## ТЕМА 1. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

В математике употребляются специальные символы, позволяющие сократить запись и точнее выразить утверждение.

**Математические символы:** $+, -, \times, <, \perp, \|, \bigcup, \bigcap, \in, \ldots$

Например, применяя символ «>» к числам $a, b$, получим запись «$a > b$», которая является сокращением для предложения: «число $a$ больше числа $b$». Если $l_1$, $l_2$ – обозначения прямых, то запись $l_1 \| l_2$ есть утверждение, что $l_1$ параллельна $l_2$. Запись «$x \in M$» означает, что $x$ является элементом множества $M$.

Наряду с математической символикой в математике широко используется логическая символика, применяемая к ***высказываниям*** и ***предикатам***.

Под ***высказыванием*** понимается предложение, которое либо только истинно, либо только ложно. Например, высказывание «–3 > 0» ложно, а высказывание «2 × 2 = 4» истинное. Будем высказывания обозначать большими латинскими буквами, возможно с индексами. Например, $A$ = «–3 > 0», $B$ = «2 × 2 = 4».

**Предикат** – это предложение с одной переменной или несколькими переменными. Например, предложение: «число $x$ больше числа 0» (в символах $x > 0$) является предикатом от одной переменной $x$, а предложение: «$a + b = c$» – предикат от трех переменных $a, b, c$.

Предикат при конкретных значениях переменных становится высказыванием, принимая истинное и ложное значение.

Будем обозначать предикаты как функции: $Q(x)$ =«$x > 0$», $F(x,b,c)$ = «$x + b = c$».

**Логические символы:** $\bar{\ }$, &, $\vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \forall, \exists$.

1. ***Отрицание*** применяется к одному высказыванию или предикату, соответствует частице «не» и обозначается $\overline{A}$ (или $\neg A$).

Например, формула $\overline{-3>0}$ есть сокращение для предложения: «–3 не больше 0» («неверно, что –3 больше 0»).

2. ***Конъюнкция*** применяется к двум высказываниям или предикатам, соответствует союзу «и», обозначается: $A \,\&\, B$ (или $A \wedge B$).

Так формула (–3 > 0) & (2 × 2 = 4) означает предложение «–3 > 0 и 2 × 2 = 4», которое, очевидно, ложно.

3. ***Дизъюнкция*** применяется к двум высказываниям или предикатам, соответствует союзу «или» (неразделительному) и обозначается $A \vee B$.

Предложение: «число $x$ принадлежит множеству $M_1$ или множеству $M_2$» изображается формулой: $x \in M_1 \vee x >\in M_2$.

4. ***Импликация*** соответствует союзу «если ..., то ...» и обозначается: $A \rightarrow B$.

Так, запись «$a > -1 \rightarrow a > 0$» есть сокращение для предложения «если $a > -1$, то $a > 0$».

5. ***Эквиваленция*** $A \leftrightarrow B$ соответствует предложению: «$A$ тогда и только тогда, когда $B$».

Символы $\forall, \exists$ называются ***кванторами общности и существования***, соответственно применяются к предикатам (а не к высказываниям). Квантор $\forall$ читается, как «любой», «каждый», «все», или с предлогом «для»: «для любого», «для всех» и т.д. Квантор $\exists$ читается: «существует», «найдется» и др.

6. ***Квантор общности*** применяется к предикату $F(x, \ldots)$, содержащему одну переменную (например, $x$) или несколько переменных, при этом получается формула $\forall xF(x,\ldots)$, которая соответствует предложению: «для любого $x$ выполняется $F(x, \ldots)$» или «все $x$ обладают свойством $F(x, \ldots)$».

Например: $\forall x(x > 0)$ есть сокращение для фразы: «любое $x$ больше 0», которая является ложным высказыванием. Предложение: $\forall a(a > 0 \to a > -1)$ является истинным высказыванием.

7. ***Квантор существования***, примененный к предикату $F(x,...)$ соответствует предложению «существует $x$, такой, что $F(x,...)$» («найдется $x$, для которого $F(x,...)$») и обозначается: $\exists xF(x,...)$.

Например, истинное высказывание «существует действительное число, квадрат которого равен 2» записывается формулой $\exists x(x \in R \ \& \ x^2 = 2)$. Здесь квантор существования применен к предикату: $F(x)=(x\in R \ \& \ x^2 = 2)$ (напомним, что множество всех действительных чисел обозначается через $R$).

Если квантор применяется к предикату с одной переменной, то получается высказывание, истинное или ложное. Если квантор применяется к предикату с двумя или большим числом переменных, то получается предикат, в котором переменных на одну меньше. Так, если предикат $F(x, y)$ содержит две переменные, то в предикате $\forall xF(x, y)$ одна переменная $y$ (переменная $x$ является «связанной», вместо нее нельзя подставлять значения $x$). К предикату $\forall xF(x, y)$ можно применить квантор общности или существования по переменной $y$, тогда полученная формула $\exists y \forall xF(x, y)$ или $\forall y \forall xF(x, y)$ является высказыванием.

Так, предикат «$|\sin x| < a$» содержит две переменные $x$, $a$. Предикат $\forall x\ (|\sin x| < a)$ зависит от одной переменной $a$, при $a = 1/2$ этот предикат обращается в ложное высказывание $\forall\ (|\sin x| < 1/2)$, при $a = 2$ получаем истинное высказывание $\forall x\ (|\sin x| < 2)$.

Если к предикату $\forall x\ (|\sin x| < a)$ применить квантор существования, то получим формулу: $\exists a \forall x(|\sin x| < a)$, выражающую истинное высказывание: «функция $\sin x$ является ограниченной».

Для некоторых формул введем сокращенную запись.

Так, вместо формулы $\exists x(x\in R \ \& \ x^2 = 2)$ будем писать: $\exists x\in R(x^2 = 2)$,

вместо $\exists x(x > 0 \ \& \ x^2 + 3 = 4)$ пишем: $\exists x > 0\ (x^2 + 3 = 4)$.

Формулу $\forall x\ (x\in R \to x^2 \geq 0)$ сократим так: $\forall x\in R(x^2 \geq 0)$ и т.д.

Будем называть $\forall x \in R, \exists x > 0$ и т.д. ***ограниченными кванторами***.

Несколько кванторов общности (существования) заменяем на один: вместо $\forall x \forall y(P(x, y))$ пишем $\forall x,y(P(x,y))$, вместо $\exists x_1 \in M\ \exists x_2 \in M\,(Q(x_1, x_2))$ будем писать $\exists x_1, x_2 \in M\,(Q(x_1, x_2))$.

## ТЕМА 2. ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ФУНКЦИИ

### 1 ПЕРЕМЕННЫЕ И ПОСТОЯННЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

В результате измерения физических величин (время, площадь, объем, масса, скорость и т.д.) определяются их числовые значения. Математика занимается величинами, отвлекаясь от их конкретного содержания. В дальнейшем, говоря о величинах, мы будем иметь в виду их числовые значения. В различных явлениях некоторые величины изменяются, а другие сохраняют свое числовое значение. Например, при равномерном движении точки время и расстояние меняются, а скорость остается постоянной.

^ *Переменной величиной* называется величина, которая принимает различные числовые значения. Величина, числовые значения которой не меняются, называется *постоянной*. Переменные величины будем обозначать буквами $x, y, z, \ldots$, постоянные – $a, b, c, \ldots$

Заметим, что в математике постоянная величина часто рассматривается как частный случай переменной, у которой все числовые значения одинаковы.

^ *Областью изменения* переменной величины называется совокупность всех принимаемых ею числовых значений. Область изменения может состоять как из одного или нескольких промежутков, так и из одной точки.

## 2 УПОРЯДОЧЕННАЯ ПЕРЕМЕННАЯ ВЕЛИЧИНА. ЧИСЛОВАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ

Будем говорить, что переменная $x$ есть *упорядоченная переменная величина*, если известна область ее изменения, и про каждые из двух любых ее значений можно сказать, какое из них предыдущее и какое последующее.

Частным случаем упорядоченной переменной величины является переменная величина, значения которой образуют *числовую последовательность* $x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots$ Для таких величин при $i < j$, $i, j \in N$, значение $x_i$ считается предшествующим, а $x_j$ – последующим независимо от того, какое из этих значений больше. Таким образом, числовая последовательность – это переменная величина, последовательные значения которой могут быть перенумерованы. Числовую последовательность будем обозначать $x = \{x_n\} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$. Отдельные числа последовательности называются ее *элементами*.

Например, числовую последовательность образуют следующие величины:

1. $x = \left\{\frac{1}{n}\right\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\}$,
2. $x = \left\{n + (-1)^n\right\} = \{0,3,2,5,4,\ldots\}$,
3. $x = \{a + d(n-1)\}$, где $a$, $d$ – постоянные числа.

## 3 ФУНКЦИЯ

При изучении различных явлений природы и решении технических задач, а, следовательно, и в математике приходится рассматривать изменение одной величины в зависимости от изменения другой. Так, например, известно, что площадь круга выражается через радиус формулой $S = \pi r^2$. Если радиус $r$ принимает различные числовые значения, то площадь $S$ также принимает различные числовые значения, т.е. изменение одной переменной влечет изменение другой.

Если каждому значению переменной $x$, принадлежащему некоторой области, соответствует одно определенное значение другой переменной $y$, то $y$ называется *функцией переменной* $x$. Символически будем записывать $y=f(x)$. При этом переменная $x$ называется *независимой переменной* или *аргументом*.

Запись $y=C$, где $C$ – постоянная, обозначает функцию, значение которой при любом значении $x$ одно и то же и равно $C$.

Множество значений $x$, для которых можно определить значения функции $y$ по правилу $f(x)$, называется *областью определения функции*.

Заметим, что числовая последовательность также является функцией, область определения которой совпадает с множеством натуральных чисел.

К основным элементарным функциям относятся все функции, изучаемые в школьном курсе математики:

$$y = x^{a},\ y = a^{x},\ y = \log_{a} x,\ y = \sin x,\ y = \cos x,\ y = \operatorname{tg} x,\ y = \operatorname{ctg} x,\ y = \arcsin x,$$
$$y = \arccos x,\ y = \operatorname{arctg} x,\ y = \operatorname{arcctg} x.$$

^ *Элементарной функцией* называется функция, которая может быть задана основными элементарными функциями и постоянными при помощи конечного числа операций сложения, вычитания, умножения, деления и взятия функции от функции.

## 4 ПОНЯТИЕ ПРЕДЕЛА ЧИСЛОВОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

В дальнейшем курсе математики понятие предела будет играть фундаментальную роль, так как с ним непосредственно связаны основные понятия математического анализа – производная, интеграл и др.

Начнем с понятия предела числовой последовательности.

Число $a$ называется *пределом* последовательности $x = \{x_n\}$, если для произвольного заранее заданного сколь угодно малого положительного числа ε найдется такое натуральное число $N$, что при всех $n>N$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

Если число $a$ есть предел последовательности $x = \{x_n\}$, то говорят, что $x_n$ стремится к $a$, и пишут $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

Чтобы сформулировать это определение в геометрических терминах введем следующее понятие.

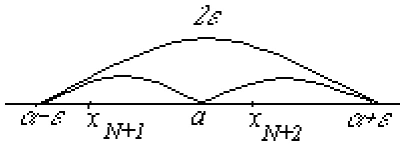
*Окрестностью точки* $x_0$ называется произвольный интервал $(a, b)$, содержащий эту точку внутри себя. Часто рассматривается окрестность точки $x_0$, для которой $x_0$ является серединой, тогда $x_0$ называется *центром* окрестности, а величина $(b–a)/2$ – *радиусом* окрестности.

Итак, выясним, что же означает геометрически понятие предела числовой последовательности. Для этого запишем последнее неравенство из определения в виде

$$-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon \qquad \text{или} \qquad a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon.$$

Это неравенство означает, что все элементы последовательности с номерами $n>N$ должны лежать в интервале ($a - \varepsilon$; $a + \varepsilon$).

Следовательно, постоянное число $a$ есть предел числовой последовательности $\{x_n\}$, если для любой малой окрестности с центром в точке $a$ радиуса $\varepsilon$ ($\varepsilon$ – окрестности точки $a$) найдется такой элемент последовательности с номером $N$, что все последующие элементытс номерами $n>N$ будут находиться внутри этой окрестности.




**Примеры.**

1.

Пусть переменная величина $x$ последовательно принимает значения

$$x_1 = 1+1,\ x_2 = 1+\frac{1}{2},\ x_3 = 1+\frac{1}{3},\ \ldots,\ x_n = 1+\frac{1}{n},\ldots$$

Докажем, что предел этой числовой последовательности равен 1. Возьмем произвольное положительное число $\varepsilon$. Нам нужно найти такое натуральное число $N$, что при всех $n>N$ выполняется неравенство $|x_n - 1| < \varepsilon$. Действительно, т.к.

$$\left|x_n - 1\right| = \left|1+\frac{1}{n}-1\right| = \frac{1}{n},$$

то для выполнения соотношения $|x_n - a| < \varepsilon$ достаточно, чтобы $\frac{1}{n} < \varepsilon$ или $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Поэтому, взяв в качестве $N$ любое натуральное число, удовлетворяющее неравенству $N > \frac{1}{\varepsilon}$, получим что нужно. Так если взять, например, $\varepsilon = \frac{1}{5}$, то, положив $N$=6, для всех $n$>6 будем иметь $\left|x_n - 1\right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{6} < \varepsilon$.

2.

Используя определение предела числовой последовательности, доказать что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2}$.

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Рассмотрим

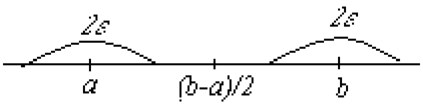
$$\left|x_n - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{n}{2n-1} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{2n-2n+1}{2n-1}\right| = \frac{1}{2n-1}.$$

Тогда $\left|x_n - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$, если $\frac{1}{2n-1} < \varepsilon$ или $2n - 1 > \frac{1}{\varepsilon}$, т.е. $n > \frac{1}{2\varepsilon} + \frac{1}{2}$. Поэтому выберем любое натуральное число, удовлетворяющее неравенству $N > \frac{1}{2\varepsilon} + \frac{1}{2}$.

Сделаем несколько замечаний.

**Замечание 1.** Очевидно, что если все элементы числовой последовательности принимают одно и то же постоянное значение $x_n = c$, то предел этой последовательности будет равен самой постоянной. Действительно, при любом ε всегда выполняется неравенство $|x_n - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$.

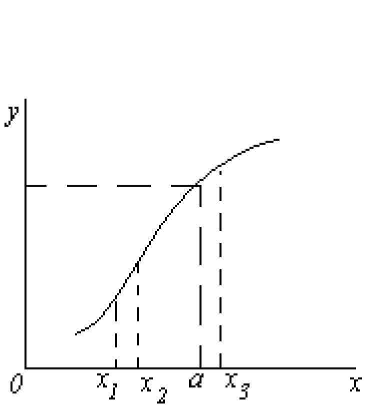
**Замечание 2.** Из определения предела следует, что последовательность не может иметь двух пределов. Действительно, предположим, что $x_n \to a$ и одновременно $x_n \to b$. Возьмем любое $\varepsilon < \frac{b-a}{2}$ и отметим окрестности точек $a$ и $b$ радиуса ε (см. рис.). Тогда по определению предела, все элементы последовательности, начиная с некоторого, должны находиться как в окрестности точки $a$, так и в окрестности точки $b$, что невозможно.



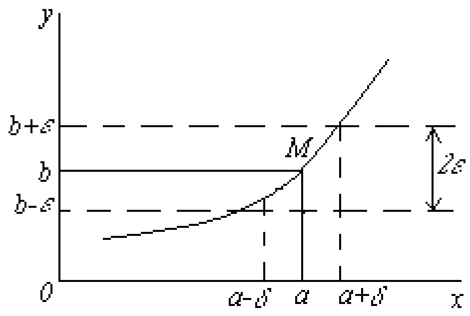

**Замечание 3.** Не следует думать, что каждая числовая последовательность имеет предел. Пусть, например, переменная величина принимает значения $x = \left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \ldots\right\}$. Несложно заметить, что эта последовательность не стремится ни к какому пределу.

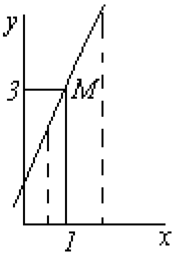
## 5 ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

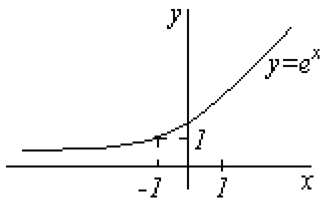
Пусть функция $y=f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $a$. Предположим, что независимая переменная $x$ неограниченно приближается к числу $a$. Это означает, что мы можем придавать $x$ значения сколь угодно близкие к $a$, но не равные $a$.



Будем обозначать это так $x \to a$. Для таких $x$ найдем соответствующие значения функции. Может случиться, что значения *f(x)* также неограниченно приближаются к некоторому числу *b*.Тогда говорят, что число *b* есть предел функции *f(x)* при $x \to a$.




Введем строгое определение предела функции.

Функция *y=f(x) стремится к пределу b при* $x \to a$, если для каждого положительного числа ε, как бы мало оно не было, можно указать такое положительное число δ, что при всех $x \neq a$ из области определения функции, удовлетворяющих неравенству $|x - a| < \delta$, имеет место неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$. Если *b* есть предел функции *f(x)* при $x \to a$, то пишут $\lim_{x \to a} f(x) = b$ или $f(x) \to b$ при $x \to a$.

Проиллюстрируем это определение на графике функции. Т.к. из неравенства $|x - a| < \delta$ должно следовать неравенство $|f(x) - b|$

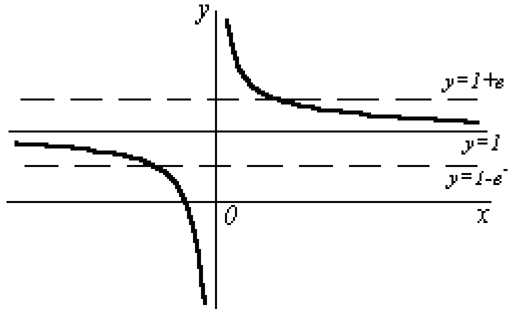
< ε, т.е. при $x \in (a - \delta, a + \delta)$ соответствующие значения функции $f(x) \in (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$, то, взяв произвольное $\varepsilon > 0$, мы можем подобрать такое число δ, что для всех точек *x*, лежащих в δ – окрестности точки *a*, соответствующие точки графика функции должны лежать внутри полосы шириной 2ε, ограниченной прямыми $y = b - \varepsilon$ и $y = b + \varepsilon$.

Несложно заметить, что предел функции должен обладать теми же свойствами, что и предел числовой последовательности, а именно $\lim\limits_{x \to a} C = C$ и если при $x \to a$ функция имеет предел, то он единственный.

## 6 ПОНЯТИЕ ПРЕДЕЛА ФУНКЦИИ В БЕСКОНЕЧНО УДАЛЕННОЙ ТОЧКЕ

До сих пор мы рассматривали пределы для случая, когда переменная величина *x* стремилась к определенному постоянному числу.

Будем говорить, что переменная *x стремится к бесконечности*, если для каждого заранее заданного положительного числа *M* (оно может быть сколь угодно большим) можно указать такое значение $x = x_0$, начиная с которого, все последующие значения переменной будут удовлетворять неравенству $|x| > M$.



Например, пусть переменная $x$ принимает значения $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -3$, …, $x_n = (-1)^n n$, … Ясно, что это бесконечно большая переменная величина, так как при всех $M > 0$ все значения переменной, начиная с некоторого, по абсолютной величине будут больше $M$.

Переменная величина $x \to +\infty$, если при произвольном ^ $M > 0$ все последующие значения переменной, начиная с некоторого, удовлетворяют неравенству $x > M$.

Аналогично, $x \to -\infty$, если при любом $M > 0$ $x < -M$.

Будем говорить, что функция $f(x)$ стремится к пределу $b$ при $x \to \infty$, если для произвольного малого положительного числа ε можно указать такое положительное число $M$, что для всех значений $x$, удовлетворяющих неравенству $|x|>M$, выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Обозначают $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$.

**Примеры.**

1. Используя определение, доказать, что $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1$.

Нужно доказать, что при произвольном ε будет выполняться неравенство $\left|\left(1+\frac{1}{x}\right)-1\right| < \varepsilon$, как только $|x|>M$, причем число $M$ должно определяться выбором ε. Записанное неравенство эквивалентно следующему $\left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon$, которое будет выполняться, если $|x|>1/\varepsilon=M$. Это и значит, что $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1$.

2. Несложно заметить, что $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{2^x} = 0$.
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$ не существует

## ТЕМА 3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Правила дифференцирования

Приведем основные правила для нахождения производной:

1. Производная постоянной равна нулю, то есть с' = 0.

2. Производная алгебраической суммы конечного числа дифференцируемых функций равна такой же сумме производных этих функций, то есть

$$u(x)\pm v(x))' = u'(x)\pm v'(x).$$

3. Производная произведения двух дифференцируемых функций равна произведению производной первого сомножителя на второй плюс произведение первого сомножителя на производную второго, то есть

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x)+u(x)v'(x).$$

**Следствие 1.** *Постоянный множитель можно выносить за знак производной:*

$$(cu(x))' = cu'(x).$$

4. Производная частного двух дифференцируемых функций может быть найдена по формуле

$$(u(x)/v(x))' = (u'(x)v(x)-u(x)v'(x))/v2(x)$$

при условии, что $v(x)\neq 0$.

Дифференцирование сложной и обратной функций
Приведем правило по которому можно найти производную сложной функции $y = f(\phi(t))$.

**Теорема 3 (дифференцирование сложной функции).** *Пусть функция $x = \phi(t)$ дифференцируема в точке $t$, а функция $y = f(x)$ дифференцируема в соответствующей точке $x = \phi(t)$. Тогда сложная функция $y = f(\phi(t))$ дифференцируема в точке $t$, причем справедлива формула*

$$(f(\phi(t)))' = f'(x)\phi'(t). \qquad (3)$$

Доказательство. Зададим x = f(t) отличное от нуля приращение D t. Этому приращению отвечает приращение D x = f (t+D t)-f (t) функции x = f(t). Приращению D x отвечает приращение D y = f(x+ D x)-f(x). Так как функция y = f(x) дифференцируема, то ее приращение D y представимо в виде (1):

$$\Delta y =f'(x)\Delta x +\alpha (\Delta x) \Delta x,$$

где $\lim_{\Delta x\to 0}\alpha (\Delta x ) = 0$. Поделив данное выражение на $\Delta t \neq 0$, будем иметь:

$$\Delta y/\Delta t=f'(x)\Delta x/\Delta t+ \alpha (\Delta x)\Delta x/\Delta t.$$

Из дифференцируемости функции $x = \phi (t)$ в точке t вытекает, что

$$\lim_{\Delta t\to 0}\Delta x/\Delta t = \phi'(t).$$

Отметим, что из дифференцируемости функции x = f(t) следует, что D x® 0 при D t® 0. Следовательно, limD t® 0a (D x) =0. Таким образом, получим необходимую формулу (3).

*Пример 5.* Найти y', если y = $5^{\cos x}$.

$$y' = 5^{\cos x}(-\sin x)\ln 5 = -5^{\cos x}\sin x \ln 5.$$

Для нахождения производной обратной функции существует следующее правило, а именно справедлива теорема

**Теорема 4 (производная обратной функции).** *Пусть функция $y = f(x)$ возрастает (или убывает) и непрерывна в некоторой окрестности точки x. Пусть, кроме того, эта функция дифференцируема в точке x и $f'(x) \neq 0$. Тогда в некоторой окрестности соответствующей точки $y = f(x)$ определена обратная функция $x = f^{-1}(y)$, причем обратная функция дифференцируема в точке $x = f^{-1}(y)$ и для ее производной справедлива формула*

$$(f^{-1}(y))' = 1/f'(x).$$

*Доказательство.* Так как функция y = f(x) строго монотонна и непрерывна в некоторой окрестности точки x, то существует обратная функция $x = f^{-1}(y)$, которая является строго монотонной и непрерывной в некоторой окрестности точки y = f(x).

Пусть $\Delta y \neq 0$ приращение для y, а $\Delta x$ - соответствующее приращение обратной функции $x = f^{-1}(y)$. Тогда справедливо равенство

$$\Delta x/\Delta y = 1/(\Delta y/\Delta x).$$

Переходя к пределу в последнем равенстве при $\Delta y \to 0$ и учитывая, что в силу непрерывности обратной функции $\Delta x \to 0$, получим

$$\lim_{\Delta y \to 0} \Delta x/\Delta y = 1/\left(\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y/\Delta x\right).$$

То есть, x'(y) = 1/y'(x).

Доказанная теорема имеет простой геометрический смысл. Пусть *M* –точка графика функции f(x), (рис.22), производная f'(x) равна тангенсу угла наклона $\alpha$ касательной, проходящей через *M,* к оси *OX,* а производная обратной функции $(f^{-1}(y))'$ в соответствующей точке y = f(x) равна тангенсу угла наклона $\beta$ той же самой касательной к оси *OY.* Так как углы наклона $\alpha + \beta = \pi/2$, то формула нахождения производной обратной функции выражает очевидный факт: $\mathrm{tg}\beta = 1/\mathrm{tg}\,\alpha$.

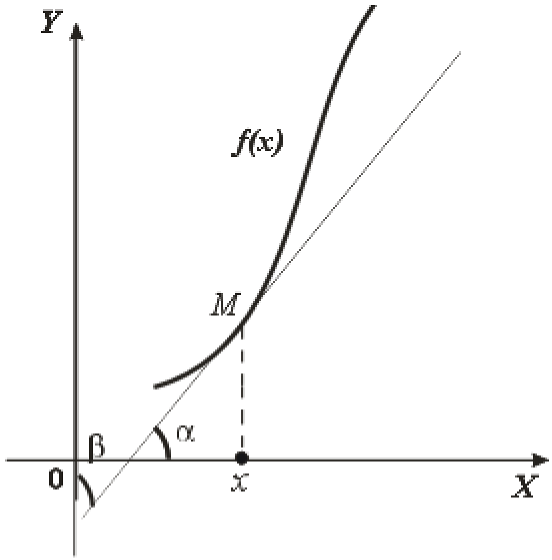



Рис.22

*Пример 6.* Найти $x'_y$, если $y = 2x^3+3x^5+x$ Имеем $y' = 6x^2+15x^4+1$, тогда $x'_y = 1/y'_x = 1/(6x^2+15x^4+1)$.

Таблица производных простейших элементарных функций
Легко получить следующую таблицу производных основных элементарных функций, используя определение производной. Для более подробного изучения данного материала рекомендуем использовать, например, "Математический анализ" ч.1 В.А. Ильина, В.А. Садовничего, Бл.Х. Сендова.

1. $(u^{\alpha}(x))' = \alpha\, u^{\alpha-1}(x)u'(x)$, в частности,

   $$(1/u(x))' = -u'(x)/u2(x),\ (\sqrt{u(x)})' = u'(x)/2\sqrt{u(x)};$$

2. $(\log_a u(x))' = (u'(x)\log_a e)/u(x)$ при $0<a\neq 1$, $u(x)>0$, в частности, $(\ln u(x))' = u'(x)/u(x)$;
3. $(a^{u(x)})' = a^{u(x)}\ln a\, u'(x)$ при $0<a\neq 1$, в частности, $(e^{u(x)})' = u'(x)e^{u(x)}$;
4. $(\sin u(x))' = \cos u(x)u'(x)$;
5. $(\cos u(x))' = -\sin u(x)u'(x)$;
6. $(\mathrm{tg}\, u(x))' = u'(x)/\cos^2 u(x)$ $x\neq \pi/2+\pi n$, $n=0,+-1,...$;
7. $(\mathrm{ctg}\, u(x))' = -u'(x)/\sin^2 u(x)$ $x\neq \pi n$, $n=0,+-1,...$;
8. $(\arcsin u(x))' = u'(x)/\sqrt{1-u^2(x)}$, $-1<u(x)<1$;
9. $(\arccos u(x))' = -u'(x)/\sqrt{1-u^2(x)}$, $-1<u(x)<1$;
10. $(\mathrm{arctg}\, u(x))' = u'(x)/(1+u^2(x))$;
11. $(\mathrm{arcctg}\, u(x))' = -u'(x)/(1+u^2(x))$.

Введем гиперболические функции:

$\mathrm{sh}\, x = (1/2)(e^x-e^{-x})$- *гиперболический синус;*

$\mathrm{ch}\, x = (1/2)(e^x+e^x)$- *гиперболический косинус;*

$\mathrm{th}\, x = \mathrm{sh}\, x/\mathrm{ch}\, x$ -*гиперболический тангенс;*

$\mathrm{cth}\, x = \mathrm{ch}\, x/\mathrm{sh}\, x$ - *гиперболический котангенс.*

Из определения гиперболических функций элементарно вытекают следующие формулы для нахождения их производных.

1. $(\text{sh } x)' = \text{ch } x;$
2. $(\text{ch } x)' = \text{sh } x;$
3. $(\text{th } x)' = 1/\text{ch}^2 x;$
4. $(\text{cth } x)' = -1/\text{sh}^2 x.$

*Пример 7.* Найти y', если

1. $y(x) = x^3 \arcsin x$.

$$y' = 3x^2 \arcsin x + x^3/\sqrt{1-x^2}.$$

2. $y(x) = \ln \sin (x^2+1)$.

$$y' = (2x\cos(x2+1))/\sin(x2+1) = 2x\ ctg(x2+1)$$

*Замечание.* Производная любой элементарной функции является элементарной функцией, то есть операция дифференцирования не выводит из класса элементарных функций.

Производная степенно-показательной функции

Пусть функция $f(x)$ положительна и дифференцируема в точке $x$. Вычислим производную функции $y = \ln f(x)$. Используя правило дифференцирования сложной функции, получим

$$y' = f'(x)/f(x).$$

Это выражение называется *логарифмической производной* $f(x)$. Пусть задана функция $y = f(x)^{g(x)}$, $f(x)>0$, причем $f(x)$, $g(x)$ - дифференцируемые функции в данной точке. Вычислим производную этой функции.

При этих ограничениях функция $z(x) = \ln y(x) = g(x)\ln f(x)$ будет дифференцируемой в силу теоремы о дифференцируемости сложной функции. Используя правило дифференцируемости произведения, найдем

$$(\ln y(x))' = g'(x)\ln f(x)+(g(x)f'(x))/f(x).$$

Или

$$y'(x)/y(x) = g'(x)\ln f(x)+(g(x)f'(x))/f(x).$$

Отсюда

$$y'(x) = (f(x))^g(x)(g'(x)\ln f(x)+(g(x)f'(x))/f(x)).$$

*Пример 8.* Найти y', если $y = (\sin x)^x$. Найдем

$$\ln y = x\ln \sin x,$$

тогда дифференцируя обе части равенства, получим

$$y'/y = \ln \sin x + (x\cos x)/\sin x.$$

Тогда

$$y' = (\sin x)^x(\ln \sin x + (x\cos x)/\sin x).$$

Понятие дифференциала. Геометрический смысл дифференциала. Инвариантность формы первого дифференциала.

Рассмотрим функцию y = f(x), дифференцируемую в данной точке x. Приращение $\Delta$ y ее представимо в виде

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x,$$

где первое слагаемое линейно относительно $\Delta$ x, а второе является в точке $\Delta$ x = 0 бесконечно малой функцией более высокого порядка, чем $\Delta$ x. Если f'(x)$\neq$ 0, то первое слагаемое представляет собой главную часть приращения $\Delta$ y. Эта главная часть приращения является линейной функцией аргумента $\Delta$ x и называется дифференциалом функции y = f(x). Если f'(x) = 0, то дифференциал функции по определению считается равным нулю.

**Определение 5 (дифференциал).** Дифференциалом функции y = f(x) называется главная линейная относительно $\Delta$ x часть приращения $\Delta$ y, равная произведению производной на приращение независимой переменной

$$dy = f'(x)\Delta x.$$

Заметим, что дифференциал независимой переменной равен приращению этой переменной dx = $\Delta$ x. Поэтому формулу для дифференциала принято записывать в следующем виде:

$$dy = f'(x)dx. \qquad (4)$$

Выясним каков геометрический смысл дифференциала. Возьмем на графике функции y = f(x) произвольную точку $M(x,y)$ (рис21.). Проведем касательную к кривой y = f(x) в точке $M$, которая образует угол $\phi$ с положительным направлением оси $OX$, то есть f'(x) = tg $\phi$. Из прямоугольного треугольника $MKN$

$$KN = MNtg\phi = \Delta xtg\,\phi = f'(x)\Delta x,$$

то есть dy = KN.

Таким образом, дифференциал функции есть приращение ординаты касательной, проведенной к графику функции y = f(x) в данной точке, когда x получает приращение $\Delta$ x.

Отметим основные свойства дифференциала, которые аналогичны свойствам производной.

1. $\mathrm{d}\, c = 0$;
2. $\mathrm{d}(c\, u(x)) = c\, \mathrm{d}\, u(x)$;
3. $\mathrm{d}(u(x) \pm v(x)) = \mathrm{d}\, u(x) \pm \mathrm{d}\, v(x)$;
4. $\mathrm{d}(u(x)\, v(x)) = v(x)\, \mathrm{d}\, u(x) + u(x)\mathrm{d}\, v(x)$;
5. $\mathrm{d}(u(x) / v(x)) = (v(x)\, \mathrm{d}\, u(x) - u(x)\, \mathrm{d}\, v(x)) / v^2(x)$.

Укажем еще на одно свойство, которым обладает дифференциал, но не обладает производная. Рассмотрим функцию y = f(u), где u = f (x), то есть рассмотрим сложную функцию y = f(f(x)). Если каждая из функций f и f являются дифференцируемыми, то производная сложной функции согласно теореме (3) равна y' = f'(u)· u'. Тогда дифференциал функции

$$dy = f'(x)dx = f'(u)u'dx = f'(u)du,$$

так как u'dx = du. То есть

$$dy = f'(u)du. \qquad (5)$$

Последнее равенство означает, что формула дифференциала не изменяется, если вместо функции от x рассматривать функцию от переменной u. Это свойство дифференциала получило название *инвариантности формы первого дифференциала.*

Замечание. Отметим, что в формуле (4) dx = D x, а в формуле (5) du яляется лишь линейной частью приращения функции u.

## ТЕМА 4. ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Рассмотрим функцию $f(x)$, определенную на промежутке $(a, b)$ (здесь возможно $a = -\infty,\ b = +\infty$). Дифференцируемая на промежутке $(a, b)$ функция $F(x)$, производная которой в каждой точке равна $f(x)$, называется первообразной функции $f(x)$: $F'(x) = f(x)$. Поскольку $(F(x) + const)' = F'(x) = f(x)$, то можно говорить о семействе первообразных — множестве функций вида $F(x) + const$, $F'(x) = f(x)$. Семейство первообразных $F(x) + const$ функции $f(x)$ называется неопределенным интегралом функции $f(x)$ и обозначается символом $\int f(x)dx$: $\int f(x)dx = F(x) + C$ для всех $x \in (a, b)$. Здесь $\int$ — знак интеграла, $f(x)dx$ — подынтегральное выражение, $f(x)$ — подынтегральная функция, $x$ — переменная интегрирования, $F(x) + C$ — значение неопределенного интеграла, семейство первообразных функции $f(x)$,

$\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x) + C)' = (F(x))' = f(x)$. То есть производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции.

Наоборот, $\int f'(x)dx = f(x) + C$, следовательно, дифференцирование и вычисление неопределенного интеграла, – взаимно обратные операции. Не представляет труда с помощью таблицы производных составить таблицу неопределенных интегралов. Важным свойством неопределенного интеграла является линейность:

$\int (af(x) \pm bg(x))dx = a\int f(x)dx \pm b\int g(x)dx$, здесь $a, b$ - постоянные.

Вычисление неопределенного интеграла обычно сводится к преобразованию подынтегрального выражения так, чтобы можно было воспользоваться таблицей интегралов.

ПРИМЕР 1. Простейшие методы интегрирования

Интегрирование заменой переменной - Если $\varphi(t)$ — непрерывно дифференцируемая функция, то, полагая $x = \varphi(t)$, получим формулу интегрирования заменой переменной $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$. Если замена переменной выбрана правильно, то интеграл в правой части должен легко вычисляться. Для некоторых классов функций существуют стандартные замены, сводящие интеграл к табличному.

ПРИМЕР 2. Замена переменной в неопределенном интеграле

Интегрирование по частям - Пусть $u(x), v(x)$ - непрерывно дифференцируемые функции. Тогда справедлива формула интегрирования по частям $\int udv = uv - \int vdu$. Название "по частям" связано с тем, что для записи интеграла в правой части нужно проинтегрировать "часть" $dv = v'dx$ подынтегрального выражения в левой части.

Метод интегрирования по частям используется для интегралов вида $\int x^n e^x dx$, $\int x^n \sin x dx$, $\int x^n \cos x dx$, $\int \ln^n x dx$ и некоторых других.

## ТЕМА 5. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

**Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла.**

**1. Вычисление пути *s*, пройденного за время *T* телом, движущимся прямолинейно с переменной скоростью**.

$t \in [0, T]$; $v(t)$ – известная зависимость скорости от времени.

Если $v(t)$=const:

$$s = v \cdot T.$$

**Если *v*(*t*) переменная:**

- **разобьем отрезок времени [0, *T*] точками**

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_{n-1} < t_n = T \;;$$

- **на каждом отрезке $[t_{i-1}, t_i]$ ($i$=1, 2, , $n$) скорость будем считать постоянной, равной ее истинному значению $v(t_i^*)$ в некоторой точке $t_i^* \in [t_{i-1}, t_i]$.**

- $\forall i \quad s_i \approx v(t_i^*) \cdot \Delta t_i$ **– путь, пройденный за время $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$.**
- **весь путь**

$$s = \sum_{i=1}^{n} s_i \approx \sum_{i=1}^{n} v(t_i^*) \cdot \Delta t_i \, .$$

**Заложенная ошибка будет уменьшаться, если $v(t)$ непрерывна, а максимальная длина отрезков $[t_{i-1}, t_i]$ стремится к нулю.**

**2. Вычисление массы прямолинейного стержня длины $L$ с переменной плотностью $\rho(l)$.**

Сечение стержня считаем постоянным, с площадью 1.

$l \in [0, L]$, $\rho(l)$ = известная зависимость линейной плотности от длины.

Если $\rho(l)$ =const:

$$m = \rho L.$$

**Если $\rho(l)$ переменная:**

- **разобьем отрезок $[0, L]$ точками**

$$0 = l_0 < l_1 < l_2 < \ldots < l_{n-1} < l_n = L \, ;$$

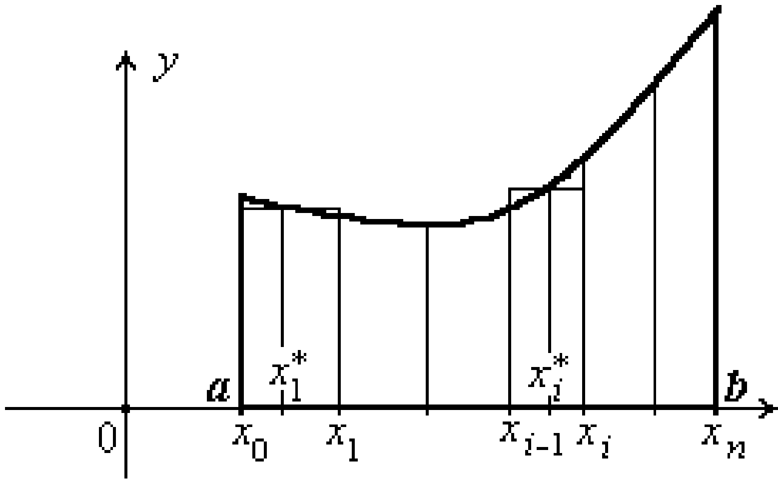
- **на каждом отрезке $[l_{i-1}, l_i]$ ($i$=1, 2, , $n$) плотность будем считать постоянной, равной ее истинному значению $\rho(l_i^*)$ в некоторой точке $l_i^* \in [l_{i-1}, l_i]$.**

- $\forall i \quad m_i \approx \rho(l_i^*) \cdot \Delta l_i$ **– масса части стержня для $l \in [l_{i-1}, l_i]$,**
  $\Delta l_i = l_i - l_{i-1};$.

- **масса всего стержня**

$$m = \sum_{i=1}^{n} m_i \approx \sum_{i=1}^{n} \rho(l_i^*) \cdot \Delta l_i .$$

**Заложенная ошибка будет уменьшаться, если ρ(*l*) непрерывна, а максимальная длина отрезков [$l_{i-1}$, $l_i$] стремится к нулю.**




**3. Вычисление площади криволинейной трапеции**, ограниченной сверху кривой $y=f(x)$, снизу осью абсцисс, справа и слева прямыми $x=a$, $x=b$.

Если $y = h$ =const,

$$S = h\,(b - a).$$

**Если $h = f(x)$ – переменная:**

- **разобьем отрезок [*a, b*] точками**

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b\,;$$

- **на каждом отрезке [$x_{i-1}$, $x_i$] ($i$=1, 2, , *n*) высоту будем считать постоянной, равной ее истинному значению $f(x_i^*)$ в некоторой точке $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$.**

- $\forall i$ $\quad S_i \approx f(x_i^*) \cdot \Delta x_i$ **– площадь части области при** $x \in [x_{i-1}, x_i]$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$;

- **вся площадь**

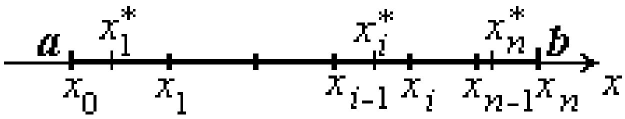
$$\sum_{i=1}^{n} S_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \cdot \Delta x_i .$$

**Заложенная ошибка будет уменьшаться, если $f(x)$ непрерывна, а максимальная длина отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ стремится к нулю.**

**Определение и условия существования определенного интеграла Римана.**
Пусть $f(x)$ определена на отрезке $[a; b]$.

- **Разобьём $[a; b]$ точками на $n$ частей:**

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b\,.$$




- $\forall$ **$i=1, 2, \ \ , n$ выберем $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$.**
- **Составим интегральную сумму**

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i, \quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1}.$$

**Определение. Определенным интегралом Римана от функции $f(x)$ по отрезку $[a; b]$ называется число**

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i\,,$$

где $\delta$ – **максимальная длина отрезков $[x_{i-1}, x_i]$, $i=1, 2, \ldots, n$, если этот предел существует, не зависит от способа разбиения отрезка и от выбора точек $x_i^*$.**

При этом $f(x)$ будем называть **интегрируемой** по отрезку $[a, b]$.

**Замечание 1. Как следствие условия $\delta \to 0$ получаем $n \to \infty$** (но не наоборот).

**Дополним определение** интеграла следующими двумя положениями:

$$\int_a^a f(x)dx = 0;$$

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx \quad (a < b).$$

(при движении от $b$ к $a$ все $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ меняют знак).

**Замечание 2.** Обозначение переменной интегрирования не имеет значения:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = \dots.$$

**Достаточные условия существования** интеграла Римана:

– непрерывность функции $f(x)$ на $[a; b]$,
– кусочная непрерывность $f(x)$ на $[a; b]$ (наличие конечного числа разрывов I рода).
– монотонность и ограниченность.

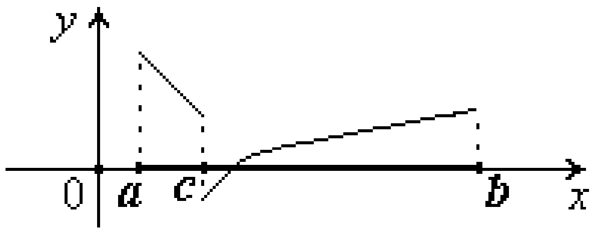
**Замечание 3.** В случае разрыва «скачок» в точке $c \in [a; b]$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

**Замечание 4. Интегрируемая функция $f(x)$ ограничена на $[a; b]$. Для неограниченной функции интеграл Римана не существует.**

**Свойства определенного интеграла Римана**

$$\int_a^b f(x)dx \quad (a < b).$$




1. $f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_a^b 0\,dx = 0;$

$f(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad \int_a^b dx = b - a.$

**2. Линейность.** Если $f(x)$, $g(x)$ интегрируемs на $[a, b]$, то

$$\int_a^b (Af(x)+Bg(x))dx = A\int_a^b f(x)dx + B\int_a^b g(x)dx.$$

(следует из линейности суммы и предельного перехода)

**3. Аддитивность.** Если $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$ и $c\in(a, b)$, то

$$\boldsymbol{\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.}$$

**Доказательство.** Рассмотрим такие разбиения отрезка $[a, b]$, где одной из точек $x_i$ является точка $c$.

$$\sum_{i=1}^n f(x_i^*)\Delta x_i = \sum_{x_i\le c} f(x_i^*)\Delta x_i + \sum_{x_i\ge c} f(x_i^*)\Delta x_i.$$

При $\delta\to 0$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

**4.** Если $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$ и $f_1(x) = f(x)$ для всех $x\in[a; b]$ за исключением конечного числа точек, то

$$\int_a^b f_1(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

(**интеграл Римана не замечает изменения функции в конечном числе точек**).

**Доказательство.** Изменяя $f(x)$ в <u>конечном числе точек</u>, в интегральной сумме изменим <u>конечное число слагаемых</u>, но при $\delta\to 0$ их вклад в сумму стремится к нулю (так как $f(x)$ ограничена).

**Свойства, связанные с оценкой интеграла с помощью неравенств** (функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a, b]$):

**5.1.** $\forall x \in [a, b] \quad f(x) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \int\limits_a^b f(x)dx \geq 0.$

**5.2.** $\forall x \in [a, b] \quad f(x) \leq g(x) \quad \Rightarrow \quad \int\limits_a^b f(x)dx \leq \int\limits_a^b g(x)dx.$

**5.3.** $\forall x \in [a, b] \quad m \leq f(x) \leq M$

$$\Rightarrow \qquad m(b-a) \leq \int\limits_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

**5.4.** $\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \leq \int\limits_a^b |f(x)|dx.$

**5.5.** $\forall x \in [a, b] \quad |f(x)| \leq M \quad \Rightarrow \quad \left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \leq M(b-a).$

**Доказательство.** Исходим из определения:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\delta\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i.$$

Свойство **5.1.** очевидно, так как при $a < b$ множители $\Delta x_i$ положительны. Предельный переход сохраняет неравенство:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\delta\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i \geq 0.$$

**5.2** следует из 5.1. и линейности интеграла:

$$f(x)\le g(x) \quad\Rightarrow\quad g(x)-f(x)\ge 0 \quad\Rightarrow\quad \int_a^b (g(x)-f(x))dx \ge 0;$$

$$\int_a^b (g(x)-f(x))dx = \int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx \quad\Rightarrow\quad \int_a^b g(x)dx \ge \int_a^b f(x)dx.$$

**5.3.**

$$m \le f(x) \le M \quad\Rightarrow\quad \int_a^b m dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b M dx \quad\Rightarrow$$

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

**5.4**.

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i\right| \le \sum_{i=1}^{n} |f(x_i^*)|\Delta x_i \quad\Rightarrow$$

$$\lim_{\delta\to 0}\left|\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i\right| \le \lim_{\delta\to 0}\sum_{i=1}^{n} |f(x_i^*)|\Delta x_i;$$

$$\Rightarrow \quad \left|\lim_{\delta\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i\right| \le \lim_{\delta\to 0}\sum_{i=1}^{n} |f(x_i^*)|\Delta x_i$$

(использовалась непрерывность модуля)

$$\Rightarrow \quad \left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx.$$

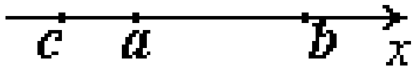
**5.5.**

$$|f(x)| \le M \quad \Rightarrow \quad \left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx \le M(b-a)$$
.

**Замечание 1.** Свойства 2, 3 и 4 остаются справедливыми и при $a > b$, при этом $c \in (b, a)$.

**Замечание 2.** Свойство 3 можно формулировать при любом взаимном расположении точек $a$, $b$, $c$, если функция интегрируема на большем промежутке.

Например,




$$\int_c^b f(x)dx = \int_c^a f(x)dx + \int_a^b f(x)dx = -\int_a^c f(x)dx + \int_a^b f(x)dx.$$

$$\Rightarrow \qquad \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

**Замечание 3. Свойства 5 при $a > b$ перестают быть верными**.

Можно переформулировать. Например, (5.5):

$$|f(x)| \le M \quad \Rightarrow \quad \left|\int_a^b f(x)dx\right| \le M\,|b-a|.$$

**Теорема о среднем значении.**
**Определение.** Число

$$f_{\text{ср}} = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$$

называется **средним значением** интегрируемой функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

**Теорема.** Если $f(x)$ **непрерывна** на $[a, b]$, то в некоторой точке с этого отрезка она

**принимает свое среднее значение**:

$$\exists\, c\in[a, b]:\quad f(c) = \frac{\int\limits_a^b f(x)dx}{b-a} \quad \text{или} \quad \int\limits_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

**Доказательство.** Значения непрерывной функции на отрезке $[a, b]$ образуют отрезок $[m, M]$, где $m$ и $M$ наименьшее и наибольшее значения.

По свойству 5.3

$$m(b-a)\le\int\limits_a^b f(x)dx\le M(b-a)$$

$\Rightarrow$

$$m\le\frac{\int\limits_a^b f(x)dx}{b-a}\le M \quad \text{т.е.} \quad f_{\text{ср}}\in[m, M].$$

$\Rightarrow$это промежуточное значение принимается функцией в некоторой точке отрезка.

**Замечание. Разрывная интегрируемая функция может не принимать свое среднее значение ни в одной точке отрезка**.

**Пример.**

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in[1,2],\\ 2, & x\in(2,3]\end{cases}$$

Вычислим среднее значение.

$$\int\limits_1^3 f(x)dx=\int\limits_1^2 f(x)dx+\int\limits_2^3 f(x)dx=$$

$$=\int\limits_1^2 1dx+\int\limits_2^3 2dx=\int\limits_1^2 dx+2\int\limits_2^3 dx=(2-1)+2(3-2)=3$$

;

$\Rightarrow$ $$f_{\text{ср}}=\frac{\int\limits_1^3 f(x)dx}{3-1}=\frac{3}{2}.$$

На отрезке [1, 3]  среднее значение  не принимается ни в одной точке.

## ТЕМА 6. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

***Понятие непрерывности.***

Пусть функция определена в некоторой окрестности точки **а**.

**<u>Определение.</u>** Функция *f(x)* называется *непрерывной в точке а, ес*ли $\lim_{x \to a} f(x)$ = f (a), т.е. предел функции в точке а равен значению функции в этой точке.

Функция, непрерывная в каждой точке интервала, называется *непрерывной на этом интервале*.

**<u>Определение.</u>** Пределом функции f (x) в точке а слева (соответственно справа) называется предел, вычисляемый в предположении, что х стремится к точке а оставаясь все время меньше (соответственно больше) значения а.

Обозначают

$\lim_{x \to a-0} f(x)$ или f (a-0) и называют односторонним пределом слева;

( соответственно

$\lim_{x \to a+0} f(x)$ или f (a+0) называют односторонним пределом справа).

**<u>Определение.</u>** Пусть функция f (x) определена в правой (левой) полуокрестности точки а, т. е. на некотором полуинтервале [a, a + ε) (соответственно (a-ε, a]. Функция f (x) называется непрерывной справа (соответственно слева) в точке а, если f (a + 0) = f (a) (соответственно f (a – 0)=f (a) ).

**<u>Теорема.</u>**

Для того чтобы функция была непрерывна в точке а,
необходимо и достаточно, чтобы она была непрерывна в этой точке справа и слева, т.е. f (a+0)=f (a)=f (a -0).

## *1.2. Основные теоремы о непрерывности.*

**Теорема 1.**

Если функции f(x) и g(x) непрерывны в точке a,
то функции f(x)+g(x), f(x)-g(x), f(x)g(x), f(x)/g(x) также
непрерывны в точке a (частное — при условии $g(a) \neq 0$).

**Теорема 2.**

Если функция u=g(x) непрерывна в точке a, а функция y=f(u) непрерывна в точке $u_0$ =g(a), то сложная функция y=f(g(x)) непрерывна в точке a.

**Теорема 3.**

Если f (x) непрерывная функция, имеющая однозначную обратную функцию, то обратная функция тоже непрерывна.

**Теорема 4.**

Функция f (x), непрерывная в точке a , не равная нулю в этой точке,
сохраняет знак f(a) в некоторой окрестности этой точки.

3.

## *Классификация точек разрыва.*

Пусть a — предельная точка области определения функции f(x). Точка a называется *точкой разрыва* функции f(x), если f(x) в этой точке не является непрерывной, т.е. нарушается равенство

f (a+0)=f (a)=f (a -0).

Приведем классификацию точек разрыва функции ввиде схемы.

^

**ТОЧКИ РАЗРЫВА ФУНКЦИИ**

**I рода  I I рода**

( существуют, конечны ( хотя бы один из односторонних

оба односторонних предела) пределов равен бесконечности

или вообще не существует)

**устранимый конечный**

**разрыв скачок**

(существуют, конечны, (существуют, конечны,

равны между собой оба но не равны между

односторонних предела, собой односторонние

но не равны значению пределы)

функции).

**<u>Пример.</u>**

Исследовать функцию на непрерывность, указать характер точек разрыва и построить график:

$$f(x)=\begin{cases}-x^2+1,\ x\le 0,\\ 2-x,\ 0<x\le 2,\\ \dfrac{1}{x-2},\ x>2.\end{cases}$$

Решение.

Областью определения функции *f (x)* является множество R всех действительных чисел. На каждом их промежутков (-$\infty$ ;0), (0;2), (2;+$\infty$ ) она является элементарной функцией, поэтому будет непрерывной в этих промежутках.

Так как при переходе через точки x=0 и x=2 функция меняет свое аналитическое выражение, то в этих точках ( и только в них) возможны разрывы. Исследуем функцию *f(x)* на непрерывность в этих точках. Для этого найдем односторонние пределы функции в точках x=0 и x=2 и сравним их со значениями функции в этих точках.

1) если x=0, то

$$\lim_{x\to 0-0} f(x)=\lim_{x\to 0-0}(-x^2+1)=1;,$$

$$\lim_{x\to 0+0} f(x)=\lim_{x\to 0+0}(2-x)=2;$$

$$f(0)=-0^2+1=1.$$

Значит, функция *f(x)* в точке x=0 слева непрерывна, справа терпит разрыв первого рода (конечный скачок).

2) если x=2, то

$$\lim_{x\to 2-0} f(x)=\lim_{x\to 2-0}(2-x)=0;,$$

$$\lim_{x\to 2+0} f(x)=\lim_{x\to 2+0}\frac{1}{x-2}=+\infty;$$

$$f(2)=2-2=0.$$

Следовательно, функция *f(x)* в точке x=2 слева непрерывна, справа терпит разрыв второго рода.

### ТЕМА 7. ДВОЙНОЙ И ТРОЙНОЙ ИНТЕГРАЛЫ

Мы будем рассматривать функции $f(x,y)$, определенные на квадрируемом (т.е. имеющем площадь) множестве $D$. Если вспомнить теорию определенного интеграла, то мы начинали ее изложение с понятия разбиения $T$ отрезка $[a;b]$. По аналогии, определим разбиение $T$ квадрируемого множества $D$, как представление множества $D$ в виде объединения конечного числа квадрируемых частей, $D=\bigcup_{i=1}^{n} D_i$.

(Практически всегда $D$ представляет собой криволинейную трапецию или конечное объединение криволинейных трапеций. Можно считать, что и разбиение $D$ на части $D_i$ определяется с помощью непрерывных кривых, т.е. все $D_i$ - также криволинейные трапеции или их конечные объединения).

В одномерном случае мы рассматривали длины частей разбиения $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$. В двумерном случае обобщение понятия длины $\Delta x_i$ будет площадь $\Delta S_i$. Однако нам потребуется также и понятие *диаметра* $D_i$, $diam(D_i)$. Эта величина определяется как точная верхняя грань расстояния между точками множества $D_i$.

Определим диаметр $d(T)$ разбиения $T$ как наибольший из диаметров $diam(D_i)$ частей этого разбиения.

Далее, как и в одномерном случае, выберем точки $N_i \in D_i$ (было: $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$). Пусть $N_i$ имеет координаты $(\xi_i, \eta_i)$. Важную роль в дальнейшем будет играть понятие *интегральной суммы* $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta S_i = \sigma(f, T, \{N_i\})$. Так же, как в одномерном случае, эта величина имеет простой геометрический смысл. Интегральная сумма $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta S_i$ равна объему тела, состоящего из цилиндров с высотой $f(\xi_i, \eta_i)$ (для простоты считаем, что $f(x,y) \geq 0$) и основаниями - $D_i$.

**<u>Определение.</u>** Пусть $f(x,y)$ - ограниченная на квадрируемом множестве $D$ функция. Пусть $I \in \mathbf{R}$. Если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall T : d(T) < \delta\ \forall \{N_i\}\ |\sigma(f, T, \{N_i\}) - I| < \varepsilon$, то будем говорить, что $f$ - интегрируемая на $D$ функция и $I = \iint_D f(x,y)dxdy$.

**<u>Замечание.</u>** Это определение несколько отличается от одномерного, в котором отсутствовало требование ограниченности функции $f(x)$. Мы тогда <u>доказывали</u>

необходимое условие интегрируемости: если $f(x)$ интегрируема на $[a;b]$, то $f(x)$ ограниченна на $[a;b]$.

В двумерном случае мы накладывали это требование для того, чтобы избежать ненужных сложностей.

Критерий существования $\int_a^b f(x)dx$ формировался в терминах *сумм Дарбу* вида $s(T)=\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i$, $S(T)=\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i$, где $m_i=\inf\limits_{x\in[x_{i-1};x_i]} f(x)$, $M_i=\sup\limits_{x\in[x_{i-1};x_i]} f(x)$, т.е. $m_i$ - нижняя грань, а $M_i$ - верхняя грань значений $f(x)$ при $x\in[x_{i-1};x_i]$.

Аналогично, обозначим, для ограниченной на $D$ функции $f(N)$ $m_i=\inf\limits_{N\in D_i} f(N)$, $M_i=\sup\limits_{N\in D_i} f(N)$ (эти числа существуют ввиду предполагаемой ограниченности $f(N)$ на $D$ и, значит, на всех $D_i$) и определим суммы Дарбу равенствами $s(T)=\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta S_i$, $S(T)=\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta S_i$. Эти величины представляют собой объемы тел, состоящих из цилиндров с основаниями $D_i$ и высотами, соответственно $m_i$ и $M_i$. Ясно, что при любом выборе $\{N_i\}$ $s(T)\le \sigma(f,T,\{N_i\})\le S(T)$.

Вполне аналогично одномерному случаю можно доказать критерий интегрируемости.

**<u>Теорема.</u>** Ограниченная $f(x,y)$ интегрируема на квадрируемом $D\Leftrightarrow$
$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta\ \forall T\ \ d(T)<\delta\quad S(T)-s(t)<\varepsilon$

(На экзамене ограничиваемся формулировкой).

Из этого критерия следует теорема.

**<u>Теорема.</u>** Если $f(x,y)$ непрерывна на квадрируемом множестве $D$, то $f(x,y)$ интегрируема на этом множестве.

(На экзамене достаточно формулировки).

**Свойства двойных интегралов**

**<u>Свойство 1.</u>** Если $f_1, f_2$ - интегрируемые на $f_1f_2$ функции, а $D$ - числа, то $\iint_D(\alpha_1 f_1+\alpha_2 f_2)dxdy=\alpha_1\iint_D f_1dxdy+\alpha_2\iint_D f_2dxdy$. Иными словами, <u>интеграл – линейный функционал.</u>

**Свойство 2.** Если $f$ - интегрируема на $D_1 \bigcup D_2$, причем если площадь пересечения $D_1 \bigcap D_2$ равна 0, то $\iint\limits_{D_1 \bigcup D_2} f dxdy = \iint\limits_{D_1} f dxdy + \iint\limits_{D_2} f dxdy$.

**Свойство 3.** Если $f$ - интегрируемая на $D$ функция и $f \geq 0$, то $\iint\limits_{D} f dxdy \geq 0$.

**Свойство 4.** Если $f_1, f_2$ - интегрируемые на $f_1 f_2$ и $f_1 \geq f_2$, то $\iint\limits_{D} f_1 dxdy \geq \iint\limits_{D} f_2 dxdy$.

**Свойство 5.** Если $f$ - интегрируемая на $D$ функция, то $|f|$ - также интегрируемая, причем $\left| \iint\limits_{D} f dxdy \right| \leq \iint\limits_{D} |f| dxdy$.

**Свойство 6.** Если $f$ - интегрируемая на $D$ функция, причем $m \leq f \leq M$, где $m, M$ - ограничивающие множество значений $f$ числа, то $m \cdot S(D) \leq \iint\limits_{D} f dxdy \leq M \cdot S(D)$ ($S(D)$ - площадь $D$), т.е. $\exists \mu,\ m \leq \mu \leq M$ : $\iint\limits_{D} f dxdy = \mu \cdot S(D)$. Если, кроме того, $f$ - непрерывна на $D$, то $\exists (\xi, \eta) \in D : \iint\limits_{D} f dxdy = f(\xi, \eta) \cdot S(D)$.

Доказывать эти свойства мы не будем – они вполне аналогичны свойствам обычного интеграла.

Можно доказать, что если $f$ - непрерывная на $D$ функция, то $f$ - интегрируема на $D$.

Свойство 2 позволяет утверждать, что если $f$ имеет разрывы на $D$ лишь вдоль конечного числа непрерывных линий, разбивающих $D$ на квадрируемые области, то $f$ - интегрируема на $D$, т.к., по свойству 2, интеграл по $D$ есть просто сумма конечного числа интегралов по полученным частям $D_i$ (где $f$ - непрерывна и, значит, интегрируема).

## ТЕМА 8. РЯДЫ

1. *Понятие сходимости числового ряда*

Пусть $\{a_n\} \in R$ – последовательность действительных чисел,

$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - *числовой ряд* (1).

Составим последовательность частичных сумм:

$S_1 = a_1$,

$S_2 = a_1 + a_2$,

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$,

..........................

$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$,

..........................

$\{a_n\} \to \{S_n\}$ – *последовательность частичных сумм*

Если для ряда (1) существует предел последовательность частичных сумм при $n \to \infty$, равный числу $S \in R$, то ряд называется *сходящимся*, а число $S$ – его сумма. В противном случае ряд (1) называется *расходящимся*.

Пример. Исследовать сходимость и найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

Составляем последовательность частичных сумм:

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

2. *Свойства сходящихся рядов*

$S_n, S, S - S_n = r_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k$ – *остаток сходящегося ряда*, $\{r_n\}$ – *последовательность остатка.*

1. Необходимое условие сходимости: частичные суммы сходящегося ряда – ограничены: $\exists M > 0 \forall n \in N : |S_n| \le M$ (это вытекает из того, что сходящаяся последовательность ограничена).

Приведём пример ряда, у которого частичные суммы ограничены, а сам ряд будет расходиться:

$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$

$$\left.\begin{array}{l} S_{2k} = 0 \xrightarrow{k\to\infty} 0, \\ S_{2k+1} = 1 \xrightarrow{k\to\infty} 1 \end{array}\right| \Rightarrow \nexists \lim_{n\to\infty} S_n$$

2. Необходимое условие сходимости: у сходящегося ряда предел общего члена равен нулю $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

**Доказательство.** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = S - S = 0.$ Доказано.

Рассмотрим пример расходящегося ряда, для которого $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}, \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

$$S_n = \underbrace{1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}}_{n\ \text{слагаемых}} \ge \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} = n\frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \to \infty -$$

неограниченная, наименьшее слагаемое $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Пример. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin n$ – расходится, т.к. $\nexists \lim\limits_{n\to\infty} \sin n \ne 0.$

Предположим, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sin n = 0$, $\sin n = \sin((n-1)+1) = \sin(n-1)\cos 1 + \cos(n-1)\sin 1 \Rightarrow$

$\lim\limits_{n\to\infty} \cos n = 0 \Rightarrow \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\cos^2 n} + \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\sin^2 n} = 1$ – противоречие.

3. Необходимое условие сходимости: у сходящегося ряда $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0.$

**Доказательство.** $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = \lim\limits_{n\to\infty}(S - S_n) = S - S = 0.$ Доказано.

4. Сходимость ряда не нарушится, если добавить или отбросить конечное число слагаемых.
5. Множество сходящихся радов образуют линейное пространство:

если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a, \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = b, c \in R \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = a + b, \sum\limits_{n=1}^{\infty} ca_n = ca.$

6. Критерий Коши: ряд (1) сходится $\Leftrightarrow \{S_n\}$ – фундаментальная, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 \forall n > m > N : |S_n - S_m| = \left|\sum\limits_{k=m+1}^{n} a_k\right| < \varepsilon.$

Пример. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ – гармонический ряд (расходящийся).

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} \approx \ln n \ (\exists A, B > 0,\ A\ln n \le S_n \le B\ln n),$$

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}}(S_n - S_m) = 0$$

$$S_{2n} - S_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} \ge$$

$\ge n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \not\to 0 \ (n \to \infty)$, т.е. не выполнен критерий Коши, ряд расходится.

$$\left.\begin{matrix}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\end{matrix}\right\} - \textit{обобщённые гармонические ряды}$$

$$f(p) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p} = \begin{cases} p \le 1 - \textit{расходится},\ p \le 0 : a_n \not\to 0;\ 0 < p < 1 : \textit{аналогично при}\ p = \frac{1}{2}\\ p > 1 - \textit{сходится}\end{cases}$$

$p = x + iy - \xi$ -функция Римана

Задача. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n$ – сумма бесконечной геометрической прогрессии. Доказать, что при $|q| < 1$ряд сходится, $S(q) = \frac{1}{1-q}$.

$$S_{n+1} = \frac{(1 + q + \ldots + q^n)(1-q)}{1-q} = \frac{1 - q^{n+1}}{1-q}, q \ne 1.$$

Решение.

$$S_{n+1} = 1 + q + \ldots + q^n = \begin{cases} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}, q \ne 1 \to \begin{cases}\dfrac{1}{1-q}, |q| < 1,\\ \nexists \lim, |q| > 1, q = -1,\end{cases}\\ n+1, q = 1 \to \infty\ (n \to \infty).\end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}, |q| < 1.$$