22. Потоки платежей

В чём бы ни заключалась та или иная конкретная задача финансовой математики, в её условии всегда будет присутствовать некий набор денежных выплат. Даже самая тривиальная финансовая операция — простая ссуда — содержит два платежа: выдачу ссуды и её возврат. Эти два платежа, рассматриваемые в совокупности, представляют собой простейший пример денежного потока, или потока платежей.

Поток платежей (англ. *cash flow*) — это последовательность денежных сумм, каждая из которых отнесена к некоторому моменту времени (такие денежные суммы называются *датированными*).

Почему в определении денежного потока делается акцент на дату совершения платежа? Потому, что деньги имеют разную ценность в разные моменты времени. Сто рублей сегодня стоят больше, чем сто рублей завтра. Во-первых, вы можете их немедленно инвестировать и получить прирост капитала. То есть 100 рублей сегодня превращаются в чуть больше ста рублей завтра, а, значит, сейчас они имеют бóльшую ценность, чем в любой момент в будущем. Во-вторых, в любом случае ваши сбережения съедает инфляция, поэтому с точки зрения покупательской способности 100 рублей сегодня ценнее, чем та же сумма завтра.

Денежные суммы в потоке платежей могут быть как положительными, так и отрицательными. В первом случае они отражают ваши поступления, во втором — ваши выплаты. Вообще говоря, любая финансовая операция с точки зрения любой из сторон содержит как поступления, так и выплаты. Поэтому полный поток платежей любой финансовой операции всегда содержит денежные суммы разных знаков. Другое дело, что в конкретном случае вы можете рассматривать не весь поток платежей, а лишь его часть.

Пример.

Если вы вложили 1 млн рублей в банк под 13% годовых и сняли накопленную сумму через год, то ваш поток платежей будет таким:

Дата платежа, год	**Размер платежа, руб**
0	– 1 000 000
1	1 130 000

Начальная сумма в 1 млн рублей является вашими вложениями (фактически, это ваши расходы), которые должны учитываться со знаком минус. Если бы мы строили поток платежей этой же операции, но с точки зрения банка, то знаки денежных сумм поменялись бы на противоположные (ваши выплаты являются поступлениями для банка, и наоборот).

Особенность использования понятия потока платежей заключается в том, что вся совокупность выплат рассматривается и изучается как единый объект, обладающий определённым набором характеристик и свойств. Этот объект мы в дальнейшем будем обозначать следующим образом, как это принято в математике:

$$A = \{A_k;\, t_k\}.$$

Здесь A_k — это платёж, совершённый в момент времени t_k, а A — весь поток платежей.

Бесконечные потоки платежей

В некоторых задачах, когда рассматриваются платежи за продолжительный период времени, удобно считать, что соответствующий поток платежей является *бесконечным*, то есть содержит бесконечное число платежей.

Следует всегда помнить, что в реальной жизни по-настоящему бесконечных потоков платежей быть не может, то есть бесконечный денежный поток — это всего лишь математическая модель продолжительного, но *конечного* процесса денежных выплат.

Пример.

Когда рассматриваются выплаты по облигациям, срок обращения которых составляет сто лет, то при расчётах удобно «продолжить» этот столетний промежуток времени до бесконечности. При этом ошибка в получаемых результатах будет крайне невелика, зато расчётные формулы становятся значительно более удобными.

Замечание. В мире существуют облигации, главным образом государственные (например, «британские консоли»), не имеющие срока обращения. Их владелец получает постоянный ежегодный доход в течение неограниченного периода времени. Однако даже денежные потоки, генерируемые такими облигациями, не являются по-настоящему бесконечными. Просто потому, что в природе не существует ничего по-настоящему бесконечному (конечно, если абстрагироваться от религиозной стороны вопроса). Кстати говоря, в России период обращения любых облигаций ограничен 30 годами.

Финансовые ренты

Как мы уже много раз отмечали, в финансовых расчётах зачастую принимается допущение, что платежи осуществляются через одинаковые промежутки времени — день, месяц, год. Такие денежные потоки называются *финансовыми рентами* (или просто *рентами*).

Например, финансовую ренту образует любой поток выплат по обычному кредиту, если график погашения строится предварительно, когда ещё неизвестны точные даты внесения очередных платежей.

Наибольшую практическую ценность представляют следующие виды финансовых рент:

1. *Постоянной рентой* называется рента, все платежи которой одинаковы. Постоянную ренту также часто называют *аннуитетом*, а её платежи — *аннуитетными* (с этими понятиями вы уже немного знакомы). Примером постоянной ренты является совокупность выплат по кредиту, погашаемому в соответствии с аннуитетной схемой.
2. *Рентой с постоянным темпом роста* (с постоянным относительным приращением) называется рента, платежи которой образуют геометрическую прогрессию. Мы с вами пока что не сталкивались с подобными видами рент. Собственно говоря, чаще всего подобные ренты не соответствуют реальным потокам платежей, а используются для моделирования. Например, при моделировании деятельности компаний иногда предполагают, что их стоимость (и размер дивидендов) будет увеличиваться постоянными темпами. Также этот вид рент часто используется для определения реальной, очищенной от инфляционной составляющей, стоимости аннуитета. Но обо всём этом мы будем подробно говорить в последующих параграфах.
3. *Рентой с постоянным абсолютным приращением* называется рента, платежи которой образуют арифметическую прогрессию. Примером такой ренты служит поток платежей по кредиту, погашаемому в соответствии с дифференцированной схемой.

Ренты (или потоки платежей, очень к ним близкие), составляют основную долю всех денежных потоков. Поэтому мы в дальнейшем будем изучать именно их (возможно, за какими-то редкими исключениями).

23. Приведение датированных сумм

В предыдущем параграфе мы затронули вопрос о том, что деньги, относящиеся к разным моментам времени, имеют различную ценность. Одним из следствий этого факта является то, что платежи, совершённые в разные моменты времени, нельзя напрямую сравнивать между собой. Действительно, что более выгодно, иметь 100 рублей сейчас или 115 рублей через год? Без дополнительных условий ответить на этот вопрос нельзя.

К примеру, допустим, что перед вами стоит выбор: получить 100 рублей прямо сейчас или 115 рублей через год. Если вы *предпочитаете будущее потребление настоящему* (то есть не можете или не хотите тратить 100 рублей сейчас, а хотите потратить всё через год), то вас должны интересовать все имеющиеся у вас возможности вложения денег.Предположим, что лучшее (в плане будущей прибыли) из того, что вы можете сделать со своими деньгами, — это вложить их под 12% годовых. Тогда, даже имея сейчас на руках 100 рублей, максимум, что вы получите через год, — это 112 рублей. Это меньше, чем обещанные вам 115 рублей, поэтому вам следует отказаться от нынешних 100 рублей в пользу будущих 115. Если бы вы располагали возможностью вкладывать деньги, скажем, под 18% годовых, то вам было бы выгоднее взять 100 рублей сейчас, вложить их под 18% и получить через год 118 рублей.

А что будет, если вы всё-таки *предпочитаете настоящее потребление будущему*? Ну, скажем, если у вас сейчас острая нехватка наличных денег. В этом случае вас должны интересовать не возможности вложения денег, а возможности взятия кредитов. Например, если самая лучшая процентная ставка, под которую вы можете взять кредит, — это 12% годовых, то вам по-прежнему стоит отказаться от нынешних 100 рублей в пользу будущих 115 рублей. При этом вы берёте кредит размером 115/1,12 ≈ 103 рубля, а через год возвращаете ваш долг, который составит 115 рублей. Понятно, что если вам никто не хочет давать ссуду под процентную ставку, меньшую, чем 15% годовых, то вам выгоднее оставить у себя 100 рублей (и тут же их потратить).

Как видите, в обоих случаях результат сравнения настоящей и будущей суммы денег напрямую зависит от такого дополнительного параметра, как процентная ставка (размер которой зависит ещё от ряда условий). Используя эту процентную ставку, мы определяем стоимость всех платежей на определённый (общий) момент времени. После того, как все платежи *приведены* к общему моменту времени, они становятся однородными, и их можно напрямую сравнивать между собой, а также суммировать.

Дадим теперь более строгое определения введённого нами понятия.

Приведением датированной суммы денег к определённому моменту времени называется вычисление её стоимости в этот момент времени с использованием некоторой сложной процентной ставки.

То есть, если платёж A совершён в момент времени t, и задана некоторая сложная процентная ставка i, то приведение этого платежа к произвольному моменту времени T — это нахождение величины

$$B = A \cdot (1+i)^{T-t},$$

которая называется *приведённой* (на момент T) стоимостью платежа A.

Если T = 0, то есть если находится приведённая стоимость платежа на начальный момент времени, то такая операция называется *дисконтированием*.

Смысл операции приведения (и, в частности, дисконтирования) платежей заключается в том, чтобы определить, сколько они могут стоить в различные моменты времени, при условии, что мы имеем возможность вложения денег или получения кредита под заданную процентную ставку.

Пример.

Будущая стоимость одного миллиона рублей, вложенного в банк под сложную ставку 8% годовых (это может быть неоднократно пролонгируемый годовой вклад под *простую* ставку 8%), составит:

- через год: $1\,000\,000 \cdot (1 + 0{,}08) = 1\,080\,000$ рублей;
- через два года: $1\,000\,000 \cdot (1 + 0{,}08)^2 = 1\,164\,400$ рублей;
- через три года: $1\,000\,000 \cdot (1 + 0{,}08)^3 = 1\,259\,712$ рублей.

Если вы рассматриваете альтернативную возможность вложения денег, которая предлагает через три года сумму 1,2 миллиона рублей, то вам, очевидно, стоит от неё отказаться. Этот же вывод можно было сделать, продисконтировав сумму 1,2 миллиона рублей по сложной ставке 8% годовых:

$1\,200\,000 \cdot (1 + 0{,}08)^{-3} \approx 952\,599$ рублей.

Это меньше, чем имеющаяся у вас сумма в 1 млн рублей, что также говорит о том, что альтернативную возможность вложения денег следует отвергнуть.

24. Современная стоимость потока платежей

В предыдущем параграфе мы говорили о нахождении приведённой стоимости произвольной датированной суммы денег. Мы отметили, что два или более платежа, приведённые к одному и тому же моменту времени, могут не только напрямую сравниваться между собой, но и суммироваться. Последнее свойство называется *принципом слагаемости стоимостей*.

Пример.

Поясним принцип слагаемости стоимостей на простом примере. Допустим, что некие надёжные люди предлагают вам вложить в их предприятие 40 тысяч евро и гарантируют, что в качестве компенсации выплатят вам в конце первого и второго годов по 30 тысяч евро. Таким образом, денежный поток данной финансовой операции задаётся следующей таблицей:

Год	**Платёж, евро**
0	– 40 000

Год	Платёж, евро
1	30 000
2	30 000

Допустим, что лучший из доступных вам альтернативных способов размещения средств — это вложить их под 25% годовых. Как определить, стоит ли вам принимать участие в предлагаемом проекте или нет?

Чтобы ответить на этот вопрос, вы можете рассуждать следующим образом. Чтобы получить через год 30 тысяч евро, сегодня вам нужно вложить $30 \cdot (1 + 0{,}25)^{-1} = 24$ тысячи евро под 25% годовых. Аналогично, чтобы получить 30 тысяч евро через два года, сегодня вам нужно вложить $30 \cdot (1 + 0{,}25)^{-2} = 19{,}2$ тысячи евро. Сумма этих вложений составляет 43,2 тысячи евро, что на 3,2 тысячи больше, чем имеющаяся у вас на руках сумма. Значит, ваш альтернативный способ вложения денег по сравнению с предлагаемым проектом требует бо́льших начальных вложений при том же будущем доходе. То есть он хуже.

В основе этого рассуждения, очевидно, лежит операция сложения дисконтированных значений платежей. То есть сначала мы нашли дисконтированное значение вашего первого денежного поступления (получилось 24 тысячи евро), затем второго (19,2 тысячи), а затем мы их сложили и получили результат, на 3,2 тысячи превосходящий имеющиеся у вас в начальный момент денежные средства. То есть сравнили сумму дисконтированных значений ваших поступлений и ваши начальные вложения, и на основании этого сравнения сделали наш вывод.

Дисконтирование потока платежей

Как видно из примера, принцип слагаемости стоимостей позволяет определять приведённую стоимость целого денежного потока как сумму приведённых стоимостей его платежей. Как мы увидим далее, в практических расчётах обычно вычисляется приведённая стоимость потоков платежей на начальный момент времени, которая называется *современной стоимостью* потока.

Формализуем это понятие. Пусть $A = \{A_k;\ t_k\}$ — это произвольный денежный поток. Допустим, что также задана некоторая сложная годовая процентная ставка i, которая называется *ставкой дисконтирования*. Тогда *современной стоимостью* потока платежей A относительно данной процентной ставки называется число

(24.1) $$A(0) = \sum_{k=1} \frac{A_k}{(1+i)^{t_k}}.$$

Современную стоимость потока платежей также часто называют его *приведённой стоимостью* (опуская упоминание о том, что платежи приводятся именно к начальному моменту времени).

Каждое слагаемое в правой части формулы (24.1) — это современное (дисконтированное) значение будущего платежа A_k. Действительно, если вложить сумму денег

$$\frac{A_k}{(1+i)^{t_k}}$$

под сложную процентную ставку i на период времени t_k, то по его окончании сумма вклада составит

$$\frac{A_k}{(1+i)^{t_k}} \cdot (1+i)^{t_k} = A_k.$$

Как вы помните, нахождение текущей стоимости будущего значения капитала называется *дисконтированием*. Значит, формулу (24.1) можно описать таким образом: современная стоимость денежного потока равна сумме дисконтированных значений его платежей.

Пример.

Напомню, что эффективная процентная ставка — это сложная процентная ставка по кредиту, рассчитанная в предположении, что все платежи, необходимые для получения данного кредита, идут на его погашение. Таким образом, современная стоимость потока выплат по кредиту (включая первоначальную комиссию), вычисленная с использованием его эффективной процентной ставки, в точности равна сумме кредита, а современная стоимость всего потока (с учётом всех как положительных, так и отрицательных платежей) равна нулю. Этот пример иллюстрирует принцип, согласно которому современная стоимость потока платежей по финансовому договору, который добровольно подписали две стороны, всегда равна нулю. Ведь в противном случае одна из сторон окажется в проигрыше и не станет подписывать такой договор. Тут, правда, есть одна тонкость, касающаяся ставки дисконтирования. Предполагается, что обе стороны действуют максимально эффективно, то есть для заёмщика эффективная ставка по данному договору является минимальной из всех возможных, а для кредитора — максимальной (при прочих равных условиях). Иначе такой договор просто не был бы подписан (так как минимум для одной стороны его условия не являлись бы оптимальными).

25. Современная стоимость постоянной ренты

В предыдущем параграфе мы познакомились с таким понятием, как современная стоимость потока платежей. На протяжении этого и двух последующих параграфов мы будем заниматься вычислением современной стоимости различных типов финансовых рент — наиболее важного класса денежных потоков.

Напомню, что финансовой рентой называется денежный поток, все платежи которого совершаются через одинаковые промежутки времени. Значит, формула (24.1) в случае финансовой ренты принимает следующий вид:

(25.1) $$R(0) = \sum_{k=1} \frac{R_k}{(1+i)^{k\tau}},$$

где τ — период внесения платежей. Как вы знаете, в финансовых расчётах, если речь идёт о сложных процентах, то обычно для упрощения вычислений используются номинальные процентные ставки. Номинальную годовую процентную ставку *j* с годовой сложной процентной ставкой *i* связывает соотношение

$$(1+i)^{\tau} = 1 + j\tau.$$

Значит, если вам известна только номинальная процентная ставка *j*, то формула (25.1) приобретает следующий вид:

(25.2) $$R(0) = \sum_{k=1} \frac{R_k}{(1+j\tau)^{k}}.$$

В дальнейшем мы всегда будем предполагать, что задана именно номинальная процентная ставка. Кстати говоря, если платежи осуществляются раз в год (а при анализе долгосрочных проектов это обычное дело), то номинальная процентная ставка совпадает со сложной.

Современная стоимость конечной постоянной ренты

Как вы помните, постоянной называется рента, все платежи которой имеют одинаковый размер (будем обозначать его *R*). Ясно, что для постоянной ренты формула (25.2) превращается в формулу вычисления суммы убывающей геометрической прогрессии с начальным членом $R \cdot (1 + j\tau)^{-1}$ и знаменателем $(1 + j\tau)^{-1}$. Если эта прогрессия имеет *n* членов, то её сумма равна

(25.3) $$R(0) = \frac{R}{1+j\tau} \cdot \frac{1-(1+j\tau)^{-n}}{1-(1+j\tau)^{-1}} = \frac{R}{j\tau} \cdot \left[1-(1+j\tau)^{-n}\right].$$

Пример.

Допустим, что вы хотите положить на банковский счёт некоторую сумму денег, чтобы в течение следующих 10 лет каждые полгода снимать оттуда по 500 тысяч рублей. Так совпало, что банк начисляет проценты тоже раз в полгода, причём номинальная процентная ставка по вкладу составляет 8%.

Ясно, что сумма, которую вы сейчас должны положить на счёт, равна современной стоимости нужного вам будущего денежного потока. Действительно, ведь каждый из дисконтированных платежей, будучи положенным на счёт, даст через соответствующий промежуток времени нужную вам выплату в 500 тысяч рублей.

Таким образом, искомая сумма денег может быть найдена с помощью формулы (25.3):

$R(0)=\dfrac{500}{0{,}08\cdot ½}\cdot\left[1-(1+0{,}08\cdot ½)^{-20}\right]\approx 6795$ тысяч рублей.

Значит, для того, чтобы в течение ближайших 10 лет каждые полгода снимать со счёта по 500 тысяч рублей, сейчас вам нужно отложить на эти цели около 7 миллионов. Если бы не существовало банков, и вам бы приходилось держать свои сбережения дома в сейфе, то вам нужно было бы отложить не 7, а 10 миллионов рублей.

Современная стоимость бесконечной постоянной ренты

Мы уже отмечали, что во многих финансовых задачах очень продолжительные потоки платежей удобно считать бесконечными. В этом случае вычисления становятся заметно проще, а ошибка получается совсем незаметной.

Формула для вычисления современной стоимости бесконечной постоянной ренты проста до неприличия. Посмотрите на множитель в квадратных скобках в формуле (25.3): выражение $(1 + j\,\tau)^{-n}$ при увеличении n становится всё меньше и меньше, и в пределе равно нулю. Значит, для бесконечной постоянной ренты множитель в квадратных скобках отбрасывается (вернее, превращается в единицу), и получается следующее соотношение:

(25.4) $$R(0)=\frac{R}{j\tau}.$$

Обратите внимание на тот интересный факт, что, хотя выплаты постоянны и производятся бесконечно долго, современная стоимость постоянной бесконечной ренты является вполне конечным числом. Это происходит потому, что деньги теряют свою ценность со скоростью начисления сложных процентов, и вклад бесконечно удалённых по времени платежей в современную стоимость ренты бесконечно мал.

Пример.

Продолжим предыдущий пример. Предположим, что по не вполне понятным причинам вы собираетесь жить вечно, и вас больше не устраивает десятилетнее ограничение на выплату денег. Если вы хотите, чтобы сумма в 500 тысяч рублей выплачивалась вам каждые полгода на протяжении бесконечно долгого времени, то сейчас вам следует положить на счёт в банке всего лишь

$R(0) = \frac{500}{0{,}08 \cdot ½} = 12500$ тысяч рублей.

Не так много, учитывая бесконечность ваших желаний.

26. Современная стоимость ренты с постоянным темпом роста

Рента с постоянным темпом проста, или рента с постоянным относительным приращением, — это рента, чьи платежи образуют геометрическую прогрессию (обычно возрастающую). Если обозначить размер первого платежа такой ренты через R, а темп роста остальных платежей — через g (соответственно, знаменатель геометрической прогрессии будет равен $1 + g$), то её современная стоимость будет вычисляться по общей формуле, полученной из формулы (25.2):

(26.1) $$R(0) = \sum_{k=1} \frac{R(1+g)^{k-1}}{(1+j\tau)^k} = \frac{R}{(1+j\tau)} \cdot \sum_{k=1} \left(\frac{1+g}{1+j\tau}\right)^{k-1}.$$

Современная стоимость конечной ренты с постоянным темпом роста

Как и в случае с постоянной рентой, дисконтированные платежи ренты с постоянным темпом роста образуют геометрическую прогрессию. Если эта прогрессия конечна и имеет n членов, то её сумма равна

(26.2) $$R(0) = \frac{R}{1+j\tau} \cdot \frac{1-\left(\frac{1+g}{1+j\tau}\right)^n}{1-\frac{1+g}{1+j\tau}} = \frac{R}{j\tau - g} \cdot \left[1-\left(\frac{1+g}{1+j\tau}\right)^n\right].$$

Современная стоимость бесконечной ренты с постоянным темпом роста

Для бесконечной ренты с постоянным темпом роста формула (26.2) заметно упрощается. Если темп роста платежей меньше процентной ставки, то есть если $g < j\tau$, то в правой части этой формулы дробь в круглых скобках, которая возводится в степень, меньше единицы. Значит, она стремится к нулю при бесконечном увеличении *n*. Таким образом, для бесконечной ренты выражение в квадратных скобках превращается в единицу, и мы получаем следующую элегантную формулу:

(26.3) $$R(0) = \frac{R}{j\tau - g}.$$

Обратите внимание, что если темп роста платежей превосходит (или хотя бы равен) процентной ставке, то современная стоимость такой бесконечной ренты не будет определена, так как правая часть формулы (26.2) будет неограниченно возрастать при увеличении *n*.

Пример.

Предположим, что вы рассматриваете возможность вложения своих денег в акции молодой перспективной компании «Нанобургер», которые в настоящий момент продаются по курсу 4000 рублей за одну акцию. Известно, что в конце прошлого года компания выплатила своим акционерам дивиденды в размере 100 рублей на акцию. Вы предполагаете, что в ближайшие пять лет, в период стремительного развития компании, темп роста дивидендов составит 20% в год. Затем, когда наступит период стабилизации, в соответствии с вашими ожиданиями дивиденды на акцию будут возрастать на 5% каждый год. Кроме того, вам известно, что акции других подобных компаний имеют доходность 10%. Ваша задача — выяснить, есть ли смысл приобретать акции рассматриваемой компании по предлагаемой цене 1000 рублей за акцию.

Ваши рассуждения могут иметь примерно следующее содержание. Если вы вложите свои деньги в акции «Нанобургера», то вы откажетесь от доходности 10% годовых, которую обеспечивают акции других подобных предприятий. Следовательно, 4000 рублей, которые вы вложите в акции этой компании, должны обеспечить вам денежный поток (в виде дивидендов), соответствующий доходности не ниже 10% годовых. Значит, всё, что вам нужно сделать, — это найти современную стоимость потока дивидендов, выплачиваемых ежегодно по одной акции «Нанобургера», с использованием ставки дисконтирования 10%. Если результат окажется больше 4000 рублей, то вам следует вкладывать деньги в акции этой компании, если меньше — то этого делать не стоит, так как акции других подобных компаний обеспечивают лучшую доходность.

Теперь, когда имеем конкретную вычислительную задачу, самое время взглянуть на поток платежей, который образуют дивиденды, выплачиваемые по одной акции «Нанобургера»:

Год	**Дивиденды на акцию, руб**	**Темп роста дивидендов**
1	120	20%

Год	Дивиденды на акцию, руб	Темп роста дивидендов
2	144	20%
3	173	20%
4	207	20%
5	249	20%
6	261	5%
7	274	5%
…	…	5%

Данный поток платежей можно разбить на две части: конечную ренту из 5 платежей с постоянным темпом роста 20% и первым платежом 120 рублей и бесконечную ренту с постоянным темпом роста 5% и первым платежом 261 рубль.

Современная стоимость первой ренты находится по формуле (26.2):

$$R_1(0) = \frac{120}{0{,}1-0{,}2}\cdot\left[1-\left(\frac{1+0{,}2}{1+0{,}1}\right)^5\right] \approx 654$$ рублей.

Современная стоимость второй (бесконечной) ренты находится в два этапа. Сначала по формуле (26.3) находится её стоимость *в конце пятого года*:

$$R_2(5) = \frac{261}{0{,}1-0{,}05} = 5220$$ рублей.

Затем эта сумма дисконтируется по ставке 10% годовых, чтобы найти современную стоимость второй ренты:

$$R_2(0) = \frac{5220}{(1+0{,}1)^5} \approx 3241$$ рубль.

Сумма $R_1(0)$ и $R_2(0)$ составляет примерно 3895 рублей. Это меньше, чем цена одной акции «Нанобургера», поэтому вам не следует вкладывать в них деньги.

27. Современная стоимость ренты с постоянным абсолютным приращением

Напомню, что рентой с постоянным абсолютным приращением называется рента, платежи которой образуют арифметическую прогрессию. Примером такой ренты служит поток платежей по кредиту, погашаемому в соответствии с дифференцированной схемой.

Несмотря на кажущуюся простоту, современная стоимость ренты с постоянным абсолютным приращением вычисляется наиболее сложным образом. Если обозначить размер первого платежа такой ренты через R, а величину прироста остальных платежей (разность арифметической прогрессии) — через D, то её современная стоимость будет вычисляться по общей формуле, полученной из формулы (25.2):

$$R(0)=\sum_{k=1}\frac{R+(k-1)D}{(1+j\tau)^k}=R\cdot\sum_{k=1}\frac{1}{(1+j\tau)^k}+D\cdot\sum_{k=1}\frac{k-1}{(1+j\tau)^k}. \tag{27.1}$$

Первое слагаемое в правой части этой формулы нам уже знакомо — это современная стоимость постоянной ренты, которая находится по формуле (25.3) для конечной ренты или (25.4) для бесконечной ренты. Поэтому основной проблемой является нахождение краткой формы для второго слагаемого.

Современная стоимость конечной ренты с постоянным абсолютным приращением

Как обычно, сначала мы получим формулу для вычисления современной стоимости конечной ренты с абсолютным приращением, а затем с помощью предельного перехода получим более приятное выражение для ренты с бесконечным числом платежей.

Утверждение.

Справедливо представление:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k-1}{(1+j\tau)^k}=\frac{1-(1+nj\tau)\cdot(1+j\tau)^{-n}}{(j\tau)^2}.$$

Доказательство.

Начнём доказательство издалека. Введём функцию

$$f(x)=\sum_{k=1}^{n-1}(1+x)^{-k}.$$

Она представляет собой современную стоимость постоянной ренты, состоящей из $n-1$ платежа размером 1, вычисленную с использованием процентной ставки x. Согласно формуле (25.3):

$$f(x)=\frac{1-(1+x)^{1-n}}{x}.$$

С другой стороны, $f(x)$ является дифференцируемой функцией, и её производная равна

$$f'(x) = -\sum_{k=1}^{n-1} k \cdot (1+x)^{-k-1} = -\sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{(1+x)^k}.$$

Если же мы продифференцируем краткое представление $f(x)$, вычисленное по формуле (25.3), то получим следующее:

$$f'(x) = \frac{(n-1)\cdot(1+x)^{-n}\cdot x - (1-(1+x)^{1-n})}{x^2} = -\frac{1-(1+nx)\cdot(1+x)^{-n}}{x^2}.$$

Значит,

$$-\sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{(1+x)^k} = -\frac{1-(1+nx)\cdot(1+x)^{-n}}{x^2}.$$

Убирая из полученного равенства знаки минуса и заменяя x на $j\tau$, мы получим требуемое равенство.

□

Вернёмся к нашей задаче вычисления современной стоимости конечной ренты с постоянным абсолютным приращением. Согласно только что доказанному утверждению и формуле (25.3), современная стоимость такой ренты равна

(27.2) $$R(0) = \frac{R}{j\tau}\cdot\left[1-(1+j\tau)^{-n}\right] + \frac{D}{(j\tau)^2}\cdot\left[1-(1+nj\tau)(1+j\tau)^{-n}\right].$$

Современная стоимость бесконечной ренты с постоянным абсолютным приращением

Если рента с постоянным абсолютным приращением содержит бесконечное число платежей, то выражения в квадратных скобках в формуле (27.2) обращаются в единицы. Обратите внимание: несмотря на то, что выражение $(1 + nj\tau)$ бесконечно возрастает при увеличении n, произведение $(1 + nj\tau)(1 + j\tau)^{-n}$ всё равно стремится при этом к нулю. Это свойство показательной функции: она растёт намного быстрее линейной.

В общем, устремляя n к бесконечности в формуле (27.2), мы получаем следующее выражение для современной стоимости ренты с постоянным абсолютным приращением:

(27.3) $$R(0) = \frac{R}{j\tau} + \frac{D}{(j\tau)^2}.$$

Пример.

Покажем в качестве примера, как удобные формулы для вычисления современной стоимости бесконечных рент могут быть использованы для вычисления современной стоимости их конечных аналогов.

Допустим, что вы хотите взять кредит размером 24 тысячи евро на два года под 12% годовых. Банк, предоставляющий кредит, использует дифференцированную схему погашения. В этом случае платежи в счёт погашения кредита образуют арифметическую прогрессию с начальным членом

$(\frac{1}{24} + 0{,}12 \cdot \frac{1}{12}) \cdot 24\,000 = 1240$ евро

и разностью

$-(0{,}12 \cdot \frac{1}{12} \cdot 24\,000) \cdot \frac{1}{24} = -10$ евро.

Кроме того, банк взимает с вас комиссию за предоставление кредита (1% от суммы кредита в момент его выдачи) и комиссию за ведение ссудного счёта (0,1% от суммы кредита ежемесячно). Таким образом, ваши первоначальные поступления составят

$(1 - 0{,}01) \cdot 24\,000 = 23\,760$ евро,

а каждый ежемесячный платёж увеличится на

$0{,}001 \cdot 24\,000 = 24$ евро.

Вы также знаете, что другой банк готов предоставить вам кредит без всяких комиссий, но под 15% годовых. Ваша задача — определить, стоит ли брать кредит в первом банке.

Всё, что нужно для этого сделать, — это найти современную стоимость потока ваших платежей по кредиту (вместе с ежемесячной комиссией), используя номинальную ставку 15%. Если результат окажется меньше, чем 23 760 евро, то вам следует взять кредит в первом банке (так как во втором банке при том же потоке ваших платежей размер кредита будет меньше).

Для начала по формуле (27.3) найдём современную стоимость *бесконечного* денежного потока, платежи которого образуют убывающую арифметическую прогрессию с начальным членом 1240 – 24 = 1216 евро и разностью –10 евро (заметим, что $j\tau = 0{,}15 \cdot \frac{1}{12} = 0{,}0125$):

$$R_1(0) = \frac{1216}{0{,}0125} + \frac{-10}{(0{,}0125)^2} = 33280$$ евро.

В этой бесконечной ренте «лишними» являются те платежи, которые начинаются с третьего года (с 25-го платежа). Они тоже образуют арифметическую прогрессию с разностью –10 евро, правда, с начальным членом

$1216 - 10 \cdot 24 = 976$ евро.

Её стоимость *к началу третьего года* (или к концу второго) также находится по формуле (6.3):

$$R_2(2) = \frac{976}{0{,}0125} + \frac{-10}{(0{,}0125)^2} = 14\,080$$ евро.

А современная стоимость этой «лишней» ренты составляет

$$R_2(0) = \frac{14080}{(1+0{,}0125)^{24}} \approx 10\,450$$ евро.

Современная стоимость нашей «настоящей» конечной ренты равна

$R_1(0) - R_2(0) = 33\,280 - 10\,450 = 22\,830$ евро.

Полученный результат меньше, чем 23 760 евро, поэтому вам следует взять кредит в первом банке, даже несмотря на его комиссии.

Кстати говоря, если вы не доверяете описанной выше процедуре расчёта с двукратным использованием формулы (27.3), то вы можете получить тот же самый результат с помощью прямой формулы (27.2):

$$R(0) = \frac{1216}{0{,}0125} \cdot \left[1 - (1{,}0125)^{-24}\right] + \frac{-10}{0{,}0125^2} \cdot \left[1 - (1 + 24 \cdot 0{,}0125)(1{,}0125)^{-24}\right] = 22\,830$$ евро.

Выглядит компактно, но реально вычислений больше, и они сложнее.

28. Непрерывные потоки платежей

В предыдущих параграфах мы рассматривали дискретные денежные потоки, платежи которых совершаются в строго определённые моменты времени. Вместе с тем, в финансовых расчётах иногда удобнее считать, что деньги поступают и выплачиваются непрерывно.

Например, если вы планируете денежный поток инвестиционного проекта по приобретению дорогостоящего оборудования, вы скорее всего разобьёте его по годам. Самый простой способ найти современную стоимость такого потока — это предположить, что каждый платёж совершается в конце соответствующего года, и воспользоваться одной из уже известных нам формул для вычисления приведённой стоимости. Однако это довольно грубое предположение. Ведь если фирма ведёт достаточно активную операционную деятельность, то поступления и выплаты, относящиеся к рассматриваемому инвестиционному проекту, могут совершаться каждый день. По сравнению с годом (стандартной единицей измерения времени в финансовых расчётах), один день — это очень мало, поэтому поток ежедневных платежей можно с очень большой точностью считать непрерывным.

Разумеется, за повышение точности вычислений приходится расплачиваться усложнением исходных данных. В данном случае нам необходимо знать, как распределяются платежи в течение каждого года. Другими словами, нам нужна *функция* $f(t)$, *представляющая собой интенсивность денежного потока инвестиционного проекта*.

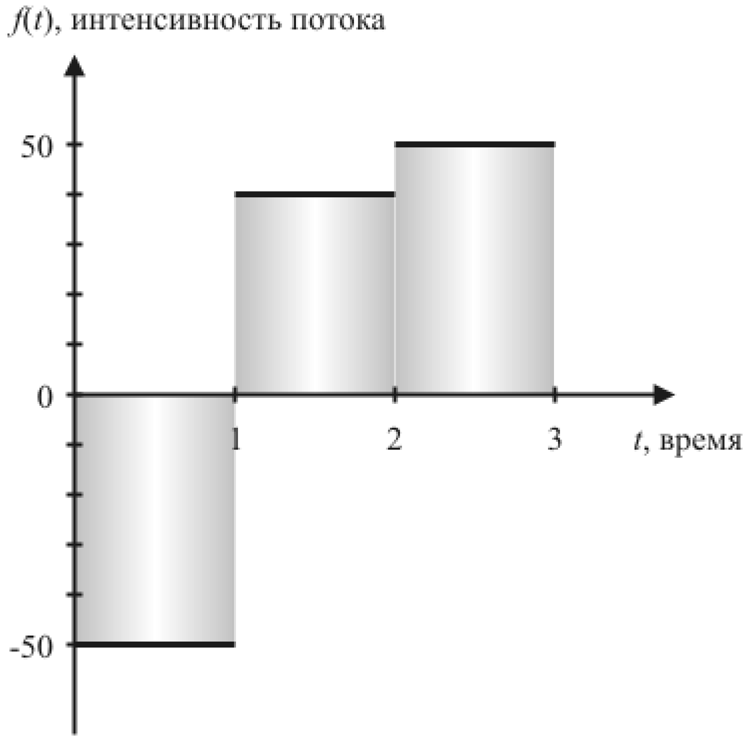
Пример.

Допустим, что вы составили следующий денежный поток некоторого краткосрочного инвестиционного проекта:

Год	Платёж, рубли
1	– 50 млн
2	40 млн
3	50 млн

Суммы, указанные в таблице, отражают суммарные платежи за первый, второй и третий годы инвестиционного проекта. Если этот проект связан с ежедневной деятельностью (например, если это вложение в оборудование, которое сначала нужно приобрести и настроить, а потом оно начнёт непрерывно производить товары для продажи), то вам, возможно, захочется иметь более точный прогноз денежного потока (и более точную современную стоимость).

Превратить 3 денежные суммы из таблицы в функцию $f(t)$, определённую для любого числа t в промежутке от 0 до 3, можно самыми разными способами. Например, можно предположить, что платежи совершаются равномерно в течение каждого из трёх лет. В этом случае функция $f(t)$ будет иметь следующий вид:



Интенсивность денежного потока при равномерном совершении платежей

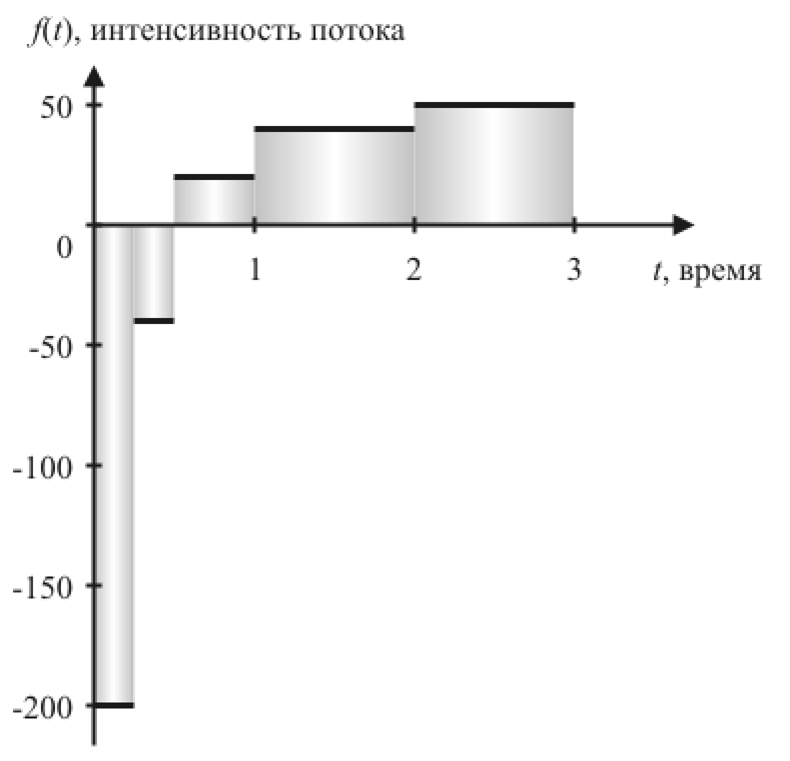
Функция $f(t)$ — это совокупность трёх жирных отрезков прямой. Суммарный годовой платёж — это площадь фигуры под каждым из отрезков (серые столбики).

Однако получившийся у нас рисунок не выглядит очень уж правдоподобным. Действительно, чем объяснить такой резкий переход от суммарных выплат первого года (– 50 млн) к суммарным поступлениям второго года (40 млн)? Как будто ещё 31 декабря всё было плохо, но в новогоднюю ночь случилось чудо, и уже с первого января оборудование стало приносить безумные прибыли. Чтобы получить более реалистичную функцию $f(t)$, нам нужно тщательнее спланировать данные о платежах первого года (второй и третий год мы трогать не будем — они и так выглядят неплохо).

Предположим, что вам известна следующая дополнительная информация:

- Капитальные затраты на приобретение оборудования составляют 50 млн рублей. Эта сумма выплачивается в течение первого квартала первого года (возможно, оплата производится несколькими частями).
- Оборудование будет получено к концу первого квартала, и весь второй квартал первого года его будут налаживать, что выльется в дополнительные 10 млн затрат.
- Начиная со второго полугодия первого года оборудование начнёт работать в нормальном режиме. Однако из-за тяжёлого выхода на рынок отдел продаж сможет обеспечить за второе полугодие денежную прибыль в размере всего лишь 10 млн рублей.

Информация подобного рода всегда известна при анализе будущего инвестиционного проекта. Фактически, мы всего лишь выделили затраты на приобретение и на запуск оборудования. Зная эту дополнительную информацию, мы можем построить уже намного более правдоподобную функцию интенсивности денежного потока $f(t)$:



Интенсивность денежного потока при детализации суммарного платежа первого года

Конечно, можно усложнять картину и дальше, добиваясь непрерывности функции $f(t)$, но, я думаю, делать этого не нужно. Во-первых, это резко усложнит дальнейшие вычисления, а во-вторых, не сильно увеличит их точность.

Обратите внимание: на рисунке приведён график функции *интенсивности* денежного потока. Суммарный платёж за какой-либо период времени равен площади фигуры (взятой с соответствующим знаком) под этим графиком. Поэтому, например, самый первый «столбик» опускается до отметки –200, в то время как его площадь равна 50 (млн рублей).

Замечание. Функции, подобные рассмотренным в примере, называются *ступенчатыми*. Область определения ступенчатой функции состоит из конечного числа интервалов, на каждом из которых такая функция является постоянной.

Как мы отметили в предыдущем параграфе, непрерывный поток платежей характеризуется не конечным набором датированных сумм, а его непрерывным аналогом — функцией интенсивности денежного потока. Несмотря на это, принципы вычисления современной стоимости непрерывных потоков платежей остаются такими же.

Допустим, интенсивность некоторого непрерывного денежного потока F задаётся функцией $f(t)$. Это значит, что за каждый конкретный промежуток времени $(t, t + dt)$ данный поток приносит сумму денег, приближённо равную $f(t) \cdot dt$. Причём чем меньше величина dt, тем точнее приближение. Если сложная годовая процентная ставка равна i, то современная стоимость этого «микроплатежа» составляет

(29.1) $$f(t) \cdot dt \cdot (1 + i)^{-t}$$

(в предположении, что этот платёж относится на начало соответствующего «микропериода»). Сумма всех таких «микроплатежей» и будет являться приближённым значением современной стоимости рассматриваемого нами непрерывного потока платежей. Причём, повторюсь, чем меньше величина dt, тем точнее приближение. Значит, для получения точного значения нам нужно устремить dt к нулю. Но сумма величин (29.1) при стремлении dt к нулю равна интегралу

(29.2) $$F(0) = \int_0^T \frac{f(t)}{(1+i)^t} dt,$$

который и является современной стоимостью потока платежей F с функцией плотности $f(t)$. В этой формуле T — это момент окончания денежного потока, который может равняться бесконечности.

Номинальная ставка непрерывного начисления процентов

Как уже мы отмечали раньше, при работе со сложными процентами для упрощения расчётов обычно применяются не сложные, а номинальные процентные ставки. Для непрерывного денежного потока номинальная процентная ставка должна соответствовать непрерывной капитализации (непрерывному начислению процентов). Так как сложную процентную ставку i с номинальной процентной ставкой j объединяет соотношение

$$(1 + i)^{\tau} = 1 + j\,\tau,$$

где τ — это период начисления процентов, то, согласно второму замечательному пределу, при стремлении τ к нулю будет достигаться следующее равенство:

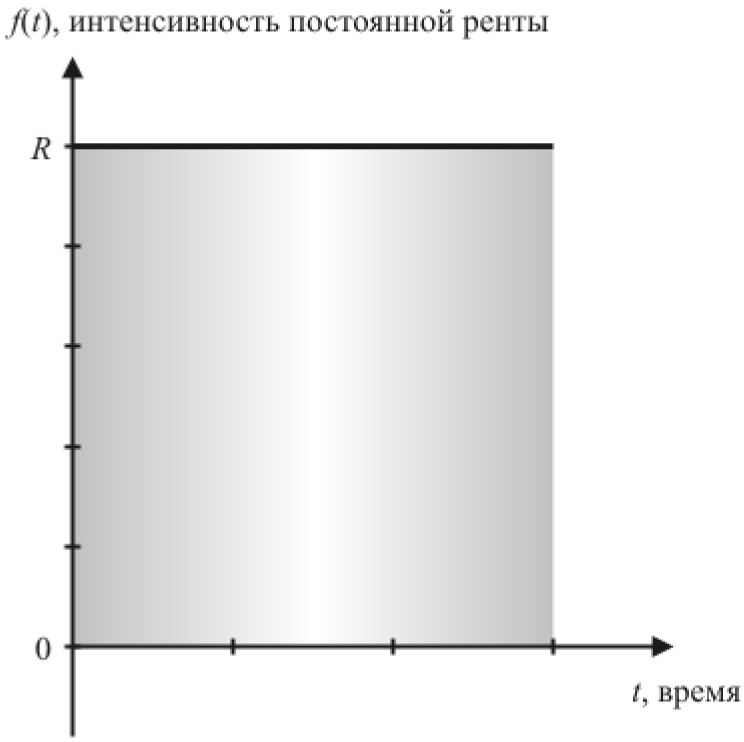
$$1 + i = e^{j}.$$

Значит, с использованием номинальной процентной ставки *j* формула (29.2) может быть записана таким образом:

(29.3) $$F(0)=\int_0^T f(t)e^{-jt}dt.$$

Современная стоимость постоянного непрерывного потока платежей

Простейшим примером непрерывного денежного потока является поток с постоянной интенсивностью. Функция интенсивности такого потока представляет собой константу: $f(t) = R$ для любого t:



Непрерывный поток с постоянной интенсивностью

Современная стоимость непрерывного потока с постоянной интенсивностью может быть легко вычислена, так как интеграл (8.3) разрешается в явном виде:

(29.4) $$F(0)=\frac{R}{j}\cdot(1-e^{-jT}).$$

Если рента является бесконечной, то разность в скобках обращается в единицу:

(29.5) $$F(0) = \frac{R}{j}.$$

Довольно похоже на то, что мы получали в § 25 для дискретной постоянной ренты, не правда ли? Только не забывайте, что там и здесь используются *разные* номинальные процентные ставки *j*. Разные в том смысле, что для одной и той же сложной годовой процентной ставки номинальная ставка с непрерывным начислением процентов будет отличаться от номинальной ставки с дискретным начислением процентов (независимо от периода начисления).

Пример.

В примере, который мы рассматривали в § 25, вы хотели положить на счёт в банке некоторую сумму денег, чтобы каждые полгода в течение десяти лет снимать оттуда по 500 тысяч рублей. Допустим, что на самом деле вы планируете снимать эти деньги не раз в полгода, а более или менее равномерно. Предположим также, что банк начисляет проценты по вкладу достаточно часто (еженедельно или ежедневно).

В этом случае ваш поток платежей представляет собой непрерывную ренту с постоянной интенсивностью $f(t)$ = 1 млн (именно эту сумму вы планируете снимать за один год). Сумма, которую вам сейчас нужно положить на счёт, равна современной стоимости такого потока. Чтобы воспользоваться формулой (29.4) для её вычисления, нужно найти номинальную ставку непрерывного начисления процентов.

Напомню, что по условию примера нам была известна номинальная процентная ставка с полугодовым начислением процентов, которая составляла 8%. Следовательно, сложная годовая процентная ставка равна $(1 + 0{,}08/2)^2 - 1 = 0{,}0816$, или 8,16%. Наконец, номинальная процентная ставка непрерывного начисления процентов составляет $j = \ln(1 + 0{,}0816) \approx 0{,}0784$, или 7,84%.

Теперь мы можем применить формулу (29.4) для определения той суммы, которую вы должны положить в банк:

$$F(0) = \frac{1\,000\,000}{0{,}0784} \cdot \left(1 - e^{-0{,}0784 \cdot 10}\right) \approx 6\,931\,428$$ рублей.

Ступенчатая функция, с которой мы познакомились в примере из предыдущего параграфа, является линейной комбинацией нескольких постоянных функций, заданных на разных промежутках. Поэтому современную стоимость денежного потока, интенсивность которого задаётся ступенчатой функцией, можно найти из формулы (29.4).

К примеру, пусть $f(t)$ — ступенчатая функция, равная c_k на промежутке $[t_{k-1}, t_k)$ при $k = 1, 2, \ldots$ Если для удобства обозначить $\tau_k = t_k - t_{k-1}$, то современная стоимость потока платежей с такой интенсивностью будет равна

(29.6) $$F(0) = \sum_{k=1} \frac{c_k}{j}\left(1 - e^{-j\tau_k}\right) \cdot e^{-jt_{k-1}}.$$

Пример.

Вычислим современную стоимость потока платежей из примера предыдущего параграфа для сложной процентной ставки 15%. Напомню, что после детализации платежа первого года мы получили функцию $f(t)$, которая равна:

- –200 на промежутке [0, ¼);
- –40 на промежутке [¼, ½);
- 20 на промежутке [½, 1);
- 40 на промежутке [1, 2);
- 50 на промежутке [2, 3).

Если сложная годовая процентная ставка равна 15%, то номинальная процентная ставка составляет

$j = \ln(1 + 0{,}15) \approx 0{,}14$, или 14%.

Согласно формуле (29.6), современная стоимость рассматриваемого нами потока платежей равна сумме

$$F(0) = \frac{-200}{0{,}14}\left(1 - e^{-0{,}035}\right) + \frac{-40}{0{,}14}\left(e^{-0{,}035} - e^{-0{,}07}\right) + \frac{20}{0{,}14}\left(e^{-0{,}07} - e^{-0{,}14}\right) +$$

$$+ \frac{40}{0{,}14}\left(e^{-0{,}14} - e^{-0{,}28}\right) + \frac{50}{0{,}14}\left(e^{-0{,}28} - e^{-0{,}42}\right) \approx 18$$ млн рублей.

Возникает закономерный вопрос: как сильно отличающийся результат мы бы получили, если бы использовали не непрерывное начисление процентов, а обычное, раз в год? Чтобы получить ответ, мы должны найти современную стоимость такой ренты:

Год	**Платёж, рубли**	**Комментарий**
0	–50 млн	Начальные капитальные затраты на приобретение оборудования
1	0 млн	Затраты на наладку и поступления первого года (по 10 млн рублей) уравновешивают друг друга
2	40 млн	Суммарный платёж второго года
3	50 млн	Суммарный платёж третьего года

В соответствии с формулой (25.2) современная стоимость этой ренты составляет

$F(0) = -50 + 40 \cdot (1 + 0{,}15)^{-2} + 50 \cdot (1 + 0{,}15)^{-3} \approx 13$ млн рублей.

Таким образом, распределение суммарных годовых платежей на весь трёхлетний срок добавляет целых 5 млн рублей к современной стоимости рассматриваемого нами потока платежей.

30. Денежный поток инвестиционного проекта

В предыдущих параграфах мы уже много раз сталкивались с терминами «инвестирование» и «инвестиционный проект», когда разбирали различные примеры. Пришло время формализовать эти понятия.

Понятие инвестирования

Под *инвестированием* в общем случае понимается вложение денежных средств *(инвестиций)* в какой-либо проект с целью получения через некоторое время прибыли.

Инвестиционные проекты характеризуются «растянутостью» во времени: доходы от инвестиций могут проявляться не сразу, но поступают в течение достаточно длительного срока.

Классическим примером инвестиционного проекта является покупка предприятием дорогостоящего оборудования с целью значительного расширения производства. Перед тем, как новое оборудование начнёт работать, его могут в течение нескольких месяцев настраивать и тестировать. Но зато потом оно будет приносить прибыль многие годы.

Другим примером инвестиционного проекта является вложение денег в акции или облигации с целью получения дивидендов или купонного дохода (об этих терминах мы подробно будем говорить позднее).

Наконец, банковский вклад — это тоже пример (пусть и самый тривиальный) инвестирования денежных средств.

В соответствии с приведёнными примерами выделяют два вида инвестиционных проектов:

- *Реальные инвестиции* — это инвестиции в «осязаемые» объекты, такие как недвижимость, земельные участки, оборудование и так далее.
- *Финансовые инвестиции* — это инвестиции в ценные бумаги, такие, как акции и облигации. (Сразу отмечу, что под это определение не попадает спекулятивная биржевая игра на курсах ценных бумаг.)

С финансовой точки зрения все инвестиционные проекты имеют одинаковую структуру и могут быть описаны с помощью такого понятия, как поток платежей.

Поток платежей инвестиционного проекта

Поток платежей инвестиционного проекта — это совокупность планируемых поступлений и выплат денежных средств, которые имеют непосредственное отношение к данному проекту. Отрицательные платежи в этом потоке соответствуют вложениям инвестора, положительные — его доходам.

В денежный поток инвестиционного проекта не включаются поступления и выплаты, которые не являются следствием его реализации. Например, если директор предприятия получал свою зарплату до реализации проекта, то он будет получать её и после, и она не включается в денежный поток. С другой стороны, если было приобретено новое оборудование, то, вероятно, потребуется расширение штата рабочих. Расходы на оплату труда новых рабочих появились вследствие реализации инвестиционного проекта, поэтому их заработная плата будет включена в денежный поток.

Денежный поток инвестиционного проекта всегда разбивается по временн*ы*м периодам (месяцам, кварталам, годам). При этом все поступления и выплаты денежных средств включаются в общий «платёж» того периода, когда они были зачислены на счета предприятия или списаны с них.

Анализ инвестиционного проекта

Чтобы принять решение о том, стоит ли вкладывать деньги в тот или иной инвестиционный проект, необходимо проанализировать ожидаемый результат от его реализации. То есть необходимо оценить, насколько денежный поток рассматриваемого инвестиционного проекта удовлетворяет потребностям инвестора.

Существуют различные методы подобных оценок, но наиболее частыми в применении являются так называемые дисконтные методы (их рассмотрению будет посвящён следующий параграф).

Дисконтные методы оценки — это методы, позволяющие судить об эффективности инвестиционного проекта по значениям различных показателей, при вычислении которых используется современная стоимость денежного потока проекта (всего или какой-либо его части).

Так как для вычисления современной стоимости любого потока платежей необходимо знать соответствующую ставку дисконтирования, то при использовании дисконтных методов оценки эффективности инвестиционных проектов возникает дополнительная проблема её определения. В общем и целом нахождение ставки дисконтирования является задачей даже более сложной, чем планирование будущих денежных потоков.

Для решения этой задачи исходят из следующего простого предположения: считается, что среди множества инвестиционных проектов, имеющих *одинаковый риск*, инвестор предпочтёт проект с наибольшей доходностью. Из этого предположения следует, что в качестве ставки дисконтирования при анализе инвестиционного проекта следует брать максимальную доходность других доступных инвестору проектов, имеющих такой же риск (выбранная таким образом ставка дисконтирования называется «альтернативными издержками»). Если показатели рассматриваемого инвестиционного проекта при выбранной ставке дисконтирования окажутся лучше, чем у всех его альтернатив, то инвестору будет выгоднее вложить деньги именно в него.

С подробностями решения задачи выбора ставки дисконтирования можно познакомиться в фундаментальных учебниках по инвестированию.

31. Дисконтные методы оценки инвестиций

Как было отмечено в предыдущем параграфе, дисконтными методами называются методы оценки эффективности инвестиционных проектов, связанные с вычислением современной стоимости их денежных потоков.

Чистая современная стоимость

Логично, что первый и самый распространённый среди дисконтных методов — это вычисление и оценка непосредственно современной стоимости денежного потока инвестиционного проекта. Полученное значение называется *чистой современной стоимостью*, или *NPV* (англ. *net present value*) проекта.

Суть метода проста: если значение *NPV* инвестиционного проекта положительное, то проект принимается, и отвергается в противном случае (если $NPV = 0$, то инвестору фактически всё равно, в какой из проектов вкладывать средства).

Пример.

Начальные вложения в инвестиционный проект составляют $I = 50$ млн. рублей. Чистый денежный поток проекта представлен следующей таблицей:

Год	**Платёж, млн. рублей**
0	–50
1	–10
2	5
3	20
4	40

Год	Платёж, млн. рублей
5	40

Найдём чистую современную стоимость данного проекта для ставки дисконтирования $i = 10\%$:

$$NPV = \frac{-10}{1+0{,}1} + \frac{5}{(1+0{,}1)^2} + \frac{20}{(1+0{,}1)^3} + \frac{40}{(1+0{,}1)^4} +$$

$$+ \frac{40}{(1+0{,}1)^5} - 50 \approx 12{,}2$$ млн. рублей

Рентабельность

Рентабельность, или *PI* (англ. *profitability index*) инвестиционного проекта — это отношение современной стоимости чистого денежного потока к сумме инвестиций *I*:

(31.1) $$PI = \frac{NPV}{I}$$

Индекс рентабельности используется, когда нужно сравнить между собой несколько проектов, имеющих различные суммы инвестиций (показатель *NPV* для этой цели не подходит, так как он является абсолютным). Чем выше рентабельность инвестиционного проекта, тем этот проект предпочтительнее.

Пример.

Рентабельность инвестиционного проекта из предыдущего примера равна

$$PI = \frac{NPV}{I} \approx \frac{12{,}2}{50} = 0{,}244 = 24{,}4\%$$

Срок окупаемости

Срок окупаемости, или *PP* (англ. *payback period*) инвестиционного проекта — это период времени, по истечении которого инвестиционные затраты начинают окупаться, то есть *NPV* становится положительным.

Срок окупаемости обычно используется как дополнительный критерий, когда нужно отсечь заведомо невыгодные проекты. Для этого задаётся некоторый пороговый срок окупаемости, и все проекты, у которых срок окупаемости больше, отбрасываются.

Пример.

Чтобы найти срок окупаемости рассматриваемого нами в примерах этого параграфа инвестиционного проекта, нужно построить последовательность сумм дисконтированных платежей его чистого денежного потока (в млн. рублей):

- $NPV^{(1)} = -50 - \frac{10}{1+0,1} \approx -59,1$
- $NPV^{(2)} = -50 - \frac{10}{1+0,1} + \frac{5}{(1+0,1)^2} \approx -54,9$
- $NPV^{(3)} = -50 - \frac{10}{1+0,1} + \frac{5}{(1+0,1)^2} + \frac{20}{(1+0,1)^3} \approx -39,9$
- $NPV^{(4)} = -50 - \frac{10}{1+0,1} + \frac{5}{(1+0,1)^2} + \frac{20}{(1+0,1)^3} + \frac{40}{(1+0,1)^4} \approx -12,6$
- $NPV^{(5)} = NPV \approx 12,2$

Как видим, инвестиционный проект начинает окупаться только в последнем, пятом году. Поэтому он, вероятно, не станет очень уж привлекательным для инвесторов.

32. Внутренняя норма доходности

Наиболее популярным недисконтным методом оценки эффективности инвестиций является метод, основанный на вычислении внутренней нормы доходности инвестиционного проекта.

Внутренняя норма доходности, или *IRR* (англ. *internal rate of return*) — это ставка дисконтирования, при которой *NPV* проекта равен нулю.

Внутренняя норма доходности называется так потому, что она полностью определяется внутренними (эндогенными) свойствами проекта, без использования внешних (экзогенных) параметров, таких, как заданная ставка дисконтирования.

Экономический смысл этого параметра заключается в том, что он определяет верхнюю границу доходности инвестиционного проекта, и, соответственно, максимальные удельные затраты по нему: если *IRR* проекта больше стоимости инвестируемого капитала , то проект следует принимать к рассмотрению, в противном случае — отклонять.

Следует иметь в виду, что на практике показатель внутренней нормы доходности применим, только когда лишь первые несколько платежей чистого денежного потока инвестиционного проекта отрицательны, а остальные положительны или равны нулю.

Пример.

Рассмотрим инвестиционный проект с начальными вложениями I = 8 млн. рублей, поступления (выплаты) по которому задаются следующей таблицей:

Год	Платёж, млн. рублей
0	–8
1	100
2	–400
3	500

Легко видеть, что для двух процентных ставок — 150% и 400% — NPV проекта равен нулю:

- $$\frac{100}{1+1{,}5}+\frac{-400}{(1+1{,}5)^2}+\frac{500}{(1+1{,}5)^3}-8=40-64+32-8=0$$
- $$\frac{100}{1+4}+\frac{-400}{(1+4)^2}+\frac{500}{(1+4)^3}-8=20-16+4-8=0$$

Значит, формально данный инвестиционный проект имеет как минимум две внутренние нормы доходности — IRR = 150% и IRR = 400%. Таким образом, в данном случае этот показатель неприменим для анализа его эффективности.

Вычисление внутренней нормы доходности

Вычислять значение IRR можно с помощью численного метода Ньютона, точно так же, как мы вычисляли эффективную процентную ставку по кредитам.

Пример.

Вычислим внутреннюю норму доходности инвестиционного проекта, который мы рассматривали в примерах к предыдущему параграфу. Напомню, что его денежный поток задавался следующей таблицей:

Год	Платёж, млн. рублей
0	–50
1	–10
2	5
3	20
4	40
5	40

Для вычисления *IRR* введём степенную функцию, коэффициентами при степенях аргумента которой являются суммы платежей, а самими степенями — номера годов, к которым эти платежи относятся:

$f(x) = –50 – 10x + 5x^2 + 20x^3 + 40x^4 + 40x^5$.

Аргумент x этой функции соответствует множителю дисконтирования. Если известно значение x, то *IRR* находится по формуле:

$IRR = x^{-1} – 1$.

Также нам понадобится производная этой функции:

$f\,'(x) = – 10x + 10x + 60x^2 + 160x^3 + 200x^4$.

Последовательность приближений к точному значению множителя дисконтирования строится от начального значения $x_{(0)} = 1$ по формуле

$$x_{(k+1)} = x_{(k)} - \frac{f(x_{(k)})}{f'(x_{(k)})}$$

Далее приведён график вычислений:

- $x_{(0)} = 1$; $IRR = 0$
- $x_{(1)} = 0{,}8928571$; $IRR \approx 12\%$
- $x_{(2)} = 0{,}867103$; $IRR \approx 15{,}33\%$
- $x_{(3)} = 0{,}865776$; $IRR \approx 15{,}5\%$
- $x_{(4)} = 0{,}865773$; $IRR \approx 15{,}5\%$

Таким образом, всего лишь за 4 вычисления мы нашли приближённое значение внутренней нормы доходности рассматриваемого инвестиционного проекта: $IRR \approx 15{,}5\%$.

Этот результат можно проверить — чистая современная стоимость, найденная с использованием внутренней нормы доходности, равна нулю:

$$NPV^{IRR} = \frac{-10}{1+0{,}155} + \frac{5}{(1+0{,}155)^2} + \frac{20}{(1+0{,}155)^3} +$$

$$+ \frac{40}{(1+0{,}155)^4} + \frac{40}{(1+0{,}155)^5} - 50 \approx 50{,}007 - 50 \approx 0$$