

$$\Phi(u_\alpha) - \Phi(u) = -\alpha \int_T \langle H_u(p_\alpha(t), x(t), t), v_\alpha(t) - u(t)\rangle dt + \eta(\|\Delta_\alpha x(t)\|), \tag{7}$$
$$\Delta_\alpha x(t) = x(t, u_\alpha) - x(t), \quad t \in T.$$

В рамках варьирования (3) справедлива оценка [7]

$$\|\Delta x_\alpha(t)\| \le C \int_T \|f_u(x(t), t)\| \|u_\alpha(t) - u(t)\| dt \le C_1 \alpha.$$

Следовательно, остаток η имеет порядок $o(\alpha)$. Обозначим в (7)

$$\delta_\alpha(u) = \int_T \langle H_u(p_\alpha(t), x(t), t), v_\alpha(t) - u(t)\rangle dt$$

и установим связь $\delta_\alpha(u)$ с невязкой $\delta(u)$. В силу условия максимума (4) имеем

$$\int_T \langle H_u(p_\alpha(t), x(t), t), v_\alpha(t)\rangle dt \ge \int_T \langle H_u(p_\alpha(t), x(t), t), \overline{u}(t)\rangle dt -$$
$$- \int_T \langle H_{ux}(p_\alpha(t), x(t), t) y_\alpha(t), v_\alpha(t) - \overline{u}(t)\rangle dt.$$

На основании уравнений (5), (6) с помощью стандартных приемов (переход к интегральной форме, оценка по норме, свойство ограниченности управлений, лемма Гронуолла–Беллмана) заключаем

$$y_\alpha(t) = O_1(\alpha) \sim \|y_\alpha(t)\| \le C_1 \alpha, \quad t \in T,$$
$$p_\alpha(t) = \psi(t) + O_2(\alpha) \sim \|p_\alpha(t) - \psi(t)\| \le C_2 \alpha, \quad t \in T.$$

Тогда предыдущее неравенство представляется в виде

$$\int_T \langle H_u(p_\alpha(t), x(t), t), v_\alpha(t)\rangle dt \ge \int_T \langle H_u(\psi(t), x(t), t), \overline{u}(t)\rangle dt + O_3(\alpha).$$

Остается заметить, что

$$\int_T \langle H_u(p_\alpha(t), x(t), t), u(t)\rangle dt = \int_T \langle H_u(\psi(t), x(t), t), u(t)\rangle dt + O_4(\alpha).$$

В результате получаем требуемую оценку

$$\delta_\alpha(u) \ge \delta(u) + O(\alpha),$$

на основании которой формула приращения (7) принимает вид

$$\Phi(u_\alpha) - \Phi(u) \le -\alpha \delta(u) + o(\alpha).$$

По условию теоремы $\delta(u) > 0$, поэтому локальное улучшение функционала обеспечено. $\square$

Замечание 1. Для сравнения приведем вспомогательную задачу метода условного градиента, которая не зависит от параметра α и в терминальной формулировке имеет вид

$$F(v) = \langle \varphi_x(x(t_1)), y(t_1) \rangle \to \min, \quad v \in V,$$
$$\dot{y} = f_x(x(t), u(t), t)y + f_u(x(t), t)(v - u(t)), \quad y(t_0) = 0.$$

В отличие от B_α получили простейшую задачу с оптимальным управлением $\overline{u}(t)$, которое порождает стандартный метод условного градиента

$$u_\alpha(t) = u(t) + \alpha(\overline{u}(t) - u(t)), \quad \alpha \in [0,1], \quad t \in T.$$

Замечание 2. Пусть исходная задача A является билинейной относительно пары (u, x) с линейным терминальным функционалом, т. е.

$$\Phi(u) = \langle d, x(t_1) \rangle \to \min, \quad u \in V,$$
$$\dot{x} = (A_0(t) + \sum_{j=1}^{r} A_j(t) u_j)x + B(t)u + c(t), \quad x(t_0) = x^0.$$

Для пары процессов $(u(t), x(t))$, $(v(t), x(t,v))$, $t \in T$, сформулируем задачу с фазовым приращением $y(t) = x(t,v) - x(t)$ и управлением $v(t)$

$$\langle d, y(t_1) \rangle \to \min, \quad v \in V,$$
$$\dot{y} = f_x(x(t), v(t), t)y + f_u(x(t), t)(v(t) - u(t)), \quad y(t_0) = 0.$$

Данные задачи эквивалентны: оптимальные управления в них совпадают. Остается добавить, что y-задача представляет собой задачу B_α при $\alpha = 1$. Таким образом, в билинейном случае задачи A и B_1 эквивалентны.

Замечание 3. В практической реализации метода, по-видимому, нет необходимости проводить решение задачи B_α для каждого текущего значения параметра $\alpha \in (0,1]$. Здесь можно придерживаться следующей схемы.

Пусть, например, получен базовый процесс $(u(t), x(t))$ и имеется некоторое значение α_0. Решая задачу B_{α_0}, найдем управление v_{α_0} и построим управление

$$u_{\alpha_0}(t) = u(t) + \alpha_0(v_{\alpha_0}(t) - u(t)), \quad t \in T.$$

Если улучшение по функционалу отсутствует ($\Phi(u_{\alpha_0}) > \Phi(u)$), то процедуру изменения α организуем на основе семейства

$$u_\alpha(t) = u(t) + \alpha(v_{\alpha_0}(t) - u(t)), \quad t \in T, \quad \alpha \in (0, \alpha_0).$$

Как только улучшение достигнуто ($\Phi(u_{\alpha_1}) < \Phi(u)$), формируется новый процесс с управлением $u_{\alpha_1}(t)$, на базе которого решается задача B_{α_1}, и т. д.

Таким образом, вспомогательная задача B_α решается только после завершения итерации улучшения относительно функционала $\Phi(u)$ и формирования очередного процесса $(u(t), x(t))$, $t \in T$.

Литература

1. Черноусько Ф.Л., Баничук Н.В. *Вариационные задачи механики и управления. Численные методы.* – М.: Наука, 1973. – 283 с.
2. Федоренко Р.П. *Приближенное решение задач оптимального управления.* – М.: Наука, 1978. – 487 с.
3. Васильев Ф.П. *Методы решения экстремальных задач. Задачи минимизации в функциональных пространствах, регуляризация, аппроксимация.* – М.: Наука, 1981. – 400 с.
4. Евтушенко Ю.Г. *Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации.* – М.: Наука, 1982. – 432 с.
5. Габасов Р., Кириллова Ф.М. *Конструктивные методы оптимизации.* Ч. 2. *Задачи управления.* – Минск: Изд-во “Университетское”, 1984. – 207 с.
6. Милютин А.А., Илютович А.Е., Осмоловский Н.П., Чуканов С.В. *Оптимальное управление в линейных системах.* – М.: Наука, 1993. – 268 с.
7. Васильев О.В. *Лекции по методам оптимизации.* – Иркутск: Изд-во Иркутск. ун-та, 1994. – 344 с.
8. Батурин В.А., Урбанович Д.Е. *Приближенные методы оптимального управления, основанные на принципе расширения.* – Новосибирск: Наука, 1997. – 175 с.
9. Срочко В.А. *Итерационные методы решения задач оптимального управления.* – М.: Физматлит, 2000. – 160 с.
10. Аргучинцев А.В. *Оптимальное управление начально-краевыми условиями гиперболических систем.* – Иркутск: Изд-во Иркутск. ун-та, 2003. – 156 с.
11. Дэннис Дж., Шнабель Р. *Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений.* – М.: Мир, 1988. – 440 с.
12. Fukushima M., Yamamoto Y. *A Second-order algorithm for continuous-time nonlinear optimal control problems* // IEEE. Trans. Automat. Contr. – 1986. – V. 31. – № 7. – P. 673–676.

Иркутский государственный университет

Поступила 05.09.2005