И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

1999 МАТЕМАТИКА № 7 (446)

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.956

А.Н. МИРОНОВ

О ПОСТРОЕНИИ ФУНКЦИИ РИМАНА ДЛЯ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ В N-МЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Функция Римана для уравнения

$$u_{x_1x_2\dots x_n}+L(u)=0,\quad L(u)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{Q_n^k}a_{q_1\dots q_k}u_{x_{q_{k+1}}\dots x_{q_n}}, \tag{1}$$

где $Q_n^k=\{(q_1,\dots,q_n)\mid\{q_j\mid 1\le j\le n\}=\{p\mid 1\le p\le n\},\ q_1<\dots<q_k,\ q_{k+1}<\dots<q_n\}$, коэффициенты (1) удовлетворяют условиям $(a_{q_1\dots q_k})_{x_{q_{k+1}}\dots x_{q_n}}\in C^0$, определяется в [1]–[3] как решение интегрального уравнения

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\sum_{Q_{k,n}}\int_{\lambda_{q_1}}^{x_{q_1}}\cdots\int_{\lambda_{q_k}}^{x_{q_k}}a_{q_1\dots q_k}(x_1,\dots,x_{q_1-1},\alpha_{q_1},x_{q_1+1},\dots,$$
$$x_{q_k-1},\alpha_{q_k},x_{q_k+1},\dots,x_n)v(x_1,\dots,x_{q_1-1},\alpha_{q_1},x_{q_1+1},\dots,x_{q_k-1},\alpha_{q_k},x_{q_k+1},\dots,x_n)\,d\alpha_{q_k}\dots d\alpha_{q_1}=1, \tag{2}$$

$$Q_{k,n}=\{(q_1,\dots,q_k)\mid 1\le q_1<\dots<q_k\le n\}.$$

Из (2) следует, что v удовлетворяет сопряженному к (1) уравнению

$$v_{x_1x_2\dots x_n}+L^*(v)=0,$$
$$L^*(v)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\sum_{Q_n^k}(a_{q_1\dots q_k}v)_{x_{q_{k+1}}\dots x_{q_n}}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{Q_n^k}a^*_{q_1\dots q_k}v_{x_{q_{k+1}}\dots x_{q_n}}. \tag{3}$$

В данной работе при дополнительных ограничениях на коэффициенты (1) предлагаются другие интегральные уравнения для v, позволяющие, в частности, выделять случаи явного построения этой функции. Рассуждения опираются на идеи работ [4], [5].

1. В дальнейшем используются конструкции

$$h_{q_1\dots q_{k-1},q_k}=(a_{q_1\dots q_{k-1}})_{x_{q_k}}+a_{q_1\dots q_{k-1}}a_{q_k}-a_{q_1\dots q_k}, \tag{4}$$

взятые по всем наборам $(q_1,\dots,q_k)$, причем считается $a_{q_1\dots q_k}=a_{p_1\dots p_k}$, если $\{q_i\mid 1\le i\le k\}=\{p_j\mid 1\le j\le k\}$. Всего имеется $n(2^{n-1}-1)$ конструкций вида (4), которые являются аналогами h_i, $i=\overline{1,9}$, из [4].

Пусть $(r_1,\dots,r_n)$ — некоторая перестановка $(1,\dots,n)$ и

$$h_{r_{q_1}\dots r_{q_{k-1}},r_{q_k}}\equiv 0,\quad k=\overline{2,n-1},\quad (q_1,\dots,q_k)\in Q_{k,n}. \tag{5}$$

Тогда уравнение (3) запишется в виде

$$\Big(\frac{\partial}{\partial x_{r_1}}-a_{r_1}\Big)\cdots\Big(\frac{\partial}{\partial x_{r_n}}-a_{r_n}\Big)v=(-1)^n h_{r_1\dots r_{n-1},r_n}v. \tag{6}$$

В этом можно убедиться с помощью индукции по порядку дифференциального оператора L^*. Функция Римана для (6) при условии $h_{r_1\ldots r_{n-1},r_n} \equiv 0$ известна [6]

$$R = R_{r_1\ldots r_n}(x_1,\ldots,x_n,x_1^0,\ldots,x_n^0) =$$
$$= \exp \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{r_i}}^{x_{r_i}^0} a_{r_i}(x_1,\ldots,x_{r_i-1},\alpha_{r_i},x_{r_i+1},\ldots,x_n)\,|_{x_{r_{i+1}}=x^0_{r_{i+1}}} \ldots |_{x_{r_n}=x^0_{r_n}}\, d\alpha_{r_i}.$$

Следуя [2], можем записать решение уравнения (6), считая его неоднородным с правой частью $(-1)^n h_{r_1\ldots r_{n-1},r_n} v$. Освободившись в формуле этого решения от производных функции R с помощью интегрирования по частям, получим

$$\begin{gathered} v(x_1,\ldots,x_n) = R(x_1^0,\ldots,x_n^0,x_1,\ldots,x_n)v(x_1^0,\ldots,x_n^0) + \\ + \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{Q_{k,n}} \int_{x^0_{q_1}}^{x_{q_1}} \cdots \int_{x^0_{q_k}}^{x_{q_k}} R(x_1^0,\ldots,x^0_{q_1-1},\alpha_{q_1},x^0_{q_1+1},\ldots,x^0_{q_k-1}, \\ \alpha_{q_k},x^0_{q_k+1},\ldots,x^0_n,x_1,\ldots,x_n)\Bigg\{ \sum_{m=0}^{k}\sum_{H_k^m} a^*_{h_1\ldots h_m}(x_1^0,\ldots,x^0_{q_1-1}, \\ \alpha_{q_1},x^0_{q_1+1},\ldots,x^0_{q_k-1},\alpha_{q_k},x^0_{q_k+1},\ldots,x^0_n) v_{\alpha_{h_{m+1}}\ldots\alpha_{h_k}}(x_1^0,\ldots,x^0_{q_1-1}, \\ \alpha_{q_1},x^0_{q_1+1},\ldots,x^0_{q_k-1},\alpha_{q_k},x^0_{q_k+1},\ldots,x^0_n)\Bigg\} d\alpha_{q_k}\ldots d\alpha_{q_1} + \\ +(-1)^n \int_{x_1^0}^{x_1} \cdots \int_{x_n^0}^{x_n} R(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,x_1,\ldots,x_n) \times \\ \times h_{r_1\ldots r_{n-1},r_n}(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)v(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)d\alpha_n\ldots d\alpha_1, \\ H_k^m = \{(h_1,\ldots,h_k) \mid \{h_j \mid 1\le j\le k\} = \{q_i \mid 1 \le i \le k\}, \\ h_1 < \ldots < h_m,\, h_{m+1} < \ldots < h_k\}. \end{gathered} \tag{7}$$

Сравнивая (2) и (7), видим, что все выражения в фигурных скобках в (7) тождественно равны нулю. Таким образом, при условиях (5) получаем интегральное уравнение

$$\begin{aligned} v(x_1,\ldots,x_n,x_1^0,\ldots,x_n^0) = R(x_1^0,\ldots,x_n^0,x_1,\ldots,x_n) &+ \\ + (-1)^n \int_{x_1^0}^{x_1} \cdots \int_{x_n^0}^{x_n} R(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,x_1,\ldots,x_n) &\times \\ \times\, h_{r_1\ldots r_{n-1},r_n}(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)v(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,x_1^0,\ldots,x_n^0)&d\alpha_n\ldots d\alpha_1. \end{aligned} \tag{8}$$

При записи (8) учтено, что $v(x_1^0,\ldots,x_n^0,x_1^0,\ldots,x_n^0) = 1$. Таких уравнений $n!$, каждому из них соответствует своя $R = R_{r_1\ldots r_n}$.

2. Дополнительно к (5) потребуем, чтобы a_i имели структуру

$$a_i = a_i^0(x_i) + \omega \prod_{\substack{1\le j\le n \\ j\ne i}} x_j, \quad i=\overline{1,n}, \quad \omega = \mathrm{const}.$$

Тогда $R_{r_1\ldots r_n}(x_1,\ldots,x_n,x_1^0,\ldots,x_n^0) = T(x_1,\ldots,x_n)/T(x_1^0,\ldots,x_n^0)$, где $T(x_1,\ldots,x_n) = \exp\Big(\sum\limits_{i=1}^{n}\int\limits_{x_i}^{0} a_i^0(\alpha_i)d\alpha_i - \omega\prod\limits_{1\le j\le n} x_j\Big)$. Обозначим $w = Tv$. При этом (8) принимает вид

$$w(x_1,\ldots,x_n) = T(x_1^0,\ldots,x_n^0) + (-1)^n \int_{x_1^0}^{x_1}\cdots\int_{x_n^0}^{x_n} h_{r_1\ldots r_{n-1},r_n}(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)w(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)d\alpha_n\ldots d\alpha_1.$$

Данное уравнение эквивалентно задаче Гурса для уравнения

$$w_{x_1\ldots x_n} = (-1)^n h_{r_1\ldots r_{n-1},r_n} w \tag{9}$$

с условиями

$$w\mid_{x_1=x_1^0}=w\mid_{x_2=x_2^0}=\cdots=w\mid_{x_n=x_n^0}=T(x_1^0,\dots,x_n^0).$$

Положим

$$h_{r_1\dots r_{n-1},r_n}=(-1)^n\prod_{1\le j\le n}\theta_j(x_j).$$

Используя функцию Римана для (9) ([7], с. 19), получим w и, возвратившись снова к функции v, запишем

$$v(x_1,\dots,x_n,x_1^0,\dots,x_n^0)=\frac{T(x_1^0,\dots,x_n^0)}{T(x_1,\dots,x_n)}\,{}_0F_{n-1}\Big(1,\dots,1;(-1)^n\prod_{1\le j\le n}\int_{x_j^0}^{x_j}\theta_j(\alpha_j)d\alpha_j\Big).$$

Здесь ${}_0F_{n-1}$ — обобщенная гипергеометрическая функция ([8], с. 183).

Литература

1. Жегалов В.И., Севастьянов В.А. *Задача Гурса в четырехмерном пространстве* // Дифференц. уравнения. – 1996. – Т. 32. – № 10. – С. 1429–1430.
2. Жегалов В.И., Севастьянов В.А. *Задача Гурса в n-мерном пространстве.* – Ред. журн. “Сиб. матем. журн.” – Новосибирск, 1997. – 4 с. – Деп. в ВИНИТИ 08.07.97, № 2290–В97.
3. Севастьянов В.А. *Метод Римана для трехмерного гиперболического уравнения третьего порядка* // Изв. вузов. Математика. – 1997. – № 5. – С. 69–73.
4. Жегалов В.И. *О трехмерной функции Римана* // Сиб. матем. журн. – 1997. – Т. 38. – № 5. – С. 1074–1079.
5. Жегалов В.И., Котухов М.П. *Об интегральных уравнениях для функции Римана* // Изв. вузов. Математика. – 1998. – № 1. – С. 26–30.
6. Севастьянов В.А. *К вопросу построения функции Римана в R^n в явном виде* // Тез. докл. школы–конф. “Алгебра и анализ”. – Казань, 1997. – С. 188–189.
7. Волкодавов В.Ф., Захаров В.Н. *Таблицы функций Римана и Римана–Адамара для некоторых дифференциальных уравнений в n-мерных евклидовых пространствах.* – Самара, 1994. – 31 с.
8. Бейтмен Г., Эрдейи А. *Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра.* Т. 1. – 2-е изд. – М.: Наука, 1973. – 294 с.

Казанский государственный университет

Поступила 26.03.1998