ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2003 МАТЕМАТИКА № 8 (495)

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.28:517.518

Д.А.АБАНИНА

ОБ АНАЛОГАХ ТЕОРЕМЫ БОРЕЛЯ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВ УЛЬТРАДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ НОРМАЛЬНОГО ТИПА

1. В соответствии с известной теоремой Э. Бореля [1] для любой последовательности $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ вещественных или комплексных чисел найдется такая бесконечно дифференцируемая на $\mathbb{R}$ функция f, что $f^{(n)}(0) = x_n$ при всех $n \in \mathbb{N}_0$ (многомерный ее вариант имеется, например, в ([2], с. 34–35)). Вслед за этой работой многие авторы [3]–[11] исследовали аналогичную задачу при различных априорных ограничениях на естественным образом согласованный между собой рост функции f и последовательности $(x_n)_{n=0}^{\infty}$. В частности, в [8] и [10] она была изучена для пространств Берлинга и Румье ультрадифференцируемых функций, задаваемых в рамках подхода Берлинга–Бьорка с помощью весовой функции ω. Фактически эти пространства задаются весовыми последовательностями $(n\omega)_{n=1}^{\infty}$ и $\left(\frac{1}{n}\omega\right)_{n=1}^{\infty}$ соответственно и представляют два предельных случая: минимальный (Берлинга) и максимальный (Румье). В [8], [10] доказано, что аналог теоремы Бореля для них справедлив тогда и только тогда, когда $\limsup\limits_{t\to\infty} \frac{\omega(Kt)}{\omega(t)} < K$ при некотором $K > 1$. Заметим, что пространства типа Румье при $\omega(t) = t^{1/\alpha}$ совпадают с хорошо известными классами Жевре порядка $\alpha > 1$, для которых указанный аналог имеет место (это было известно и раньше [4], [5]).

В данной статье получен критерий справедливости аналога теоремы Бореля для пространств ультрадифференцируемых функций нормального типа, задаваемых с помощью весовых последовательностей вида $(q_n\omega)_{n=1}^{\infty}$, где $(q_n)_{n=1}^{\infty}$, возрастая или убывая, стремится к $q \in (0, \infty)$.

2. Непрерывная неубывающая функция $\omega : [0, \infty) \to [0, \infty)$ называется *весовой* [10], если она удовлетворяет следующим условиям:

(α) существует $M > 0$ такое, что $\omega(x + y) \le M(\omega(x) + \omega(y) + 1)$ при всех $x, y \ge 0$;

(β) $\int\limits_0^{\infty} \frac{\omega(t)}{1+t^2} dt < \infty$;

(γ) $\ln t = o(\omega(t))$ при $t \to \infty$;

(δ) $\varphi_\omega(x) = \omega(e^x)$ выпукла на $[0, \infty)$.

Как обычно, $\varphi_\omega^*(y) := \sup\{xy - \varphi_\omega(x) \mid x \ge 0\}$ — функция, двойственная по Юнгу с φ_ω.

Для функции $f \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ и чисел $s, p \in (0, \infty)$ положим

$$|f|_{\omega,s,p} := \sup_{\alpha\in\mathbb{N}_0^N} \sup_{\|x\|\le p} |f^{(\alpha)}(x)| \exp\left(-s\varphi_\omega^*(|\alpha|/s)\right),$$

где $f^{(\alpha)} := \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_N^{\alpha_N}}$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_N$ и $\|x\| = \max\{|x_i| \mid 1 \le i \le N\}$ для любого $x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$. Пусть далее

$$\mathcal{E}_{\omega,s,p}(\mathbb{R}^N) := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^N) : |f|_{\omega,s,p} < \infty\}.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 02-01-00372.

Для $q \in (0,\infty]$ и $q \in [0,\infty)$ определим соответственно пространства

$$\mathcal{E}^q_{(\omega)}(\mathbb{R}^N) := \bigcap_{p>0} \bigcap_{0<s<q} \mathcal{E}_{\omega,s,p}(\mathbb{R}^N) \quad \text{и} \quad \mathcal{E}^q_{\{\omega\}}(\mathbb{R}^N) := \bigcap_{p>0} \bigcup_{s>q} \mathcal{E}_{\omega,s,p}(\mathbb{R}^N).$$

При этом $\mathcal{E}^\infty_{(\omega)}(\mathbb{R}^N)$ называют пространством Берлинга ультрадифференцируемых функций, а $\mathcal{E}^0_{\{\omega\}}(\mathbb{R}^N)$ — Румье. При $q \in (0,\infty)$ $\mathcal{E}^q_{(\omega)}(\mathbb{R}^N)$ и $\mathcal{E}^q_{\{\omega\}}(\mathbb{R}^N)$ естественно называть пространствами Берлинга и Румье нормального типа.

Обозначим через $\rho : f \longmapsto (f^{(\alpha)}(0))_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N}$ отображение сужения, действующее из $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ в пространство Φ всех последовательностей комплексных чисел.

Для $d = (d_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} \in \Phi$ и $s \in (0,\infty)$ положим

$$\|d\|_{\omega,s} := \sup_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} |d_\alpha| \exp\big(-s\varphi^*_\omega(|\alpha|/s)\big)$$

и определим следующие пространства последовательностей:

$$\mathcal{E}_{\omega,s} := \{d \in \Phi \mid \|d\|_{\omega,s} < \infty\},$$
$$\mathcal{E}^q_{(\omega)} := \bigcap_{0<s<q} \mathcal{E}_{\omega,s} \quad \text{для} \quad q \in (0,\infty] \quad \text{и} \quad \mathcal{E}^q_{\{\omega\}} := \bigcup_{s>q} \mathcal{E}_{\omega,s} \quad \text{для} \quad q \in [0,\infty).$$

Очевидно, что при всех допустимых q оператор сужения ρ действует из $\mathcal{E}^q_*(\mathbb{R}^N)$ в $\mathcal{E}^q_*$ (здесь и далее $*$ обозначает (ω) или $\{\omega\}$). Как уже отмечалось в п. 1, в [8] и [10] были установлены необходимые и достаточные условия на ω, при которых операторы $\rho : \mathcal{E}^\infty_{(\omega)}(\mathbb{R}^N) \longrightarrow \mathcal{E}^\infty_{(\omega)}$ и $\rho : \mathcal{E}^0_{\{\omega\}}(\mathbb{R}^N) \longrightarrow \mathcal{E}^0_{\{\omega\}}$ сюръективны (в этом случае говорят, что для соответствующего пространства ультрадифференцируемых функций справедлив аналог теоремы Бореля). Основной результат данной статьи, формулируемый ниже, характеризует в том же отношении пространства нормального типа. Будем при этом предполагать, что весовая функция ω вместо условия (α) удовлетворяет более жесткому требованию *почти полуаддитивности сверху*, т. е. для любого $p > 1$ имеется такое $C > 0$, что $\omega(x+y) \le p\big(\omega(x) + \omega(y)\big) + C$ при всех $x, y \ge 0$. Отметим, что степени жесткости (α) и этого предположения в определенном смысле равносильны относительно рассматриваемых пространств — максимального или минимального и соответственно нормального типов.

Теорема. *Пусть ω — почти полуаддитивная сверху весовая функция. Следующие утверждения эквивалентны*:

(i) *аналог теоремы Бореля справедлив для всех пространств $\mathcal{E}^q_{(\omega)}(\mathbb{R}^N)$ и $\mathcal{E}^q_{\{\omega\}}(\mathbb{R}^N)$, $q \in (0,\infty)$;*

(ii) *аналог теоремы Бореля справедлив хотя бы для одного из пространств $\mathcal{E}^q_{(\omega)}(\mathbb{R}^N)$ или $\mathcal{E}^q_{\{\omega\}}(\mathbb{R}^N)$, $q \in (0,\infty)$;*

(iii) *ω — медленно меняющаяся функция, т. е. $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{\omega(\lambda t)}{\omega(t)} = 1$ для любого или (что в исследуемом случае одно и то же) для некоторого $\lambda > 1$.*

Примерами полуаддитивных сверху весов, удовлетворяющих (iii), а значит, и (i), являются $\omega(t) = \ln^\beta(1+t)$, $\beta > 1$, а не удовлетворяющих — $\omega(t) = t^{1/\alpha}$, $\alpha > 1$. Последнее означает, что для пространств Жевре порядка α и нормального типа аналог теоремы Бореля места не имеет.

Схема доказательства теоремы проводится методом, разработанным в [8] для пространств минимального и максимального типов. Суть этого метода заключается в переходе к двойственной задаче, которая формулируется в терминах целых в $\mathbb{C}^N$ функций, и ее исследовании. Остановимся кратко на ключевых моментах доказательства, которые имеют существенное отличие от [8] и могут быть полезны в других вопросах.

Использовав выпуклость φ_ω, сначала устанавливаем, что всякая весовая функция ω обладает свойствами

$$\lim_{r\searrow 1}\limsup_{t\to\infty}\frac{\omega(rt)}{\omega(t)}=1; \tag{1}$$

$$\omega(y/t)+\omega(yt)\ge 2\omega(y) \quad \text{для всех} \quad y\ge 1 \quad \text{и} \quad t\in[1,y]; \tag{2}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\varphi_\omega^*(x)-r\varphi_\omega^*(x/r)}{x^\alpha}=\infty \quad \text{для всех} \quad r>1 \quad \text{и} \quad \alpha\in(0,1). \tag{3}$$

Далее, с помощью (1), (2) доказывается, что условие (iii) теоремы равносильно каждому из следующих двух:

(iii_1) $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to\infty\\ y\neq 0}}\dfrac{|y|}{\pi\omega(|x+iy|)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{\omega(|t|)}{(t-x)^2+y^2}dt=1;$

(iii_2) $\lim\limits_{r\to\infty}\dfrac{2}{\pi\omega(r)}\int\limits_0^{\infty}\dfrac{\omega(rt)}{t^2+1}dt=1.$

Именно, сначала показываем, что из (iii) следует

$$\lim_{y\to\infty}\frac{4}{\pi\omega(y)}\int_1^\infty\frac{\omega(yt)}{t^2+1}dt=1. \tag{4}$$

Затем с помощью простых оценок получаем при $y\neq 0$

$$P_\omega(x+iy):=\frac{|y|}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega(|t|)}{(t-x)^2+y^2}dt\le\frac{1}{2}\omega(|x|+|y|)+\frac{2}{\pi}\int_1^\infty\frac{\omega((|x|+|y|)t)}{t^2+1}dt.$$

Как известно, гармоническое продолжение $P_\omega(x+iy)$ функции $\omega(x)$ с вещественной оси в верхнюю (равно, как и в нижнюю) полуплоскость удовлетворяет неравенству $P_\omega(x+iy)\ge\omega(|x+iy|)$ для всех $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ с $y\neq 0$. Поэтому, заменив в (4) y на $|x|+|y|$, имеем

$$\lim_{\substack{(x,y)\to\infty\\ y\neq 0}}\frac{P_\omega(x+iy)}{\omega(|x|+|y|)}=1.$$

В силу (iii) $\lim\limits_{(x,y)\to\infty}\dfrac{\omega(|x|+|y|)}{\omega(|x+iy|)}=1$. Из двух предыдущих равенств вытекает (iii_1). Импликация $(iii_1)\Rightarrow(iii_2)$ тривиальна, а $(iii_2)\Rightarrow(iii)$ доказывается следующим образом. На основании свойств (1), (2) весовых функций устанавливается, что (iii_2) влечет

$$\lim_{y\to\infty}\frac{\omega(y/2)+\omega(2y)}{\omega(y)}=2.$$

Обозначим $b:=\limsup\limits_{y\to\infty}\dfrac{\omega(2y)}{\omega(y)}$. Так как

$$2=\lim_{y\to\infty}\frac{\omega(y/2)+\omega(2y)}{\omega(y)}\ge\liminf_{y\to\infty}\frac{\omega(y/2)}{\omega(y)}+\limsup_{y\to\infty}\frac{\omega(2y)}{\omega(y)}=\frac{1}{b}+b,$$

то $b=1$. Тогда $\lim\limits_{y\to\infty}\dfrac{\omega(2y)}{\omega(y)}=1$ в силу неубывания ω и, очевидно, ω — медленно меняющаяся функция.

Таким образом, остается проверить справедливость импликаций $(iii_1)\Rightarrow(i)$ и $(ii)\Rightarrow(iii_2)$ (ясно, что $(i)\Rightarrow(ii)$). Для этого при помощи аналога теоремы Пэли–Винера–Шварца ([12], теорема 3) вопрос о сюръективности операторов $\rho:\mathcal{E}_*^q(\mathbb{R}^N)\longrightarrow\mathcal{E}_*^q$, $0<q<\infty$, переформулируется в терминах целых в $\mathbb{C}^N$ функций. При этом для реализации метода из [8] используются свойства (1), (3) весовых функций. Далее, так же, как и в [8], применяя принцип Фрагмена–Линделефа, устанавливаем, что $(iii_1) \Rightarrow (i)$. Следует отметить, что здесь существенную роль играет использование условия (iii), равносильного (iii_1), которое позволяет заменить двойственную задачу в $\mathbb{C}^N$ на новую задачу в $\mathbb{C}$.

Наконец, импликация $(ii) \Rightarrow (iii_2)$ доказывается при предположении о почти полуаддитивности сверху весовой функции ω с помощью построения специального семейства полиномов.

Литература

1. Borel E. *Sur quelques points de la théorie des fonctions* // Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. – Ser. 3[d]. 1985. – V. 12. – P. 9–55.
2. Нарасимхан Р. *Анализ на действительных и комплексных многообразиях.* – М.: Мир, 1971. – 232 с.
3. Carleson L. *On universal moment problems* // Math. Scand. – 1961. – V. 9. – P. 197–206.
4. Митягин Б.С. *О бесконечно дифференцируемой функции с заданными значениями производных в точке* // ДАН СССР. – 1961. – Т. 138. – № 2. – С. 289–292.
5. Джанашия Г.А. О задаче Карлемана для класса функций Жевре // ДАН СССР. – 1962. – Т. 145. – № 2. – С. 259–262.
6. Ehrenpreis L. *Fourier analysis in several complex variables.* – New York: Wiley-Interscience Publ., 1970. – 506 p.
7. Komatsu H. *Ultradistributions* II. *The kernel theorem and ultradistributions with support in a submanifold* // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sec. IA . – 1977. – V. 24. – P. 607–628.
8. Meise R., Taylor B.A. *Whitney's extension theorem for ultradifferentiable functions of Beurling type* // Ark. Mat. – 1988. – V .26. – P. 265–287.
9. Petzsche H.-J. *On E. Borel's theorem* // Math. Ann. – 1988. – V. 282. – P. 292–313.
10. Bonet J., Meise R., Taylor B.A. *Whitney's extension theorem for ultradifferentiable functions of Roumieu type* // Proc. R. Ir. Acad. – 1989. – V. 89A. – P. 53–66.
11. Коробейник Ю.Ф. *Об аналитических решениях проблемы Бореля* // Матем. заметки. – 2000. – Т. 67. – С. 525–538.
12. Абанин А.В., Тищенко Е.С. *Пространства ультрадифференцируемых функций и обобщение теоремы Пэли–Винера–Шварца* // Изв. вузов. Сев.-Кав. регион. Естеств. науки. – 1997. – № 2. – С. 5–8.

Ростовский государственный университет

Поступила
29.07.2002