ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2003 МАТЕМАТИКА № 8 (495)

УДК 512.532

Б.М. ВЕРНИКОВ

КВАЗИТОЖДЕСТВА В МОДУЛЯРНЫХ РЕШЕТКАХ МНОГООБРАЗИЙ ПОЛУГРУПП

Исследованию тождеств в решетках многообразий полугрупп посвящено большое число работ. Однако вопрос о квазитождествах (не обязательно являющихся тождествами) в этих решетках до недавнего времени в литературе не рассматривался. Ряд результатов, относящихся к указанному вопросу, получен в работах [1], [2]. В данной работе продолжается исследование квазитождеств в решетках многообразий полугрупп.

В [3] анонсировано полное описание многообразий полугрупп с модулярной решеткой подмногообразий. Доказательство этого результата "по модулю ниль-случая" опубликовано в [4]–[7]. Доказательство в ниль-случае остается пока неопубликованным, но в настоящее время готовится к печати цикл статей автора и М.В. Волкова, в котором будут доказаны некоторые более общие результаты. Подходы, развитые в [4]–[6], позволяют получить существенную информацию о многообразиях полугрупп, решетка подмногообразий которых принадлежит произвольному наперед заданному квазимногообразию модулярных решеток. Точнее, задача описания таких многообразий фактически сведена в указанных работах к рассмотрению двух частных случаев: многообразий полугрупп с вполне регулярным квадратом (т. е. многообразий, в которых квадрат всякой полугруппы есть вполне регулярная полугруппа) и нильмногообразий (т. е. многообразий, состоящих из нильполугрупп). Это позволяет сформулировать следующую задачу: *для произвольного нетривиального квазимногообразия модулярных решеток* $\mathbf{L}$ *описать многообразия полугрупп, решетка подмногообразий которых принадлежит* $\mathbf{L}$.

Решение указанной задачи в общем случае должно было бы включать в себя, в частности, ее решение для многообразий, состоящих из вполне регулярных полугрупп. Но здесь остается пока неразобранным даже тот простейший случай, когда в качестве $\mathbf{L}$ выступает многообразие всех дистрибутивных решеток. Поэтому ставить вопрос о полном решении сформулированной задачи пока преждевременно. Однако степень ее общности столь велика, что ее решение даже в том или ином классе многообразий полугрупп представляет значительный интерес. Из сказанного ясно, что многообразия, для которых следует прежде всего попытаться решить эту задачу, должны быть в каком-то смысле далеки от многообразий вполне регулярных полугрупп, а значит, и от многообразий групп.

К настоящему времени обсуждаемая задача решена автором для *комбинаторных* многообразий полугрупп, т. е. многообразий, в которых все группы тривиальны. Целью данной работы является изложение этого решения.

Хорошо известно, что класс Mod всех квазимногообразий модулярных решеток континуален (напр., [8] или [9]). Оказывается, однако, что применительно к решеткам подмногообразий комбинаторных многообразий полугрупп имеется лишь конечное число "различных" квазимногообразий из класса Mod. А именно, этот класс можно разбить на шесть подклассов, каждый

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 01-01-00258, и межвузовской научной программы "Университеты России — фундаментальные исследования" Министерства образования Российской Федерации (проект № 04.01.059).

из которых состоит из квазимногообразий, неразличимых для решеток подмногообразий комбинаторных многообразий полугрупп.

Пусть k и n — произвольные натуральные числа. Обозначим через M_k решетку, состоящую из нуля, единицы и k атомов, а через $M_{k,n}$ — решетку, изображенную на рис. 1. Квазимногообразия, порожденные решетками M_k и $M_{k,n}$, обозначим через $\mathbf{M}_k$ и $\mathbf{M}_{k,n}$ соответственно. Хорошо известно, что $\mathbf{M}_k$ в действительности является многообразием (напр., [9], теорема 5.1.29). Через **DIS** будем обозначать многообразие всех дистрибутивных решеток.

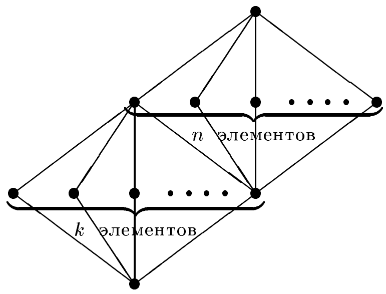

Рис. 1.

Введем следующее отношение μ на классе всех нетривиальных квазимногообразий модулярных решеток: если $\mathbf{L}_1$ и $\mathbf{L}_2$ — два таких квазимногообразия, то $\mathbf{L}_1 \, \mu \, \mathbf{L}_2$, если решетка подмногообразий произвольного комбинаторного многообразия полугрупп лежит в $\mathbf{L}_1$ тогда и только тогда, когда она лежит в $\mathbf{L}_2$. Ясно, что μ — отношение эквивалентности. Классы этого отношения описывает

Предложение 1 ([10]). *Следующие классы квазимногообразий модулярных решеток, и только они, являются μ-классами*:

1) $\{\mathbf{L} \mid \mathbf{M}_{4,3} \subseteq \mathbf{L}\}$;
2) $\{\mathbf{L} \mid \mathbf{M}_{3,3}, \mathbf{M}_4 \subseteq \mathbf{L}$, *но* $\mathbf{M}_{4,3} \nsubseteq \mathbf{L}\}$;
3) $\{\mathbf{L} \mid \mathbf{M}_{3,3} \subseteq \mathbf{L}$, *но* $\mathbf{M}_4 \nsubseteq \mathbf{L}\}$;
4) $\{\mathbf{L} \mid \mathbf{M}_4 \subseteq \mathbf{L}$, *но* $\mathbf{M}_{3,3} \nsubseteq \mathbf{L}\}$;
5) $\{\mathbf{L} \mid \mathbf{M}_3 \subseteq \mathbf{L}$, *но* $\mathbf{M}_4, \mathbf{M}_{3,3} \nsubseteq \mathbf{L}\}$;
6) $\{\mathbf{DIS}\}$.

Предложение 1 показывает принципиальную возможность решения обсуждаемой задачи; все последующие результаты будут опираться на это предложение.

Отметим, что класс комбинаторных многообразий полугрупп включает в себя, в частности, все нильмногообразия. Ниже через $L(\mathcal{X})$ обозначается решетка подмногообразий многообразия $\mathcal{X}$. Из результатов работ [4]–[6] вытекает следующее предложение, которое сводит решение задачи для комбинаторных многообразий к случаю нильмногообразий.

Предложение 2. *Пусть $\mathbf{L}$ — нетривиальное квазимногообразие модулярных решеток. Решетка подмногообразий комбинаторного многообразия полугрупп $\mathcal{V}$ принадлежит $\mathbf{L}$ тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий*:

1) *$\mathcal{V}$ удовлетворяет либо тождеству $xy = (xy)^2$, либо системе тождеств $xy = x^2y$, $(xy)^2 = xy^2$, $xyzt = xyxzt$, либо системе тождеств, двойственной к предыдущей*;
2) *$\mathcal{V} = \mathcal{C} \vee \mathcal{M}$, где $\mathcal{C}$ — многообразие, заданное тождествами $x^2 = x^3$, $xy = yx$, а $\mathcal{M}$ — нильмногообразие, удовлетворяющее тождествам $x^2y = xyx = yx^2 = 0$, и такое, что $L(\mathcal{M}) \in \mathbf{L}$*;
3) *$\mathcal{V} = \mathcal{F} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{F}$ — либо тривиальное многообразие, либо многообразие всех полурешеток, а $\mathcal{N}$ — нильмногообразие такое, что $L(\mathcal{N}) \in \mathbf{L}$.*

Описание нильмногообразий с модулярной решеткой подмногообразий является частным случаем результатов работы [3]. Нильмногообразия с дистрибутивной решеткой подмногообразий описаны в [11] (более простое и компактное доказательство этого результата см. в [12]). Остается описать нильмногообразия, решетка подмногообразий которых принадлежит квазимногообразиям, указанным в пп. 2)–5) предложения 1.

Тождество вида $x_1x_2x_3 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}$, где π — перестановка на множестве $\{1, 2, 3\}$, будем для краткости обозначать через $p_3[\pi]$. Для квазимногообразий из п. 5) предложения 1 требуемое описание дает

Теорема. *Пусть* $\mathbf{L}$ — *квазимногообразие модулярных решеток, содержащее* $\mathbf{M}_3$*, но не содержащее ни* $\mathbf{M}_4$*, ни* $\mathbf{M}_{3,3}$*. Решетка подмногообразий нильмногообразия полугрупп* $\mathcal{V}$ *принадлежит* $\mathbf{L}$ *тогда и только тогда, когда* $\mathcal{V}$ *удовлетворяет одной из следующих систем тождеств*:

$$
\begin{aligned}
&p_3[\pi],\ x^2y = y^2x,\ x^2y^2 = 0,\ \text{где } \pi \in \{(12), (13), (23), (123)\},\\
&p_3[\pi],\ x^2y = yx^2,\ x^2y^2z = xy^2z^2,\ x^2y^2z^2 = 0,\ \text{где } \pi \in \{(12), (23)\},\\
&p_3[\pi],\ x^2y = yx^2,\ x^3yz = xy^2z^2,\ x^2y^2z^2 = 0,\ \text{где } \pi \in \{(12), (23)\},\\
&p_3[\pi],\ x^2y = xy^2,\ x^2y^2 = 0,\ \text{где } \pi \in \{(12), (23)\},\\
&p_3[\pi],\ xy^2 = yx^2,\ x^2y^2 = 0,\ \text{где } \pi \in \{(12), (23)\},\\
&p_3[\pi],\ x^2y = yx^2,\ x^3yz = 0,\ \text{где } \pi \in \{(12), (23)\},\\
&p_3[\pi],\ x^2y = yx^2,\ x^2y^2z^2 = 0,\ \text{где } \pi \in \{(12), (23)\},\\
&p_3[\pi],\ x^2y = yx^2,\ x^3yz = x^2y^2z^2,\ x^5 = 0,\ \text{где } \pi \in \{(12), (23)\},\\
&xyz = zyx,\ x^2y = xyx,\ x^2y^2z = xy^2z^2,\ x^2y^2z^2 = 0,\\
&xyz = zyx,\ x^2y = xyx,\ x^3yz = xy^2z^2,\ x^2y^2z^2 = 0,\\
&xyz = zyx,\ x^2y = yxy,\ x^4y = 0,\\
&xyz = zyx,\ xyx = yxy,\ x^2y^2 = 0,\\
&xyz = zyx,\ x^2y = xyx,\ x^3yz = 0,\\
&xyz = zyx,\ x^2y = xyx,\ x^2y^2z^2 = 0,\\
&xyz = zyx,\ x^2y = xyx,\ x^3yz = x^2y^2z^2,\ x^5 = 0,\\
&xyz = yzx,\ x^2y^2z = xy^2z^2,\ x^2y^2z^2 = 0,\\
&xyz = yzx,\ x^3yz = xy^2z^2,\ x^5 = 0,\\
&xyz = yzx,\ x^3yz = 0,\\
&xyz = yzx,\ x^2y^2z^2 = 0,\\
&xyz = yzx,\ x^3yz = x^2y^2z^2,\ x^5 = 0.
\end{aligned}
$$

Из сформулированной теоремы видно, что если $\mathbf{L}$ — квазимногообразие решеток, удовлетворяющее условиям теоремы, то всякое нильмногообразие $\mathcal{V}$ со свойством $L(\mathcal{V}) \in \mathbf{L}$ содержится в некотором максимальном нильмногообразии с тем же свойством, причем число таких максимальных многообразий конечно. Из предложения 2 теперь видно, что то же верно и для комбинаторных многообразий полугрупп.

Оказывается, аналогичные факты имеют место и в случае, когда $\mathbf{L}$ — произвольное квазимногообразие модулярных решеток. Это не вытекает ни из каких априорных рассуждений и представляет, на наш взгляд, определенный самостоятельный интерес. Отметим, что (как вытекает, напр., из [3]) не всякое многообразие полугрупп с модулярной решеткой подмногообразий содержится в максимальном многообразии с тем же свойством. В таблице 1 для каждого из

μ-классов во втором столбце указано число максимальных комбинаторных многообразий, решетка подмногообразий которых принадлежит квазимногообразиям решеток из этого класса, а в третьем столбце — число максимальных нильмногообразий с тем же свойством.

Таблица 1

Квазимногообразие модулярных решеток $\mathbf{L}$ таково, что	Число максимальных	
	комбинаторных многообразий	нильмногообразий
$\mathbf{M}_{4,3} \subseteq \mathbf{L}$	156	146
$\mathbf{M}_{3,3}, \mathbf{M}_4 \subseteq \mathbf{L}$, но $\mathbf{M}_{4,3} \nsubseteq \mathbf{L}$	239	225
$\mathbf{M}_4 \subseteq \mathbf{L}$, но $\mathbf{M}_{3,3} \nsubseteq \mathbf{L}$	273	259
$\mathbf{M}_{3,3} \subseteq \mathbf{L}$, но $\mathbf{M}_4 \nsubseteq \mathbf{L}$	29	22
$\mathbf{M}_3 \subseteq \mathbf{L}$, но $\mathbf{M}_4, \mathbf{M}_{3,3} \nsubseteq \mathbf{L}$	37	30
$\mathbf{L}=\mathbf{DIS}$	28	21

Результаты, относящиеся к μ-классам, указанным в пп. 2)–4) предложения 1, аналогичны сформулированной выше теореме: в них указываются системы тождеств, задающие максимальные нильмногообразия с соответствующим свойством. Полные формулировки этих результатов здесь из-за недостатка места опускаем.

Доказательство всех результатов работы (кроме предложения 2) опираются на [13]–[15]. В [13], [14] показано, что строение решеток нильмногообразий в значительной степени определяется строением решеток конгруэнций некоторых унарных алгебр специального вида, так называемых G-множеств, а в [15] описаны G-множества, решетки конгруэнций которых принадлежат произвольному наперед заданному квазимногообразию модулярных решеток.

Литература

1. Vernikov B.M. *Distributivity, modularity, and related conditions in lattices of overcommutative semigroup varieties* // Semigroups with Appl., including Semigroup Rings. – St.-Petersburg, 1999. – P. 411–439.
2. Vernikov B.M. *Semidistributive law and other quasi-identities in lattices of semigroup varieties* // Proc. Steklov Institute Math. Suppl. 2. – 2001. – P. 241–256.
3. Волков М.В. *Многообразия полугрупп с модулярной решеткой подмногообразий* // Докл. РАН. – 1992. – Т. 326. – № 3. – С. 409–413.
4. Волков М.В. *Многообразия полугрупп с модулярной решеткой подмногообразий* // Изв. вузов. Математика. – 1989. – № 6. – С. 51–59.
5. Волков М.В. *Многообразия полугрупп с модулярной решеткой подмногообразий*, II // Изв. вузов. Математика. – 1992. – № 7. – С. 3–8.
6. Волков М.В. *Многообразия полугрупп с модулярной решеткой подмногообразий*, III // Изв. вузов. Математика. – 1992. – № 8. – С. 21–29.
7. Volkov M.V., Ershova T.A.. *The lattice of varieties of semigroups with completely regular square* // Monash Conf. on Semigroup Theory in honour G.B. Preston. – Singapore, 1991. – P. 306–322.
8. Гретцер Г. *Общая теория решеток.* – М.: Мир, 1982. – 452 с.
9. Горбунов В.А. *Алгебраическая теория квазимногообразий.* – Новосибирск: Научн. книга, 1999. – 372 с.
10. Vernikov B.M. *A classification of lattice quasiidentities implying the modular law in lattices of nilsemigroup varieties* // II междунар. конф. “Полугруппы: теория и прилож.” в честь проф. Е.С. Ляпина: Тез. докл. – СПб., 1999. – С. 58–59.
11. Volkov M.V. *Semigroup varieties with commuting fully invariant congruences on free objects* // Contemp. Math. – 1992. – V. 131. – Part 3. – P. 295–316.

12. Vernikov B.M., Volkov M.V. *Commuting fully invariant congruences on free semigroups* // Contrib. General Algebra. – 2000. – V. 12. – P. 391–417.
13. Верников Б.М., Волков М.В. *Решетки нильпотентных многообразий полугрупп.* II // Изв. Уральск. ун-та. Матем., механ. – 1998. – Вып. 1. – № 10. – С. 13–33.
14. Верников Б.М., Волков М.В. *Строение решеток многообразий нильполугрупп* // Изв. Уральск. ун-та. Матем., механ. – 2000. – Вып. 3. – № 18. – С. 34–52.
15. Vernikov B.M. *On congruences of* G*-sets* // Comment. Math. Univ. Carol. – 1997. – V. 38. – № 3. – P. 603–613.

Уральский государственный университет

Поступила
08.07.2002