ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2002 МАТЕМАТИКА № 10 (485)

УДК 517.544

Г.Р. ГАЛИУЛЛИНА, С.Р. НАСЫРОВ

УРАВНЕНИЕ ГАХОВА ДЛЯ ВНЕШНЕЙ СМЕШАННОЙ ОБРАТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ПО ПАРАМЕТРУ x

Введение

Внутренняя задача, соответствующая рассматриваемой в данной статье, была впервые поставлена В.Н. Монаховым (см. [1]). В [2] была доказана разрешимость внутренней задачи на римановых поверхностях, исследован характер неединственности решения в зависимости от геометрии известной части границы (по поводу истории вопроса см. подробнее [1], [2]).

В данной работе рассматривается случай, когда неизвестная область D_z в плоскости z содержит бесконечно удаленную точку. В случае, когда известная часть границы искомой области полигональна, получено интегральное представление решения $z(\zeta)$, $\zeta \in D_\zeta$, где D_ζ — верхняя полуплоскость в ζ-плоскости. Как и во внутренней задаче, при доказательстве разрешимости возникает проблема определения акцессорных параметров, но здесь эта трудная и интересная задача не исследуется. Основное внимание уделяется однозначности функции $z(\zeta)$, которая определяется полученным интегральным представлением. Необходимым и достаточным условием этой однозначности является равенство нулю вычета производной функции $dz(\zeta)/d\zeta$ в точке ζ_0, которая соответствует бесконечно удаленной точке в плоскости z.

Это равенство можно рассматривать как уравнение относительно переменной ζ_0. Во внешней обратной краевой задаче по параметру s соответствующее уравнение впервые получил Ф.Д. Гахов [4], который доказал его разрешимость. В дальнейшем уравнение Гахова и его обобщения рассматривались многими авторами (см., напр., [3]–[5]), которые изучали вопросы единственности решения этого уравнения, структуру множества его корней и пр. В частности, в [6] показано, что уравнение Гахова во внешней обратной краевой задаче по параметру s имеет конечное число решений.

Основным результатом статьи является доказательство разрешимости аналога уравнения Гахова для внешней смешанной обратной краевой задачи по параметру x в случае полигональной известной части границы. Кроме того, с использованием результатов из теории полианалитических функций исследована локальная структура множества решений этого уравнения.

1. Постановка задачи

Пусть D_z — односвязная жорданова область на сфере Римана, содержащая внутри себя ∞, с границей L_z, которая состоит из известной дуги L_z^1 и искомой дуги L_z^2. В дальнейшем будем считать, что L_z^1 — полигон с вершинами $z_k = x_k + iy_k$, $k = 1, \dots, n$. Предполагается, что L_z^2 такова, что любая прямая, параллельная мнимой оси, пересекает ее не более, чем в одной точке, и $x_1 = a < b = x_n$ (рис. 1).

Требуется найти L_z^2 и аналитическую в области D_z функцию $w(z)$, конформно отображающую D_z на жорданову область D_w и удовлетворяющую следующим краевым условиям.

Работа второго автора поддержана грантом Российского фонда фундаментальных исследований № 02-01-00914.

В плоскости $w = \varphi + i\psi$ дуге L_z^2 соответствует дуга L_w^2 с уравнением $\varphi = f_1(x)$, $\psi = f_2(x)$, где $w(x) = f_1(x) + if_2(x)$, $x \in [a, b]$, — граничные значения искомой аналитической функции $w(z)$ на L_z^2 и $x = \operatorname{Re} z$. Будем предполагать, что функция $w(x)$ непрерывно дифференцируема и $w'(x) \neq 0$, $a \leq x \leq b$. Уравнение дуги L_w^1, дополняющей L_w^2 до замкнутого контура L_w, $\Phi(\varphi, \psi) = 0$ считается заданным. Предполагается, что функция $\Phi(\varphi, \psi)$ дважды непрерывно дифференцируема и гладкие дуги L_w^1 и L_w^2 образуют в точках стыка w_1 и w_n ненулевые углы $\pi\gamma_1$ и $\pi\gamma_n$.

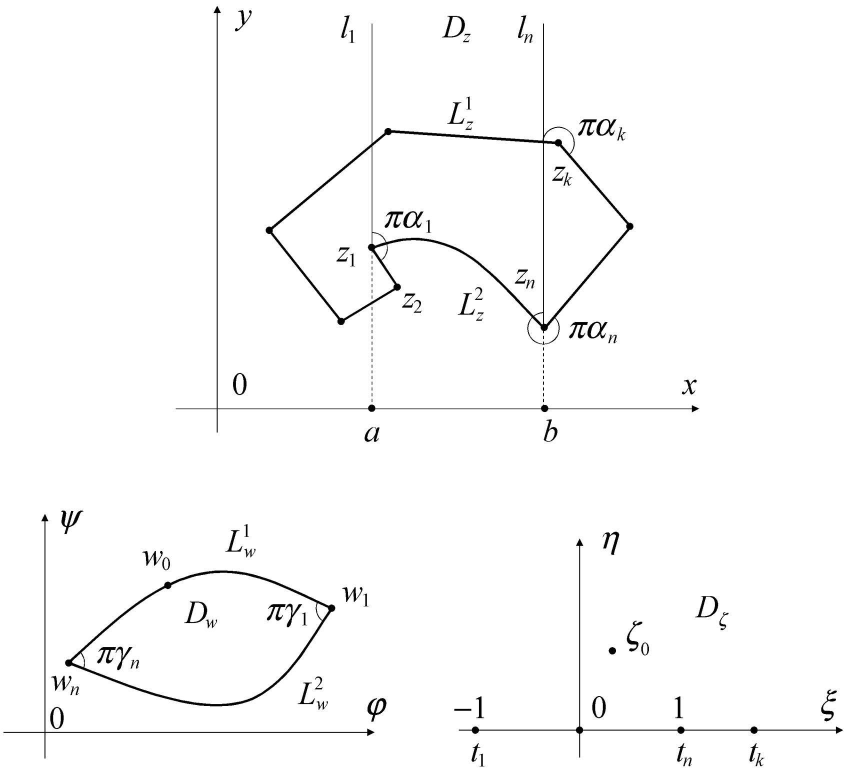

Рис. 1.

Конформно отобразим верхнюю полуплоскость $D_\zeta = \{\operatorname{Im} \zeta > 0\}$ на D_w функцией $w = \omega(\zeta)$ так, чтобы точки ∞, $t_1 = -1$, $t_n = 1$, лежащие на вещественной оси, переходили соответственно в фиксированную точку $w_0 \in L_w^1$, w_1 и w_n. Пусть t_k — точки на границе D_ζ, соответствующие вершинам ломаной L_z^1, $k = 1, \ldots, n$. Сравнивая граничные значения функций $w(x) = f_1(x) + if_2(x)$ и $w = \omega(t)$ на участках, соответствующих L_w^2, получим соотношение $f_1(x) + if_2(x) = \omega(t)$, из которого найдем зависимость $x = H(t)$. Дифференцируя ее по t, получим

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{\omega'(t)}{w'(H(t))} = h(t), \quad |t| < 1, \tag{1}$$

где $h(t) = H'(t) \leq 0$ при $t \in (-1, 1)$, т. к. функция $x(t)$ монотонно убывает. Вследствие достаточной гладкости дуги L_w^2 функция $d\omega/dt$ на $(-1, 1)$ особенностей не имеет, т. е. $0 \neq |d\omega/dt| < \infty$ при $|t| < 1$. Таким образом, $-\infty < h(t) < 0$, $|t| < 1$.

Учитывая поведение производной отображающей функции $d\omega/dt$ в угловых точках t_1 и t_n (см., напр., [1]), представим $h(t)$ в виде $h(t) = h^*(t)(t - t_1)^{\gamma_1 - 1}(t - t_n)^{\gamma_n - 1}$, где $h^*(t)$ — гёльдерова функция на $[-1, 1]$, $-\infty < h^*(t) < 0$, $t \in [-1, 1]$.

Пусть уравнения прямых, на которых лежат стороны полигона, имеют вид $a_k x - b_k y = c_k$, $k = 1, \ldots, n - 1$. Тогда

$$a_k x(t) - b_k y(t) = c_k, \quad t \in (t_k, t_{k+1}), \quad k = 1, \ldots, n - 1. \tag{2}$$

Отметим, что здесь через (t_k, t_{k+1}) обозначена часть границы D_ζ в расширенной комплексной плоскости от точки t_k до точки t_{k+1}, проходимая в положительном направлении.

Пусть ζ_0 — точка в D_ζ, соответствующая точке ∞ в плоскости z. Найдем функцию $z = F(\zeta)$, отображающую верхнюю полуплоскость D_ζ на область D_z, которая на вещественной оси удовлетворяет краевым условиям (1), (2). Если она известна, то известно и уравнение $z = F(t)$, $-1 \leq t \leq 1$ контура L_z^2, а функция $w(z)$ восстанавливается по формуле $w = \omega(F^{-1}(z))$, где $\zeta = F^{-1}(z)$ — функция, обратная к $z = F(\zeta)$. Проведем из точек z_1 и z_n вверх вертикальные лучи l_1 и l_n и обозначим через $\pi\alpha_1$, $\pi\alpha_n$ углы, образованные первым и $(n-1)$-м звеньями ломаной L_z^1 с этими лучами. Пусть $\pi\alpha_k$ — внутренние углы области D_z в точках z_k, $k = 2, \ldots, n-1$ (рис. 1).

По аналогии с внутренней задачей (см. [2]) нетрудно показать, что необходимым условием разрешимости задачи является следующее ограничение на известную часть границы: ломаная L_z^1, дополненная лучами l_1 и l_n, является границей двулистной многоугольной римановой поверхности без точек ветвления, причем

$$\sum_{k=1}^{n} (\alpha_k - 1) = 3.$$

В дальнейшем будем предполагать это условие выполненным.

2. Построение интегрального представления решения

Дифференцируя, запишем (1), (2) в виде

$$a_k \frac{dx(t)}{dt} - b_k \frac{dy(t)}{dt} = 0, \quad t \in [t_k, t_{k+1}], \quad k = 1, \ldots, n-1,$$
$$\frac{dx(t)}{dt} = h(t), \quad t \in [-1, 1].$$

Эта задача является краевой задачей Гильберта с разрывными коэффициентами для функции $dz(\zeta)/d\zeta$ в полуплоскости

$$\mathrm{Re}[(a(t) + ib(t)) dz(t)/dt] = c(t), \quad t \in (-\infty, \infty),$$

где

$$a(t) = \begin{cases} a_k, & t \in [t_k, t_{k+1}], \quad k = \overline{1, n-1}; \\ 1, & t \in [-1, 1], \end{cases}$$
$$b(t) = \begin{cases} b_k, & t \in [t_k, t_{k+1}], \quad k = \overline{1, n-1}; \\ 0, & t \in [-1, 1], \end{cases}$$
$$c(t) = \begin{cases} 0, & |t| > 1; \\ h(t), & t \in [-1, 1]. \end{cases}$$

Решение ищем в классе функций $dz(\zeta)/d\zeta$, ограниченных в вершинах полигона с углами, бóльшими π, неограниченных в остальных и имеющих полюс второго порядка в точке ζ_0.

Перепишем задачу Гильберта в виде $\mathrm{Re}[(a(t)+ib(t))\Phi(t)] = c(t)|t-\zeta_0|^4$, где $\Phi(\zeta) = (\zeta-\zeta_0)^2(\zeta-\overline{\zeta}_0)^2 dz(\zeta)/d\zeta$.

Пусть $\alpha_1 < 1$, $\alpha_n < 1$. Функция $\Pi(\zeta) = \prod\limits_{k=1}^{n} (\zeta - t_k)^{\alpha_k - 1}$ может быть взята за каноническую функцию однородной задачи, и решение запишется так

$$\Phi(\zeta) = \frac{dz(\zeta)}{d\zeta}(\zeta-\zeta_0)^2(\zeta-\overline{\zeta}_0)^2 = \frac{\Pi(\zeta)}{\pi i}\int_{-1}^{1} \frac{h(t)|t-\zeta_0|^4}{\Pi(t)(t-\zeta)}dt + P(\zeta)\Pi(\zeta),$$

где $P(\zeta)$ — некоторый многочлен. Нетрудно видеть, что на бесконечности $|\Pi(\zeta)| \sim |\zeta|^d$, где $d = \sum\limits_{k=1}^{n} (\alpha_k - 1) = 3$.

Чтобы искомый контур был конечен, следует положить $P(\zeta) \equiv 0$, т.к.

$$\frac{\Pi(\zeta)}{(\zeta-\zeta_0)^2(\zeta-\overline{\zeta}_0)^2} \sim \frac{1}{\zeta}, \quad \zeta \to \infty.$$

Итак,

$$z = F(\zeta) = z_1 + \frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{\zeta} \frac{\Pi(\zeta)d\zeta}{(\zeta-\zeta_0)^2(\zeta-\overline{\zeta}_0)^2}\int_{-1}^{1}\frac{h(t)|t-\zeta_0|^4}{\Pi(t)(t-\zeta)}dt \tag{3}$$

— единственное решение задачи в классе ограниченных функций $z = z(\zeta)$, если $a_j < 1$, $j = 1, n$.

Пусть теперь только одно из α_j, $j = 1, n$, например, α_n, больше единицы. Каноническая функция может быть взята в виде $\Pi(\zeta)(\zeta - t_n)^{-1}$, и тогда интегральное представление решения имеет вид

$$\frac{dz(\zeta)}{d\zeta} = \frac{\Pi(\zeta)}{(\zeta-\zeta_0)^2(\zeta-\overline{\zeta}_0)^2}\left[\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{h(t)|t-\zeta_0|^4}{\Pi(t)(t-\zeta)}dt + \frac{iK}{\zeta+1}\right], \tag{4}$$

где K — вещественное число (можно показать, что $K \geq 0$). Если же $\alpha_1 > 1$ и $\alpha_n > 1$, то имеем

$$\frac{dz(\zeta)}{d\zeta} = \frac{\Pi(\zeta)}{(\zeta-\zeta_0)^2(\zeta-\overline{\zeta}_0)^2}\left[\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{h(t)|t-\zeta_0|^4}{\Pi(t)(t-\zeta)}dt + \frac{iK_1}{\zeta+1} + \frac{iK_2}{\zeta-1}\right], \tag{5}$$

где K_1, K_2 вещественны. Если положить $K = 0$ в (4) или $K_1 = K_2 = 0$ в (5), то получим решение задачи, которое по виду совпадает с (3). Таким образом, (3) является частным решением задачи и в случаях, когда по крайней мере один из параметров α_1, α_n больше единицы.

3. Разрешимость уравнения Гахова

Условием однозначности функции $z(\zeta)$, определенной формулой (3), будет служить равенство $c_{-1} = 0$, где c_{-1} — вычет функции $dz(\zeta)/d\zeta$ в точке $\zeta = \zeta_0$. Имеем

$$\begin{aligned}\operatorname*{res}_{\zeta=\zeta_0}\frac{dz(\zeta)}{d\zeta} &= \lim_{\zeta\to\zeta_0}\frac{d}{d\zeta}\left[(\zeta-\zeta_0)^2\frac{dz(\zeta)}{d\zeta}\right] = \lim_{\zeta\to\zeta_0}\frac{d}{d\zeta}\left[\frac{1}{(\zeta-\overline{\zeta}_0)^2}\frac{\Pi(\zeta)}{\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{h(t)|t-\zeta_0|^4}{\Pi(t)(t-\zeta)}dt\right] = \\ &= \frac{\Pi(\zeta_0)}{(\zeta_0-\overline{\zeta}_0)^2}\frac{1}{\pi i}\left\{-\frac{2}{\zeta_0-\overline{\zeta}_0}\int_{-1}^{1}\frac{h(t)|t-\zeta_0|^4}{\Pi(t)(t-\zeta_0)}dt + \right. \\ &\left. + \sum_{j=1}^{n}\frac{\beta_j}{\zeta_0-t_j}\int_{-1}^{1}\frac{h(t)|t-\zeta_0|^4}{\Pi(t)(t-\zeta_0)}dt + \int_{-1}^{1}\frac{h(t)|t-\zeta_0|^4}{\Pi(t)(t-\zeta_0)}\right\},\end{aligned}$$

где $\beta_j = \alpha_j - 1$, $j = 1, \ldots, n$.

Введем обозначения

$$M(\zeta_0) = \int_{-1}^{1}\frac{h(t)|t-\zeta_0|^4}{\Pi(t)(t-\zeta_0)}dt, \qquad N(\zeta_0) = \int_{-1}^{1}\frac{h(t)|t-\zeta_0|^4}{\Pi(t)(t-\zeta_0)^2}dt.$$

Приравняем вычет $\operatorname{res}_{\zeta=\zeta_0} dz(\zeta)/d\zeta$ к нулю

$$\frac{\Pi(\zeta_0)}{(\zeta-\overline{\zeta}_0)^2}\left\{\left[-\frac{2}{\zeta_0-\overline{\zeta}_0} + \sum_{k=1}^{n}\frac{\beta_k}{\zeta_0-t_k}\right]M(\zeta_0) + N(\zeta_0)\right\} = 0.$$

Ясно, что $\Pi(\zeta) = \prod\limits_{k=1}^{n}(\zeta - t_k)^{\beta_k} \neq 0$ при $\zeta \neq t_k$, $k = \overline{1,n}$. Покажем, что $M(\zeta_0) \neq 0$, $\zeta_0 \in D_\zeta$. Имеем

$$M(\zeta) = \int_{-1}^{1}\frac{h(t)|t-\zeta_0|^4}{\Pi(t)}\frac{dt}{t-\zeta_0} = \int_{-1}^{1}\frac{h(t)|t-\zeta_0|^2(t-\overline{\zeta}_0)}{\Pi(t)}dt,$$

следовательно,

$$\operatorname{Im} M(\zeta_0) = \operatorname{Im} \zeta_0 \int_{-1}^{1} \frac{h(t)|t-\zeta_0|^2}{\Pi(t)} dt \neq 0, \quad \zeta_0 \in D_\zeta.$$

Отсюда видно, что $M(\zeta_0) \neq 0$, $\zeta_0 \in D_\zeta$. Таким образом, имеем следующее условие однозначности функции $z(\zeta)$:

$$F(\zeta_0) = -\frac{N(\zeta_0)}{M(\zeta_0)} + \frac{2}{\zeta_0 - \overline{\zeta}_0} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\beta_j}{\zeta_0 - t_j} = 0. \tag{6}$$

Назовем (6) уравнением Гахова для внешней смешанной обратной краевой задачи по параметру x. Выясним, существует ли решение данного уравнения в верхней полуплоскости. Для этого рассмотрим окружность радиуса R (R — достаточно большое число) с центром в начале координат. Проведем хорду T_1 параллельно оси $O\zeta$ через точку $i\widetilde{\eta}_0$, где $\widetilde{\eta}_0$ — фиксированное достаточно малое число. (Значения R и $\widetilde{\eta}_0$ будут выбраны ниже.) Хорда T_1 делит окружность на две части. Рассмотрим ту часть T_2, которая лежит целиком в верхней полуплоскости. Пусть Q — круговой сегмент, ограниченный T_1 и T_2.

Левая часть (6) определяет некоторое векторное поле на плоскости. Подсчитаем его вращение на $\partial Q = T_1 \cup T_2$. Нетрудно убедиться, что функция $N(\zeta_0)/M(\zeta_0)$ непрерывна по ζ_0 в D_ζ и $N(\zeta_0) \sim a_0 \overline{\zeta}_0^2$, $M(\zeta_0) \sim -a_0 \zeta_0 \overline{\zeta}_0^2$ при $\zeta_0 \to \infty$, где

$$a_0 = \int_{-1}^{1} \frac{h(t)}{\Pi(t)} dt.$$

(Так как функции h и Π непрерывны, не обращаются в нуль на $(-1,1)$ и имеют постоянный аргумент на этом интервале, то $a_0 \neq 0$.) Следовательно, $N(\zeta_0)/M(\zeta_0) \sim -1/\overline{\zeta}_0$, $\zeta_0 \to \infty$. Значит, существует константа $C > 0$ такая, что

$$\left| \frac{N(\zeta_0)}{M(\zeta_0)} \right| \leq C, \quad \zeta_0 \in D_\zeta.$$

1. Рассмотрим поведение $F(\zeta_0)$ при $\zeta_0 \in T_1$.

а) Пусть $\zeta_0 = \xi_0 + i\widetilde{\eta}_0 \in T_1$ и для некоторого k величина $|\xi_0 - t_k| < \varepsilon$, где $\varepsilon = \frac{1}{3} \min\limits_{1 \leq j \leq n-1} |t_{j+1} - t_j|$. Тогда

$$\left| \frac{\beta_k}{\zeta_0 - t_k} \right| = \left| \frac{\beta_k}{\xi_0 - t_k + i\widetilde{\eta}_0} \right| \leq \frac{\widetilde{\beta}}{\widetilde{\eta}_0},$$

где $\widetilde{\beta} = \max\limits_j |\beta_j| < 1$. Имеем

$$\left| \sum_{j \neq k} \frac{\beta_j}{\zeta_0 - t_j} \right| \leq \sum_{j \neq k} \left| \frac{\beta_j}{\xi_0 - t_j + i\widetilde{\eta}_0} \right| \leq \sum_{j \neq k} \frac{1}{\sqrt{(\xi_0 - t_j)^2 + \widetilde{\eta}_0^2}} =$$

$$= \sum_{j \neq k} \frac{1}{\sqrt{(\xi_0 - t_k + t_k - t_j)^2 + \widetilde{\eta}_0^2}} \leq \sum_{j \neq k} \frac{1}{\sqrt{(|t_k - t_j| - |\xi_0 - t_k|)^2 + \widetilde{\eta}_0^2}} \leq$$

$$\leq \sum_{j \neq k} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 (3|k-j| - 1)^2 + \widetilde{\eta}_0^2}} < \frac{n-1}{\sqrt{2}\varepsilon}.$$

Введем обозначение

$$F_1(\zeta_0) = \frac{N(\zeta_0)}{M(\zeta_0)} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\beta_j}{\zeta_0 - t_j}.$$

Пусть $\widetilde{\eta}_0$ настолько мало, что $\widetilde{\eta}_0 < \frac{1-\tilde{\beta}}{C+(n+1)/(\sqrt{2}\varepsilon)}$. Тогда $C + \frac{n-1}{\sqrt{2}\varepsilon} < \frac{1-\tilde{\beta}}{\tilde{\eta}_0}$ и

$$|F_1(\zeta_0)| = \left|\frac{N(\zeta_0)}{M(\zeta_0)} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\beta_j}{\zeta_0 - t_j}\right| \le C + \left|\sum_{j\neq k} \frac{\beta_j}{\zeta_0 - t_j}\right| + \left|\frac{\beta_k}{\zeta_0 - t_k}\right| \le C + \frac{n-1}{\sqrt{2}\omega} + \frac{\widetilde{\beta}}{\widetilde{\eta}_0} < \frac{1}{\widetilde{\eta}_0}.$$

б) Пусть теперь ξ_0 не попадает ни в одну из ε-окрестностей точек t_j, $j = \overline{1,n}$. Тогда

$$\left|\sum_{j=1}^{n} \frac{\beta_j}{\zeta_0 - t_j}\right| \le \frac{n}{\varepsilon}.$$

Если $\widetilde{\eta}_0 < (C + n/\omega)^{-1}$, то

$$|F_1(\zeta_0)| \le C + n/\varepsilon < 1/\widetilde{\eta}_0.$$

Таким образом, если $\widetilde{\eta} < \min\left[\frac{1-\tilde{\beta}}{C+(n-1)/(\sqrt{2}\varepsilon)}, (C+n/\varepsilon)^{-1}\right]$, то $|F_1(\zeta_0)| < 1/\widetilde{\eta}_0$ как в случае а), так и в случае б). Из последнего неравенства следует, что значения функции

$$F(\zeta_0) = \frac{N(\zeta_0)}{M(\zeta_0)} + \frac{1}{i\eta_0} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\beta_j}{\zeta_0 - t_j} = -\frac{i}{\eta_0} + F_1(\zeta_0)$$

при $\zeta_0 \in T_1$ лежат в нижней полуплоскости, следовательно,

$$\left|\int_{T_1} d\arg F(\zeta_0)\right| \le \pi. \tag{7}$$

2. Пусть $\zeta_0 = Re^{i\varphi} \in T_2$. Величину R пока не фиксируем и выберем позже. Тогда

$$\left|\frac{\beta_j}{\zeta_0 - t_j} - \frac{\beta_j}{\zeta_0}\right| = \left|\frac{\beta_j t_j}{Re^{i\varphi}(Re^{i\varphi} - t_j)}\right| \le \frac{|\beta_j|\,|t_j|}{R(R-1)} < \frac{1}{(R-1)^2}.$$

Учитывая, что $\sum\limits_{j=1}^{n} \beta_j = 3$ и

$$N(\zeta_0)/M(\zeta_0) = -1/\zeta_0 + O(R^{-2}), \quad R = |\zeta_0| \to \infty,$$

равномерно по $\varphi = \arg\zeta_0$, можем записать $F(\zeta_0) = F_2(\zeta_0) + O(R^{-2})$, где

$$F_2(\zeta_0) = \frac{1}{i\eta_0} - \frac{2}{\zeta_0} = \frac{\zeta_0 - 2i\eta_0}{i\eta_0\zeta_0} = \frac{\overline{\zeta}_0}{i\eta_0\zeta_0} = -\frac{i\overline{\zeta}_0^2}{\eta_0 R^2},$$

откуда

$$\arg F_2(\zeta_0) = -2\varphi - \pi/2, \quad |F_2(\zeta_0)| \ge R^{-1}.$$

Таким образом, $F(\zeta_0) = F_2(\zeta_0) + o(F_2(\zeta_0))$, $R = |\zeta_0| \to \infty$, равномерно по $\varphi = \arg\zeta_0$. Так как $\int\limits_0^{2\pi} d\arg F_2(Re^{i\varphi}) = 2\pi$, то при достаточно больших R и малых $\widetilde{\eta}_0$

$$\int_{T_2} d\arg F(\zeta_0) > \pi. \tag{8}$$

Из (7) и (8) следует, что $\int\limits_{\partial Q} d\arg F(\zeta_0) \neq 0$.

Таким образом, вращение векторного поля, определяемого левой частью равенства (6), на ∂Q отлично от нуля. Следовательно, это векторное поле в некоторой точке $\zeta_0 \in Q$ обращается в нуль. Это доказывает разрешимость уравнения Гахова (6) в D_ζ.

4. Структура множества корней уравнения Гахова

Рассмотрим уравнение Гахова

$$\frac{-2}{\zeta_0-\overline{\zeta}_0}\int_{-1}^{1}\frac{h(t)|t-\zeta_0|^4}{\Pi(t)(t-\zeta_0)}dt+\sum_{j=1}^{n}\frac{\beta_j}{\zeta_0-t_j}\int_{-1}^{1}\frac{h(t)|t-\zeta_0|^4}{\Pi(t)(t-\zeta_0)}dt+\int_{-1}^{1}\frac{h(t)|t-\zeta_0|^4}{\Pi(t)(t-\zeta_0)^2}dt=0. \tag{9}$$

Введем обозначение $h(t)/\Pi(t)=G(t)$. Принимая во внимание равенства

$$\frac{|t-\zeta_0|^4}{(t-\zeta_0)}=(t-\zeta_0)(t-\overline{\zeta}_0)^2(t-\zeta_0)=t^3+t^2(-\zeta_0-2\overline{\zeta}_0)+t(\overline{\zeta}_0^2+2\overline{\zeta}_0\zeta_0)-\zeta_0\overline{\zeta}_0^2,$$

$$\frac{|t-\zeta_0|^4}{(t-\zeta_0)^2}=t^2-2\overline{\zeta}_0t+\overline{\zeta}_0^2,$$

перепишем уравнение (9) в следующем виде:

$$\frac{-2}{\zeta_0\overline{\zeta}_0}\Big\{\int_{-1}^{1}G(t)t^3dt-(\zeta_0+2\overline{\zeta}_0)\int_{-1}^{1}G(t)t^2dt+(\overline{\zeta}_0^2+2\overline{\zeta}_0\zeta_0)\int_{-1}^{1}G(t)t\,dt-$$
$$-\zeta_0\overline{\zeta}_0^2\int_{-1}^{1}G(t)dt\Big\}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\beta_j}{\zeta_0-t_j}\Big\{\int_{-1}^{1}G(t)t^3dt-(\zeta_0+2\overline{\zeta}_0)\int_{-1}^{1}G(t)t^2dt+$$
$$+(\overline{\zeta}_0^2+2\overline{\zeta}_0\zeta_0)\int_{-1}^{1}G(t)t\,dt-\zeta_0\overline{\zeta}_0^2\int_{-1}^{1}G(t)dt\Big\}+$$
$$+\int_{-1}^{1}G(t)t^2dt-2\overline{\zeta}_0\int_{-1}^{1}G(t)t\,dt+\overline{\zeta}_0^2\int_{-1}^{1}G(t)dt=0.$$

Обозначая $\int\limits_{-1}^{1}G(t)t^kdt=a_k$, $k=0,1,2,3$, а левую часть уравнения (9) через $F(\zeta_0)$, и приводя подобные слагаемые, получим

$$F(\zeta_0)=\overline{\zeta}_0^3\Big[\sum_{j=1}^{n}\frac{\beta_j}{\zeta_0-t_j}(a_1-a_0\zeta_0)-a_0\Big]+\overline{\zeta}_0^2\Big[3a_0\zeta_0-a_0\zeta_0^2-2a_2\sum_{j=1}^{n}\frac{\beta_j}{\zeta_0-t_j}-$$
$$-a_1\sum_{j=1}^{n}\frac{\beta_j}{\zeta_0-t_j}\zeta_0\Big]+\overline{\zeta}_0\Big[-5a_2-6a_1\zeta_0+3a_2\sum_{j=1}^{n}\frac{\beta_j}{\zeta_0-t_j}+2a_1\sum_{j=1}^{n}\frac{\beta_j}{\zeta_0-t_j}\zeta_0^2-$$
$$-a_3\sum_{j=1}^{n}\frac{\beta_j}{\zeta_0-t_j}\Big]-2a_3+3a_2\zeta_0+a_3\sum_{j=1}^{n}\frac{\beta_j}{\zeta_0-t_j}\zeta_0-a_2\sum_{j=1}^{n}\frac{\beta_j}{\zeta_0-t_j}\zeta_0^2.$$

Отсюда видно, что $F(\zeta_0)$ — 4-аналитическая функция в верхней полуплоскости D_ζ. Из доказанного в предыдущем параграфе следует, что множество E нулей функции $F(\zeta_0)$ в D_ζ непусто.

Лемма. *Множество E не имеет предельных точек на границе D_ζ.*

Доказательство. Рассмотрим поведение $F(\zeta_0)$ на ∂D_ζ. Повторяя рассуждения п. 1) из предыдущего параграфа, получим, что при

$$\operatorname{Im}\zeta_0=\eta_0<\min\Big\{\frac{1-\widetilde{\beta}}{C(n-1)/(2\varepsilon)},\ \frac{1}{n/(2\varepsilon)+C}\Big\} \tag{10}$$

значения $F(\zeta_0)$ лежат в нижней полуплоскости, т. е. $|F(\zeta_0)|\neq 0$ при выполнении условия (10).

Пусть $R=|\zeta_0|\to\infty$. Тогда $F(\zeta_0)=F_2(\zeta_0)+o(F_2(\zeta_0))$, $R\to\infty$, равномерно по $\arg\zeta_0$, где $F_2(\zeta_0)=\frac{1}{i\eta_0}-\frac{2}{\zeta_0}$, $|F_2(Re^{i\varphi})|>R^{-1}$. Из последнего неравенства видно, что $|F_2(\zeta_0)|\neq 0$, а следовательно, и $|F(\zeta_0)|\neq 0$ при достаточно больших R. $\square$

Воспользуемся одним результатом из теории полианалитических функций.

Теорема А. ([7]). *Пусть $f(z)$ — n-аналитическая в некоторой области D функция, отличная от тождественного нуля, и E — множество ее нулей в D. Если a — неизолированная точка из E, то в достаточно малой окрестности δ этой точки множество $E \setminus \{a\}$ является объединением не более чем $2n - 2$ аналитических дуг.*

Используя этот результат, получим следующее утверждение.

Теорема. *Множество E корней уравнения Гахова* (6) *в D_ζ непусто, компактно и не имеет предельных точек на границе верхней полуплоскости. Это множество можно представить в виде $E = E_1 \cup E_2$, $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$, где E_1 состоит из не более чем конечного числа точек, E_2 является объединением не более чем конечного числа попарно непересекающихся жордановых аналитических дуг.*

Если a — неизолированная точка множества E, то в достаточно малой окрестности этой точки множество $E \setminus \{a\}$ является объединением не более чем шести аналитических дуг.

Доказательство. Функция $F(\zeta_0)$ в уравнении Гахова непрерывна, следовательно, E – замкнутое множество в D_ζ. Так как E не имеет предельных точек на границе верхней полуплоскости, то существует компакт K такой, что $E \in K$. Значит, E ограничено. Из ограниченности и замкнутости E следует, что E компактно в $\overline{\mathbb{C}}$. Для любой точки $a \in E$ по теореме А существует окрестность δ такая, что $E \cap \delta$ состоит либо из единственной точки $\{a\}$, либо из объединения не более чем шести аналитических дуг. $\square$

Литература

1. Монахов В.Н. *Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений.* – Новосибирск: СО АН СССР, 1977. – 424 с.
2. Насыров С.Р. *Смешанная обратная краевая задача на римановых поверхностях* // Изв. вузов. Математика. – 1990. – № 10. – С. 25–36.
3. Авхадиев Ф.Г. *Конформные отображения и краевые задачи.* – Казань: Казанский фонд "Математика", 1996. – 216 с.
4. Гахов Ф.Д. *Краевые задачи.* – М.: Наука, 1977. – 640 с.
5. Аксентьев Л.А. *Связь внешней обратной краевой задачи с внутренним радиусом* // Изв. вузов. Математика. – 1984. – № 2. – С. 3–11.
6. Киселев А.В., Насыров С.Р. *О структуре множества корней уравнения Ф.Д. Гахова для односвязной и многосвязной областей* // Труды семин. по краев. задачам. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1990. – Вып. 24. – С. 105–115.
7. Balk M.B. *Polyanalytic functions.* – Berlin: Akad. Verl., 1991. – 197 p.

Казанский государственный университет

Поступила
17.06.2002