ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2001 МАТЕМАТИКА № 9 (472)

УДК 519.614

А.Л. АГЕЕВ

УСЛОВНЫЕ ОЦЕНКИ УСТОЙЧИВОСТИ В НЕСИММЕТРИЧНОЙ ПРОБЛЕМЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

В работе получены оценки возмущения собственных значений несимметричной матрицы A размера $n \times n$. Известно (см., напр., [1], гл. 1, § 6), что для полупростого собственного значения λ матрицы A справедлива оценка

$$|\lambda - \lambda^\varepsilon| \le k(\lambda)\varepsilon + O(\varepsilon^2), \tag{0.1}$$

где $k(\lambda)$ — *локальное число обусловленности* собственного значения λ ($k(\lambda)$ — наименьшая константа, которая может быть поставлена в оценке (0.1); для λ, отвечающего жордановой клетке порядка больше единицы, положим $k(\lambda) = \infty$). Здесь λ^ε есть собственное число возмущенной матрицы $A^\varepsilon : \|A - A^\varepsilon\| \le \varepsilon$. При этом естественно предполагается, что из всех собственных чисел матрицы A^ε именно λ^ε является возмущением собственного числа λ. Таким образом, все собственные значения делятся на хорошо обусловленные и плохо обусловленные (с большим $k(\lambda)$). Заметим, что аналог локального числа обусловленности можно ввести и для полупростого собственного значения, но для простоты изложения это обобщение здесь обсуждаться не будет.

Также хорошо известно, что при наличии плохо обусловленных точек спектра матрицы A хорошая локальная обусловленность собственного значения λ не позволяет в общем случае гарантировать малость величины $|\lambda - \lambda^\varepsilon|$, поскольку оценка (0.1) начинает работать только для $\varepsilon \le \varepsilon_0$, где ε_0 зависит от расположения и обусловленности остальных собственных значений. Значение ε_0 может оказаться практически нулем, и для реализующегося на практике уровня возмущений доминирующим членом в правой части оценки (0.1) окажется $O(\varepsilon^2)$. Эту ситуацию реализует

Пример 1. Рассмотрим точную и возмущенную матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1.1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ & \cdots & & \cdots & & \\ & \cdots & & \cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1.1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1.1 \end{pmatrix}, \quad A^\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1.1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ & \cdots & & \cdots & & \\ & \cdots & & \cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1.1 & 1 \\ \varepsilon & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1.1 \end{pmatrix}. \tag{0.2}$$

Здесь матрица A n-го порядка имеет простое собственное число $\lambda_1 = 1$ и собственное число $\lambda_2 = 1.1$, отвечающее жордановой клетке порядка $n-1$. Число λ_1 превосходно обусловлено: $k_1(1) = 1$. Возмущенная матрица A^ε отличается $(n,1)$-м и $(1,2)$-м элементами от матрицы A, как это показано в (0.2).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 00-01-00325.

Характеристическое уравнение матрицы A^ε имеет вид

$$(1-\lambda)(1.1-\lambda)^{n-1} - (-1)^n \varepsilon^2 = 0.$$

Пусть λ_1^ε — корень этого уравнения. Для того чтобы $|1-\lambda_1^\varepsilon| \le 0.1$, необходимо, чтобы $\varepsilon^2 = |(1-\lambda_1^\varepsilon)| \times |(1.1-\lambda_1^\varepsilon)^{n-1}| \le 0.1 \times 0.2^{n-1}$. Следовательно, для $\varepsilon > \varepsilon_0 = 0.1^{0.5} \times 0.2^{(n-1)/2}$ будет выполнено неравенство $|1-\lambda_1^\varepsilon| > 0.1$. Уже при сравнительно небольших n величина ε_0 будет меньше, чем уровень возмущения, который для обычной машинной арифметики может гарантировать анализ ошибок округления. Для улучшения ситуации необходимо привлекать дополнительную информацию об искомом собственном значении.

Применительно к рассмотренному примеру цель работы состоит в том, чтобы сформулировать дополнительное условие, при выполнении которого справедлива оценка $|1-\lambda^\varepsilon| \le C_1\varepsilon$ для $\varepsilon \le \varepsilon_1$, где константа C_1 не велика, а ε_1 много больше ε_0. В статье получены оценки (теоремы 7 и 8), позволяющие утверждать, что при достаточно широких условиях можно гарантировать близость невозмущенного и возмущенного собственных значений, если они оба локально хорошо обусловлены, независимо от обусловленности остальных собственных значений. Такого рода оценки назовем *условными* оценками устойчивости.

Таким образом, если известно (априори), что искомое собственное значение локально хорошо обусловлено, то его можно аппроксимировать с хорошей точностью. Для этого, например, достаточно построить регуляризующий алгоритм, определяющий собственное число $\lambda^{R\varepsilon}$ матрицы $A^{R\varepsilon}$, для которой $\|A^{R\varepsilon} - A^\varepsilon\| \le \varepsilon$, и такой, что $\lambda^{R\varepsilon}$ локально хорошо обусловленно. Построение регуляризующих алгоритмов будет рассматриваться в следующих работах.

Для симметричной обобщенной задачи на собственные значения в [2] были впервые получены условные оценки устойчивости и на их основе построен метод регуляризации этой спектральной задачи (см. также [3], гл. 3, § 4). Техника получения оценок в нашем случае отлична от той, которая использовалась в [2], и основана на классических методах локализации собственных значений (см., напр., [1], гл. 2).

1. Вспомогательные утверждения

В этом параграфе введем, следуя [1], необходимые определения, обозначения, приведем известные результаты, необходимые в дальнейшем, и докажем основные технические утверждения данной работы. Кроме того, получим оценки чисел обусловленности для жордановой клетки. Основываясь на этих оценках, в частности, получим условные оценки возмущения собственного значения $\lambda = 1$ для матриц из примера 1.

Пусть R^n — евклидово пространство n-мерных векторов с обычным скалярным произведением $\langle ,\cdot, \rangle$. Соответствующую норму обозначим $\|\cdot\|$. Далее, наряду с R^n, также будут использоваться евклидовы пространства R^m и R^{n-m}, где $1 \le m < n$. Не будем делать никаких различий в обозначениях скалярных произведений и норм в этих трех пространствах. Выбор подходящего скалярного произведения или нормы будет ясен из контекста.

Задача на собственные значения заключается в определении тех λ, для которых существуют ненулевые векторы x и y (соответственно правый и левый собственный вектор) такие, что

$$Ax = \lambda x, \quad y^T A = \lambda y^T. \tag{1.1}$$

Далее, если не оговорено противное, считаем, что $\|x\| = \|y\| = 1$. Назовем $\{\lambda, x, y\}$ собственной тройкой матрицы A, пару $\lambda,\ x$ — собственной парой матрицы A.

Напомним, что всегда существует невырожденная матрица P, приводящая матрицу A к каноническому виду

$$A = P^{-1} D P, \tag{1.2}$$

где D — блочно-диагональная матрица с блоками, являющимися жордановыми клетками $J_i(\lambda_i)$ порядков m_i $\left(\sum\limits_1^k m_i = n;\ k\text{ – количество жордановых клеток}\right)$. Если клетка Жордана, отвечающая собственному числу λ, имеет размерность единица, то это собственное число называется полупростым. Если полупростое собственное число однократно, то оно называется простым. В последнем случае локальное число обусловленности $k(\lambda)$ вычисляется по формуле

$$k(\lambda) = 1/|s(\lambda)|, \quad s(\lambda) \equiv y^T x,$$

собственного числа λ.

Глобальным числом обусловленности для диагонализуемой (все собственные значения полупростые) матрицы A назовем величину

$$K_A = \min_P \|P\| \times \|P^{-1}\| = \min_P \operatorname{cond} P,$$

где P — матрица из разложения (1.2), $\operatorname{cond} P$ — число обусловленности (относительно обращения) матрицы P. Относительно условия диагонализуемости заметим, что для любой матрицы A всегда существует как угодно малое возмущение, делающее эту матрицу диагонализуемой. Для дальнейшего удобно считать, что у недиагонализуемой матрицы A величина $K_A = \infty$ (это соглашение не является общепринятым). Ранее также было принято, что $k(\lambda_i) = \infty$, если соответствующее собственное число отвечает жордановой клетке порядка больше единицы.

Для сравнения с оценками следующего параграфа приведем три известных (см., напр., [1], гл. 2) теоремы. Пусть возмущение задается матрицей F и уровнем возмущения ε:

$$A^\varepsilon = A + \varepsilon F, \quad \|F\| \le 1, \tag{1.3}$$

где норма на пространстве матриц есть соответствующая норме в R^n подчиненная матричная норма.

Теорема 1. *Если λ — простое собственное число, то можно так выбрать собственное число λ^ε матрицы A^ε, что выполняется оценка* (0.1)*, где $O(\varepsilon^2)$ есть величина порядка малости ε^2.*

Теорема 2 (Бауэра–Файка). *Пусть A — диагонализуемая матрица с собственными значениями λ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, а λ_i^ε, $i = 1, 2, \ldots, n$, — собственные значения матрицы A^ε. Тогда для любого i существует номер j такой, что справедливо неравенство*

$$|\lambda_j - \lambda_i^\varepsilon| \le \|PFP^{-1}\|\varepsilon \le K_A\, \varepsilon.$$

Отметим, что хотя оценки, приводимые в теореме 2, иногда возможно существенно улучшить, но пример 1 показывает, что в ситуации, когда локально хорошо и локально плохо обусловленные собственные значения “недостаточно отделены”, невозможно получить “хорошую” (гарантирующую близость) оценку. Изучению этой ситуации и посвящена данная работа.

Теорема 3. *Для диагонализуемой матрицы A с простыми собственными значениями справедливы неравенства*

$$\max_i k(\lambda_i) \le K_A \le \sum_1^n k(\lambda_i) \le n \max_i k(\lambda_i).$$

Таким образом, задача на собственные значения оказывается глобально плохо обусловленной тогда и только тогда, когда у матрицы есть группа локально плохо обусловленных собственных значений.

Замечание 1. В принятых нами соглашениях относительно значений чисел обусловленности для жордановых клеток порядка больше единицы теоремы 1–3 можно считать верными и без условия диагонализуемости матрицы A.

Известны также следующие теоремы (см., напр., [1], с. 72).

Теорема 4. *Пусть λ, x — приближенная собственная пара матрицы A, т. е. выполнены равенства*

$$Ax = \lambda x + r, \quad \|x\| = 1.$$

Тогда существует матрица $B : \|A - B\| \le \varepsilon = \|r\|$, для которой λ, x есть точная собственная пара.

Теорема 5. *Пусть $\{\lambda, x, y\}$ — приближенная собственная тройка матрицы A, т. е. выполнены равенства*

$$Ax = \lambda x + r, \quad y^T A = \lambda y^T + s^T, \quad \|x\| = \|y\| = 1.$$

Пусть также $|s(\lambda)| = |y^T x| \ne 0$, $\varepsilon = \max\{\|r\|, \|s\|\}$. Тогда существует матрица $B : \|A - B\| = \varepsilon$, для которой $\{\lambda, x, y\}$ есть точная собственная тройка.

Докажем основные технические утверждения данной работы. Пусть $1 \le m < n$ — натуральное число. Запишем все матрицы в блочном виде с размерами блоков $m \times m$, $(n-m) \times (n-m)$, $m \times (n-m)$, $(n-m) \times m$, а каждый вектор разобьем на два размерностей m и $n-m$ (покажем это разбиение на примере матрицы A и вектора x)

$$A = \begin{pmatrix} A^{11} & A^{12} \\ A^{21} & A^{22} \end{pmatrix}, \qquad x = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}, \;\; x^1 \in R^n, \;\; x^2 \in R^{n-m}.$$

Обозначим через $G_m(\delta)$ параметрическое семейство замкнутых множеств, локализующих собственные числа блока A^{11} (это значит, что для любой $m \times m$ матрицы B, для которой $\|A^{11} - B\| \le \delta$, ее собственные числа всегда находятся в $G_m(\delta)$). Заметим, например, что в условиях теоремы 3 в качестве $G_m(\delta)$ можно взять множество $\bigcup\limits_{i=1}^{m} \{\lambda : |\lambda - \lambda_i| \le K^{11}\delta\}$, где K^{11} — глобальное число обусловленности блока A^{11}.

Положим $M = \max\{\|A^{12}\|,\ \|A^{21}\|\}$. Пусть также для блока A^{22} выполняется

Условие 1. Существуют постоянные $s_{\max}$, $0 < \varepsilon_1 < 1$ такие, что для всех $(n-m) \times (n-m)$ матриц Δ, для которых $\|\Delta\| \le \varepsilon_1$, выполнено неравенство

$$|s(\lambda^\Delta)| \le s_{\max},$$

где λ^Δ — произвольное собственное число матрицы $A^{22} + \Delta$.

Напомним, что если $\{\lambda, x, y\}$ — собственная тройка матрицы A, то $|s(\lambda)| \equiv |y^T x|$.

Лемма 1. *Пусть выполнено условие* 1 *и собственное значение λ матрицы A достаточно локально хорошо обусловлено*: $|s(\lambda)| > s_{\max}$. *Тогда $\lambda \in G_m(\delta)$, где*

$$\delta = \max\left\{ \frac{M}{\sqrt{|s(\lambda)| - s_{\max}}}\,,\ \frac{M^2}{\varepsilon_1} \right\}.$$

Доказательство. Пусть $\{\lambda, x, y\}$ — собственная тройка матрицы A. Непосредственно из определения собственных векторов x, y, пользуясь блочной формой записи и производя нормировку векторов, легко получить тождества

$$\begin{aligned} (A^{22}-\lambda)\frac{x^2}{\|x^2\|} &= r_1, \quad \|r_1\| \le M\|x^1\|/\|x^2\|; \\ \frac{(y^2)^T}{\|y^2\|}(A^{22}-\lambda) &= d_1, \quad \|d_1\| \le M\|y^1\|/\|y^2\|; \end{aligned} \tag{1.4}$$

$$\frac{(y^1)^T}{\|y^1\|}(A^{11}-\lambda) = d_2, \quad \|d_2\| \le M\|y^2\|/\|y^1\|. \tag{1.5}$$

Воспользуемся равенством (1.4) и рассмотрим два случая. Случай первый: выполнено неравенство

$$\max\left\{M\frac{\|y^1\|}{\|y^2\|},\ M\frac{\|x^1\|}{\|x^2\|}\right\} \le \varepsilon_1. \tag{1.6}$$

Тогда по теореме 5 и условию 1 $|(y^2)^T x^2| \le s_{\max}\|x^2\|\|y^2\| \le s_{\max}$. Следовательно, $\|x^1\|\,\|y^1\| \ge |(y^1)^T x^1| \ge |s(\lambda)| - |(y^2)^T x^2| \ge s(\lambda) - s_{\max}$. Пусть $\|y^1\| \ge \|x^1\|$ (случай $\|y^1\| < \|x^1\|$ обосновывается аналогично). Тогда $\|y^1\| \ge \sqrt{|s(\lambda)| - s_{\max}}$. Теперь воспользуемся тождеством (1.5). Поскольку $\|d_2\| \le \delta$, то $\lambda \in G_m(\delta)$ по теореме 4.

Рассмотрим случай, когда неравенство (1.6) нарушается. Пусть $M\|y^1\|/\|y^2\| > \varepsilon_1$ (вариант $M\|x^1\|/\|x^2\| > \varepsilon_1$ обосновывается аналогично). Следовательно,

$$M\frac{\|y^2\|}{\|y^1\|} < \frac{M^2}{\varepsilon_1}.$$

Далее, с помощью тех же рассуждений, как и в первом случае, имеем $\lambda \in G_m(\delta)$. $\square$

Введем константы $M_1 = \|A^{12}\|$, $M_2 = \|A^{21}\|$. Следующая лемма дает оценки, вообще говоря, худшие по сравнению с леммой 1. Однако применимость леммы 1 требует малости M, в то время как для применимости следующей леммы достаточно малости M_2.

Лемма 2. *Пусть выполнено условие* 1 *и для собственного значения* λ *матрицы* A *выполняется неравенство* $|s(\lambda)| > s_{\max}$. *Тогда* $\lambda \in G_m(\delta)$, *где*

$$\delta = \max\left\{\frac{M_2}{|s(\lambda)| - s_{\max}},\ \frac{M_1 M_2}{\varepsilon_1}\right\}.$$

Доказательство. Пусть $\{\lambda, x, y\}$ — собственная тройка матрицы A. Непосредственно из определения собственных векторов x, y, пользуясь блочной формой записи и производя нормировку векторов, имеем тождества

$$\begin{aligned} (A^{22}-\lambda)\frac{x^2}{\|x^2\|} &= r_1, \quad \|r_1\| \le M_2\|x^1\|/\|x^2\|; \\ \frac{(y^2)^T}{\|y^2\|}(A^{22}-\lambda) &= d_1, \quad \|d_1\| \le M_1\|y^1\|/\|y^2\|; \end{aligned} \tag{1.7}$$

$$\begin{aligned} (A^{11}-\lambda)\frac{(x^1)^T}{\|x^1\|} &= r_2, \quad \|r_2\| \le M_1\|x^2\|/\|x^1\|; \\ \frac{(y^1)^T}{\|y^1\|}(A^{11}-\lambda) &= d_2, \quad \|d_2\| \le M_2\|y^2\|/\|y^1\|. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Воспользуемся равенством (1.7) и рассмотрим два случая. Случай первый: выполнено неравенство

$$\max\left\{M_1\frac{\|y^1\|}{\|y^2\|},\ M_2\frac{\|x^1\|}{\|x^2\|}\right\}\le\varepsilon_1. \tag{1.9}$$

Тогда по теореме 5 и условию 1 $|(y^2)^Tx^2|\le s_{\max}\|x^2\|\|y^2\|\le s_{\max}$. Следовательно, $\|y^1\|\ge\|x^1\|\,\|y^1\|\ge|(y^1)^Tx^1|\ge|s(\lambda)|-|(y^2)^Tx^2|\ge s(\lambda)-s_{\max}$. Теперь воспользуемся второй строчкой в (1.8). Поскольку $\|d_2\|\le\delta$, то $\lambda\in G_m(\delta)$ по теореме 4.

Рассмотрим случай, когда неравенство (1.9) нарушается. Возможны два варианта. Если $M_1\|y^1\|/\|y^2\|>\varepsilon_1$, то

$$\|d_2\|\le M_2\frac{\|y^2\|}{\|y^1\|}<\frac{M_1M_2}{\varepsilon_1}.$$

Поэтому снова имеем $\lambda\in G_m(\delta)$. Если $M_2\|x^1\|/\|x^2\|>\varepsilon_1$, то

$$\|r_2\|\le M_1\frac{\|x^2\|}{\|x^1\|}<\frac{M_1M_2}{\varepsilon_1}.$$

Далее, чтобы закончить доказательство леммы, осталось воспользоваться первой строчкой (1.8) и теоремой 4. □

2. Априорные условные оценки устойчивости

В данном параграфе получим теорему об оценках устойчивости в предположении, что точная матрица A принадлежит некоторому классу. В этом случае возможно указать подобное преобразование $\widehat{A}=P^{-1}AP$, разбить матрицу $\widehat{A}$ на блоки (см. разбиение перед леммой 1) и для соответствующего блока вычислить константы в условии 1. Тогда применение леммы 1 к матрицам $\widehat{A}$ и $\widehat{A}^\varepsilon=P^{-1}A^\varepsilon P$ даст условную оценку устойчивости.

Приведем примеры блоков A^{22}, для которых выполнено условие 1, и найдем константы ε_1, $s_{\max}$. Начнем с жордановой клетки $J_n(\widehat{\lambda})$ размера $n\times n$. Справедлива

Лемма 3. *Пусть $J_n(\widehat{\lambda})$ — жорданова клетка, $n\ge 2$. Тогда для всех $\varepsilon_2\le 1/n$, для всех $n\times n$ матриц $\Delta:\|\Delta\|\le\varepsilon_2$, для любой собственной тройки $\{\lambda^\Delta,x,y\}$ ($\|x\|=\|y\|=1$) матрицы $J_n(\widehat{\lambda})+\Delta$ справедлива оценка $|y^Tx|\le 2\sqrt{2\varepsilon_2 n}$.*

Доказательство. Проведем доказательство для четного n (для нечетного n доказательство аналогично). Сначала оценим величину $\Big(\sum\limits_{n/2+1}^{n}|x_i|^2\Big)^{1/2}$.

Ввиду теоремы 5 x, y являются "почти" собственными функциями для жордановой клетки, т.е. $J_n(\mu)x=r$, $y^TJ_n(\mu)=d$, $\mu=\widehat{\lambda}-\lambda^\Delta$, $\sup\{\|r\|,\|d\|\}\le\varepsilon_2$. Таким образом, $x=[J_n(\mu)]^{-1}r$, $\|r\|\le\varepsilon_2$. Нетрудно выписать в явном виде матрицу $[J_n(\mu)]^{-1}$ и проверить, что для любого $1<k\le n$ справедливо равенство

$$x_1=\frac{r_1}{\mu}-\frac{r_2}{\mu^2}+\cdots+(-1)^k\frac{r_{k-1}}{\mu^{k-1}}+(-1)^{k+1}\frac{x_k}{\mu^{k-1}}. \tag{2.1}$$

Также отметим, что поскольку λ^Δ есть собственное число матрицы $J_n(\widehat{\lambda})+\Delta$ и $\|\Delta\|\le\varepsilon_2$, то $|\mu|=|\widehat{\lambda}-\lambda^\Delta|\le(\varepsilon_2)^{1/n}<(1/n)^{1/n}<1$.

Продолжим доказательство от противного. Пусть существует $n/2<k\le n$ такое, что выполнено неравенство $|x_k|>2(\varepsilon_2)^{1/2}$. Тогда ввиду (2.1), оценки $|\mu|\le(\varepsilon_2)^{1/n}$ и предположения $k-1\ge n/2$

$$|x_1|\ge\frac{1}{|\mu|^{k-1}}\left[|x_k|-\sum_1^{k-1}|r_i|\right]>\frac{1}{\varepsilon_2^{1/2}}[2(\varepsilon_2)^{1/2}-\varepsilon_2\times\sqrt{n}\,].$$

Пользуясь условием леммы $\varepsilon_2 \le 1/n$, продолжаем это неравенство и приходим к неравенству $|x_1| > 1$, что противоречит условию $\|x\| = 1$. Таким образом, $|x_k| \le 2(\varepsilon_2)^{1/2}$, $k = n/2+1, \ldots, n$.

Следовательно, $\Big(\sum\limits_{n/2+1}^{n} |x_i|^2\Big)^{1/2} \le \sqrt{2\varepsilon_2 n}$. Аналогично можно получить оценку $\Big(\sum\limits_{1}^{n/2} |y_i|^2\Big)^{1/2} \le \sqrt{2\varepsilon_2 n}$. Из неравенства Коши–Буняковского получим

$$|y^T x| \le \left|\sum_1^{n/2} y_i x_i\right| + \left|\sum_{n/2+1}^{n} y_i x_i\right| \le \left(\sum_1^{n/2} |y_i|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{n/2+1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2} \le 2\sqrt{2\varepsilon_2 n}. \quad \square$$

В качестве следующего примера рассмотрим блочно-диагональную матрицу D, на диагонали которой стоят жордановы клетки $J_k(\lambda_k)$ порядков m_k, $k = 1, 2, \ldots, L$, $n = m_1 + m_2 + \cdots + m_L$. Будем считать, что m_k упорядочены по возрастанию и $m_1 \ge 2$.

Лемма 4. *Пусть D — блочно-диагональная матрица с жордановыми клетками на диагонали, $m_1 \ge 2$. Тогда для всех $\varepsilon_2 \le 1/n$, для всех $n \times n$ матриц $\Delta : \|\Delta\| \le \varepsilon_2$, для любой собственной тройки $\{\lambda^\Delta, x, y\}$ ($\|x\| = \|y\| = 1$) матрицы $D + \Delta$ справедлива оценка*

$$|y^T x| \le 2L\sqrt{2\varepsilon_2 n}.$$

Доказательство. Для простоты изложения проведем доказательство для случая $L = 2$ (в общем случае все рассуждения аналогичны). Будем при этом разбивать все векторы на две части и пользоваться соответствующими обозначениями, введенными перед леммой 1.

Пусть $\{\lambda^\Delta, x, y\}$ — собственная тройка матрицы $D + \Delta$. Оценим сверху величину $|y^{jT} x^j|$, $j = 1, 2$, обозначив $\rho_j = \min\{\|x^j\|, \|y^j\|\}$. Если $\rho_j = 0$, то $|y^{jT} x^j| = 0$. В противном случае справедливы равенства

$$(J_j - \lambda^\Delta)\frac{x^j}{\|x^j\|} = r_j, \quad \|r_j\| \le \varepsilon_2/\rho_j;$$

$$\frac{y^{jT}}{\|y^{jT}\|}(J_j - \lambda^\Delta) = d_j^T, \quad \|d_j\| \le \varepsilon_2/\rho_j.$$

Если $\varepsilon_2/\rho_j \le 1/m_j$, то по лемме 3

$$\frac{|y^{jT} x^j|}{\|y^j\|\,\|x^j\|} \le 2\sqrt{2m_j/\rho_j}.$$

Следовательно, $|y^{jT} x^j| \le 2\sqrt{2n\varepsilon_2\rho_j} \le 2\sqrt{2n\varepsilon_2}$. В противном случае $\rho_j < n\varepsilon_2$ и $|y^{jT} x^j| \le \rho_j \le n\varepsilon_2$. Легко убедиться, что $\max\{2\sqrt{2n\varepsilon_2}, n\varepsilon_2\} = 2\sqrt{2n\varepsilon_2}$ при $\varepsilon_2 \le 1/n$. Тогда $|y^T x| \le \sum_1^L |y^{jT} x^j| \le 2L\sqrt{2n\varepsilon_2}$. $\square$

Переформулируем известную теорему (см. теорему 4.9 в [1]), в которой итоговая оценка несколько загрублена с использованием неравенства $\|P^{-1}\varepsilon F P\| \le \operatorname{cond} P\varepsilon$. Введем необходимые обозначения. Пусть в разложении (1.2) матрицы A первые m собственных значений $\{\lambda_i\}$ отвечают простым собственным значениям, а остальные собственные значения — жордановым клеткам порядков $1 < m_1 \le m_2 \le \ldots m_l$ (нумерация жордановых клеток всегда может быть выбрана такой, чтобы их порядки возрастали). Также обозначим $\operatorname{cond} P = \|P\| \times \|P^{-1}\|$, а через $k = m_L$ — индекс матрицы.

Теорема 6. *Пусть P приводит точную матрицу A к канонической форме. Для всякого собственного значения λ_i^ε возмущенной матрицы A^ε существует собственное значение λ_i матрицы A такое, что*

$$|\lambda_i - \lambda_i^\varepsilon|^k / (1 + |\lambda_i - \lambda_i^\varepsilon|^{k-1}) \le \operatorname{cond} P\varepsilon.$$

Если обозначить через $\omega(k,\varepsilon)$ наименьший неотрицательный корень уравнения $\tau^k = \varepsilon(1+\tau)^{k-1}$, то можно установить взаимно однозначное соответствие между собственными значениями матриц A и A^ε: $\lambda_i \longleftrightarrow \lambda_i^\varepsilon$, $i = 1,2,\ldots,n$, при котором $|\lambda_i - \lambda_i^\varepsilon| \le (2n-1)\omega(k, \operatorname{cond} P\varepsilon)$.

Видно, что при малых ε величина $|\lambda_i - \lambda_i^\varepsilon|$ имеет порядок малости $\varepsilon^{1/k}$. На основе лемм 1 и 4 получим теорему, дающую условные оценки устойчивости для матриц, каноническая форма которых содержит жордановы клетки порядка большего единицы. Положим $G_m(\delta) = \bigcup\limits_{i=1}^{m}\{\lambda : |\lambda - \lambda_i| \le \delta\}$.

Теорема 7. *Пусть P приводит точную матрицу A к канонической форме, при этом первые m собственных значений $\{\lambda_i\}$, $i = 1,2,\ldots,m$, простые, остальные отвечают жордановым клеткам порядка больше единицы, $\{\lambda^\varepsilon, x^\varepsilon, y^\varepsilon\}$ — собственная тройка матрицы A^ε, возмущенной согласно* (1.3), *$s^\varepsilon = y^{\varepsilon T} x^\varepsilon$ ($\|y^\varepsilon\| = \|x^\varepsilon\| = 1$). Тогда для всех $\varepsilon \le |s^\varepsilon|^2/(32nL^2 \operatorname{cond} P)$ $\lambda^\varepsilon \in G_m(\delta)$, где $\delta = \sqrt{2}\operatorname{cond}^2 P\varepsilon/\sqrt{|s^\varepsilon|}$.*

Доказательство. Обозначим $x_D^\varepsilon = Px^\varepsilon$, $y_D^\varepsilon = y^{\varepsilon T}P^{-1}$. Тогда из свойств преобразования подобия (см. равенства (1.1) и (1.2)) следует, что $x_D^\varepsilon, y_D^\varepsilon$ суть левый и правый собственные векторы матрицы $D^\varepsilon = D + \varepsilon P^{-1}FP$. Нетрудно проверить, что

$$|s^\varepsilon| = |y_D^\varepsilon x_D^\varepsilon| = |s_D^\varepsilon| \cdot (\|x_D^\varepsilon\| \cdot \|y_D^\varepsilon\|) \le \operatorname{cond} P |s_D^\varepsilon|, \tag{2.2}$$

где s_D^ε — локальное число обусловленности собственного числа λ^ε для матрицы D^ε.

Разобьем матрицы D и $D + \varepsilon P^{-1}FP$ на клетки, как это показано перед леммой 1. Для блока D^{22} по лемме 4 выполнено условие 1 при $\varepsilon_1 = \varepsilon \operatorname{cond} P \le 1/n$, $s_{\max} = 2L\sqrt{2n\varepsilon \operatorname{cond} P}$ (воспользовались неравенством $\varepsilon\|P^{-1}FP\| \le \varepsilon \operatorname{cond} P$).

Используя (2.2), легко проверить, что из условия теоремы $\varepsilon \le |s^\varepsilon|^2/(32nL^2 \operatorname{cond} P)$ следует $|s_D^\varepsilon| \ge 2s_{max}$. Это не только обеспечивает применимость леммы 1 к матрицам D и D^ε, но и оценку для величины $\delta \le \sqrt{2}\operatorname{cond} P\varepsilon/\sqrt{|s_D^\varepsilon|}$. Заметим, что блок D^{11} есть диагональная матрица и поэтому его глобальное число обусловленности $K^{11} = 1$. Продолжая неравенство для величины δ, с учетом (2.2) имеем оценку $\delta \le \sqrt{2}\operatorname{cond}^2 P/\sqrt{|s^\varepsilon|}$. $\square$

Применим теорему к матрицам A, A^ε из примера 1. В этом случае $\operatorname{cond} P = 1$ (P — единичная матрица), $m = 1$.

Следствие. Пусть A — матрица из примера 1, A^ε — возмущенная в соответствии с (1.3) матрица. Если $\{\lambda^\varepsilon, x^\varepsilon, y^\varepsilon\}$ — собственная тройка возмущенной матрицы A^ε, то для всех $\varepsilon \le |s^\varepsilon|^2/(32n)$ справедливо неравенство $|1 - \lambda^\varepsilon| \le \sqrt{2}\varepsilon/\sqrt{|s^\varepsilon|}$.

Для конкретных значений параметров найдем оценку из следствия. Пусть $n = 11$, $\varepsilon = \sqrt{0.1 \times 0.2^{10}} \approx 1 \times 10^{-4}$. Без привлечения дополнительной информации о хорошей обусловленности λ^ε при этом значении ε имеем $\sup|1 - \lambda^\varepsilon| \ge 0.1$, где супремум берется по всевозможным возмущениям $\|F\| \le 1$. Наложим дополнительное условие $|s^\varepsilon| \ge 1/2$ на матрицу A^ε. Легко видеть, что условие $\varepsilon \le |s^\varepsilon|^2/(32n) \le 1/(4 \times 32 \times 11)$ выполнено. Поэтому оценка из следствия принимает вид $|1 - \lambda^\varepsilon| < 3 \times 10^{-4}$. Проводя аналогичные расчеты для $n = 21$, $\varepsilon = \sqrt{0.1 \times 0.2^{20}} \approx 3 \times 10^{-8}$, имеем оценку $|1 - \lambda^\varepsilon| < 5 \times 10^{-8}$. Таким образом, априорная информация $|s^\varepsilon| \ge 1/2$ позволяет получить оценки, лучшие на несколько порядков по сравнению с оценками, не использующими дополнительную априорную информацию.

3. Апостериорные условные оценки устойчивости

Необходимо отметить, что матрицы A и A^ε входят в леммы 1 и 2 симметрично (их можно поменять местами). Поэтому возможен и другой подход, когда центральной матрицей является возмущенная матрица A^ε. В этом случае условие 1 необходимо проверять для блока $A^{\varepsilon 22}$, который известен и для которого возможно строить численные алгоритмы оценки констант в условии 1. Будем рассматривать случай, когда возмущенная матрица имеет вид

$$A^\varepsilon = \begin{pmatrix} A^{\varepsilon 11} & A^{\varepsilon 12} \\ 0 & A^{\varepsilon 22} \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

где через 0 обозначена нулевая матрица размера $m \times (n-m)$. Обозначим через $G^\varepsilon_m(\delta)$ область локализации собственных чисел блока $A^{\varepsilon 11}$ (центральной матрицей является матрица $A^{\varepsilon 11}$, возмущенные матрицы имеют вид $A^{\varepsilon 11} + \Delta$, $\|\Delta\| \le \delta$.) Введем

Условие $1'$. Существуют постоянные $0 < \varepsilon_1 < 1$, $s_{\max}$ такие, что для всех $(m-m)\times(n-m)$ матриц Δ, для которых $\|\Delta\| \le \varepsilon_1$ выполняется неравенство $|s(\lambda^\Delta)| \le s_{\max}$, где λ^Δ — произвольное собственное число блока $A^{\varepsilon 22} + \Delta$.

Рассмотрим ситуацию, в которой естественным образом может возникнуть матрица в форме (3.1) и для которой можно предполагать выполненным условие $1'$. Пусть имеем алгоритм определения “почти собственной тройки” $\{\lambda^\varepsilon, x^\varepsilon, y^\varepsilon\}$ заданной матрицы, которая является хорошо обусловленной, т. е. $|s^\varepsilon| = |y^{\varepsilon T} x^\varepsilon|$ не мало. Тогда согласно теореме 5 для близкой матрицы $\{\lambda^\varepsilon, x^\varepsilon, y^\varepsilon\}$ будет точной собственной тройкой. Не меняя обозначений, перейдем к этой матрице. При этом всегда существует ортогональное (унитарное) отображение U, которое переводит x^ε в вектор $(1, 0, \ldots, 0)^T$. Совершим преобразование подобия $A^\varepsilon \to UA^\varepsilon U^T$ (не меняя обозначений, считаем, что матрица A^ε уже есть преобразованная матрица). Далее алгоритм определения “почти собственной тройки” применяется к блоку $A^{\varepsilon 22}$. Процедура повторяется до тех пор, пока для блока $A^{\varepsilon 22}$ не выполнится условие $1'$ с достаточно большим ε_1 и малым $s_{\max}$. Возникающая при этом матрица имеет вид (3.1) (с верхней треугольной матрицей $A^{\varepsilon 11}$). В этом случае можно применить сформулированную ниже теорему, которая очевидным образом следует из леммы 2. Напомним, что через M_2 обозначается $\|A^{\varepsilon 12}\|$.

Теорема 8. *Пусть λ — собственное значение неизвестной точной матрицы A такой, что $\|A - A^\varepsilon\| \le \varepsilon$, известная возмущенная матрица A^ε имеет вид* (3.1), *для блока $A^{\varepsilon 22}$ выполнено условие $1'$ с константами ε_1, $s_{\max}$. Если априори известно, что $|s(\lambda)| > s_{\max}$, то $\lambda \in G^\varepsilon_m(C\varepsilon)$, где $C = \max\{1/(|s(\lambda)| - s_{\max}),\ M_2/\varepsilon_1\}$.*

Приведем пример, для которого предыдущая теорема применима.

Пример 2. Пусть

$$A^\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 1.2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ & \cdots & & \cdots & & & \\ & \cdots & & \cdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1.1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1.1 \end{pmatrix}$$

— возмущенная матрица размера $n \times n$, у которой два локально хорошо обусловленных собственных значения 1.2 и 1: $k(1) = 1/\sqrt{2}$, $k(1.2) = 1$. Положим $m = 2$. По лемме 4 для блока $A^{\varepsilon 22}$ условие $1'$ выполнено, например, при $\varepsilon_1 = 1/(64n)$, $s_{\max} = \sqrt{(n-2)/n}/4 < 1/4$. Пусть априори известно, что у точной матрицы A существует $\lambda : |s(\lambda)| \ge 1/2$ $(k(\lambda) \le 2)$. Тогда по теореме 8 $C \le \max\{1/(1/2-1/4), 1/\varepsilon_1\} = 64n$. Следовательно, $\lambda \in \{\widehat{\lambda} : |\widehat{\lambda}-1| \le 64n\varepsilon\} \bigcup \{\widehat{\lambda} : |\widehat{\lambda}-1.2| \le 64n\varepsilon\}$. Интересно заметить, что, например, при $n = 23$, $\varepsilon = \sqrt{0.1 \times 0.2^{20}} \approx 3 \times 10^{-8}$ круги разделяются: $\lambda \in \{\widehat{\lambda} : |\widehat{\lambda}-1| \le 4.6\times 10^{-5}\} \bigcup \{\widehat{\lambda} : |\widehat{\lambda}-1.2| \le 4.6\times 10^{-5}\}$. Тем не менее невозможно указать, какому из кругов будет принадлежать точное значение (легко построить две матрицы $A_1 : \|A_1 - A^\varepsilon\| \le \varepsilon$,

$A_2 : \|A_2 - A^\varepsilon\| \leq \varepsilon$ такие, что у матрицы A_1 хорошо обусловленным будет только одно собственное значение — $\lambda = 1.2$, а у матрицы A_2 единственным хорошо обусловленным собственным значением будет $\lambda = 1$).

Литература

1. Икрамов Х.Д. *Несимметричная проблема собственных значений. Численные методы.* – М.: Наука, 1991.– 240 с.
2. Коробов В.И. *Регуляризация экстремальных собственных значений для симметричной обобщенной задачи* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1988. – Т. 28. – № 10. – С. 1443–1448.
3. Васин В.В., Агеев А.Л. *Некорректные задачи с априорной информацией.* – Екатеринбург: Наука, 1993. – 260 с.

Институт математики и механики
Уральского отделения
Российской Академии наук

Поступила
27.01.2000