ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 1 (428)

УДК 517.95

Л.А. БУРЛАКОВА

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕКОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ

Рассматривается задача об устойчивости тривиального решения уравнения

$$M\ddot{y} + K_1 y + P_1 y = \widetilde{F}(y), \tag{1.1}$$

где $M = M^T > 0$, $K_1 = K_1^T$, $P_1 = -P_1^T$ — матрицы размерности $n \times n$, $\widetilde{F}(y)$ — матрица-столбец нелинейных по y членов, складывающихся из $F_1 = \operatorname{grad} \widetilde{U}(y)$ и F_2, причем выполняется условие $y^T F_2 = 0$; $\widetilde{F}(0) = 0$. Алгоритм разложения $\widetilde{F}(y)$ на такие составляющие известен [1]. Уравнения вида (1.1) возникают при исследовании механических систем с потенциальными и неконсервативными позиционными силами. Устойчивость систем (1.1) возможна только в критических по Ляпунову случаях, когда существенное влияние на устойчивость оказывают нелинейные силы.

1. *Дифференциальные следствия и теоремы о неустойчивости.* Если умножить слева (1.1) на M^{-1}, то после преобразований получим

$$\ddot{x} + Kx + Px = Q(x), \tag{1}$$

где $K = K^T = 1/2(M^{-1}(K_1 + P_1) + (K_1 - P_1)M^{-1})$, $P = -P^T = 1/2(M^{-1}(K_1 + P_1) - (K - P)M^{-1})$, $Q(x) = \widetilde{Q}_1 + \widetilde{Q}_2(x)$, $\widetilde{Q}_1 = \operatorname{grad} U(x)$, $x^T \widetilde{Q}_2 = 0$, $Q(0) = 0$. Уравнения такого вида были рассмотрены в работах [1]–[8] как с позиций устойчивости, так и других динамических свойств. При этом, в основном, проводились исследования линейных уравнений

$$\ddot{x} + Kx + Px = 0. \tag{1$'$}$$

Из характеристического уравнения для (1) $\det(\lambda^2 E + K + P) = 0$ следует, что $\det(K + P) > 0$ является необходимым условием устойчивости, т.к. при $\det(K + P) < 0$ характеристическое уравнение имеет корни с положительной вещественной частью [1].

Определение 1. Соотношение

$$\frac{d}{dt} f(\dot{x}, x) = F(\dot{x}, x)$$

называется дифференциальным следствием системы (1), если оно имеет место для всех решений системы.

Для решения задачи об устойчивости в критическом случае эффективен метод функций Ляпунова. При этом в теоремах второго метода используем дифференциальные следствия уравнений (1). Систематическое применение дифференциальных следствий позволяет достаточно полно исследовать область параметров системы по признаку устойчивости-неустойчивости, т.к. все теоремы формулируются в терминах матриц системы (1). Важным является то, что есть возможность обследовать границы в условиях устойчивости.

Работа выполнялась при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 94-01-01308).

Один из алгоритмов построения дифференциальных следствий сводится к умножению (1) слева на матрицы вида $(P\ddot{x})^T$, $(A_1\dot{x})^T$, $(A_2x)^T$, где A_i $(i=1,2)$ выбираются равными матрицам системы (1) или их комбинациям с последующим выделением полной производной (симметризацией). Неоднозначность проведения симметризации позволяет находить варианты дифференциальных следствий.

Для системы (1) построим дифференциальные следствия

$$\frac{d}{dt}(\dot{x}^TPKx+\dot{x}^TPPx-\dot{x}^TPQ)=\dot{x}^TPK\dot{x}+\dot{x}^TPP\dot{x}-\dot{x}^TP\dot{Q}, \tag{2}$$

$$\frac{d}{dt}(\dot{x}^TPKx+\dot{x}^TPPx)=\dot{x}^TPK\dot{x}+\dot{x}^TPP\dot{x}-x^T(K-P)PQ, \tag{2.1}$$

$$\frac{d}{dt}(\dot{x}^T\dot{x}+x^TKx-2U)=-2\dot{x}^TPx+2\dot{x}^TQ_2, \tag{3}$$

$$\frac{d}{dt}(\dot{x}^TL\dot{x}+x^TLKx+x^TLPx)=x^T(LK-KL)\dot{x}+x^T(LP+PL)\dot{x}+2\dot{x}^TLQ, \quad (L=L^T), \tag{4}$$

$$\frac{d}{dt}(\dot{x}^TK\dot{x}+x^TKKx+x^TKPx)=-\dot{x}^T(KP+PK)x+2\dot{x}^TKQ, \tag{4.1}$$

$$\frac{d}{dt}(x^T\dot{x})=\dot{x}^T\dot{x}-x^TKx-x^T\operatorname{grad}U(x), \tag{5}$$

$$\frac{d}{dt}(x^TP\dot{x})=-x^TPKx-x^TPPx+x^TPQ. \tag{6}$$

Заметим, что (3) соответствует теореме об изменении полной энергии.

Соотношения (2)–(6) дают некоторый набор функций Ляпунова V_i и их производных. Если V_i со своей производной (или связка из V_i) удовлетворяют какой-либо из теорем Ляпунова, Четаева, Красовского и др., то имеет место устойчивость или неустойчивость тривиального решения системы (1). Причем зачастую нет необходимости строить связку V_i, а достаточно определить условия существования связки с нужными свойствами.

Рассмотрим соотношение (5). Оно дает функцию Четаева. Используя (5) в теореме Ляпунова или Четаева о неустойчивости, получим известные теоремы о неустойчивости неконсервативных систем [1], [5] и простое их обобщение.

Теорема 1. *Если $K<0$, то положение равновесия неконсервативной системы* (1) *неустойчиво независимо от нелинейных сил (как позиционных, так и зависящих от $\dot{x}$).*

Теорема 2. *Если $K=0$, $x^T\operatorname{grad}U(x)<0$, то положение равновесия неконсервативной системы P*(1) *неустойчиво при любых неконсервативных позиционных силах.*

Теорема 3. *Если $K\leq 0$, то положение равновесия неконсервативной системы $\ddot{x}+Kx+Px=\widetilde{Q}_2$ неустойчиво при любых нелинейных позиционных неконсервативных силах $\widetilde{Q}_2$.*

Для доказательства теоремы 3 используем теорему Четаева. Рассмотрим область $\mathcal{L}=\{(x,\dot{x}) : x\geq 0,\ \dot{x}\geq 0,\ x\dot{x}>0\}$. Границей области является $x=0$, $\dot{x}=0$. Во всех точках этой области $x^TKx\leq 0$. Выберем в $\mathcal{L}$ сколь угодно близко к началу координат такое $x^0\neq 0$, что $Kx_0=0$, $\dot{x}_0^Tx_0>0$. Это возможно, т.к. $\det K=0$. Движение, начавшееся в этой точке, не может покинуть область через границу, на которой $V=x\dot{x}$ обращается в нуль, и потому “убегает” от начала координат в силу того, что в соотношении (5) $\dot{V}>0$.

Для линейной системы в условиях теоремы 3 неустойчивость следует из работы [6], где доказано, что при $\operatorname{Sp}K\leq 0$ система $(1')$ неустойчива.

Теорема 4. *Пусть в системе* (1) *действуют только неконсервативные силы* ($K=0$, $Q^Tx=0$), *тогда равновесие системы неустойчиво, если*

1. *силы таковы, что $Q(0)=0$, $Q(x)\neq 0$ при $x\neq 0$* [1].
2. *силы таковы, что* (1) *допускает решение $x_i=0$, $\dot{x}_i=0$ $(i=1,\dots,n-1)$, $x_n\neq 0$, $\dot{x}_n\neq 0$.*

Доказательство первой части теоремы проведено в [1]. Для доказательства второй части теоремы достаточно рассмотреть соотношение (5) на решении $x_i = 0$, $\dot{x}_i = 0$ $(i = 1, \ldots, n-1)$, $x_n \neq 0$, $\dot{x}_n \neq 0$.

Пример 1. Пусть дана система с нелинейными неконсервативными силами

$$\ddot{x}_1 = x_1 x_2^3, \quad \ddot{x}_2 = -x_1^2 x_2^2.$$

Положение равновесия $x_1 = x_2 = \dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$ неизолированное. Существует возмущенное движение $x_1 = \dot{x}_1 = 0$, $\dot{x}_2 = c_1$, $x_2 = c_1 t + c_2$. На этом движении соотношение (5) принимает вид $d(x_2 \dot{x}_2)/dt = \dot{x}_2^2$. Отсюда очевидна неустойчивость начала координат.

Вообще говоря, рассмотрение дифференциального следствия на “суженном” фазовом пространстве может быть достаточно результативным для выводов о неустойчивости, т.к. для доказательства неустойчивости достаточно обнаружить по крайней мере одно возмущенное решение, “уходящее” от невозмущенного движения.

Теорема 5. *Если матрица* $(P^T K + KP + 2PP) < 0$, *то решение* $x = \dot{x} = 0$ *системы* (1) *неустойчиво вне зависимости от действия нелинейных сил (как позиционных, так и зависящих от* $\dot{x}$*).*

Для доказательства построим линейную связку соотношений (2.1) и (6)

$$\frac{d}{dt}(\dot{x}^T PKx + \dot{x}^T PPx - x^T P\dot{x}) = \dot{x}^T PK\dot{x} + \dot{x}^T PP\dot{x} + \\ + x^T PKx + x^T PPx - x^T PQ - x^T (K-P)PQ.$$

При условиях теоремы квадратичная форма переменных x и $\dot{x}$, стоящая справа, определенно отрицательна независимо от слагаемых более высокого порядка, определяемых членами с $Q(x, \dot{x})$, в то время как форма, стоящая под знаком производной, знакопеременна. Выполнены требования теоремы Ляпунова о неустойчивости. $\square$

Пример 2. Рассмотрим систему второго порядка

$$\ddot{x}_1 + k_{11}x_1 + k_{12}x_2 - px_2 = Q_1,$$
$$\ddot{x}_2 + k_{22}x_2 + k_{12}x_1 + px_1 = Q_2.$$

Матрица

$$P^T K + KP + 2PP = \begin{pmatrix} 2p(k_{12} - p) & p(k_{22} - k_{11}) \\ p(k_{22} - k_{11}) & -2p(k_{12} + p) \end{pmatrix}$$

определенно отрицательна, если $p^2 - k_{12}^2 > 1/4(k_{22} - k_{11})^2$. При выполнении этого условия начало координат системы неустойчиво. Если теорема 1 дает условия неустойчивости, в которых $k_{ii} < 0$, то условия теоремы 5 могут быть выполнены при $k_{ii} > 0$. Это подтверждает известный факт [1], что введение в устойчивую потенциальную систему неконсервативных сил может дестабилизировать систему.

Замечание 1. Условия теоремы могут быть выполнены только при $\det P \neq 0$, что невозможно для систем с нечетным числом степеней свободы.

Замечание 2. При условиях теоремы характеристическое уравнение системы имеет корни с положительными вещественными частями. Это следует из того, что неустойчивость сохраняется при любых нелинейностях.

Теорема 6. *Если форма* $x^T K x$ *определенно отрицательна на многообразии* $x^T(P^T K + KP + 2PP)x = 0$, *то решение* $x = \dot{x} = 0$ *системы* (1) *неустойчиво вне зависимости от действия произвольных нелинейных сил.*

Доказательство. Построим связку следствий (5) и (6) таким образом, чтобы стоящая справа квадратичная форма переменных x, стала определенно отрицательной. В соответствии с теоремой Финслера [9] это возможно при выполнении условий теоремы 6. Тогда в связке соотношений (5) и (6) производная от знакопеременной функции Ляпунова будет определенно отрицательной по всем переменным в достаточно малой окрестности начала координат при любых нелинейных силах $Q(x,\dot{x})$. По теореме Ляпунова начало координат неустойчиво. $\square$

Следствие. Систему со знакоотрицательной матрицей K нельзя стабилизировать никакими неконсервативными силами [1].

Пример 3. Для системы из примера 2 рассмотрим возможности построения связки $V_1 - \sigma V < 0$ из квадратичных форм $V_1 = x^T K x = k_{11}x_1^2 + 2k_{12}x_1x_2 + k_{22}x_2^2$ и $V = x^T(P^T K + KP + 2PP)x = 2p(k_{12}-p)x_1^2 + 2p(k_{22}-k_{11})x_1x_2 - 2p(p+k_{12})x_{22}^2$. Если $K < 0$, то такая связка существует, и равновесие неустойчиво. Получили результат, вытекающий из теоремы 1. Поэтому в дальнейшем считаем, что K не является определенно отрицательной. Характеристическое уравнение пары форм

$$f_2(\lambda) = \lambda^2 p^2[4(p^2 - k_{12}^2) - (k_{22} - k_{11})^2] + 2\lambda p^2(k_{11} + k_{22}) + k_{11}k_{22} - k_{12}^2 = 0$$

имеет различные действительные корни, если $p^2 + detK = p^2 + k_{11}k_{22} - k_{12}^2 > 0$. Если в характеристическом полиноме $a = 4(p^2 - k_{12}^2) - (k_{22} - k_{11})^2 > 0$, что возможно только при $p - k_{12} > 0$, то форма V определенно отрицательна, и потому обязательно найдется такое σ, при котором $V_1 - \sigma V < 0$. Следовательно, движение неустойчиво. Этот результат совпадает с теоремой 5. Если параметры системы таковы, что $a = 0$, то форма V является постоянно отрицательной, принимающей нулевые значения на прямой $2(p-k_{12})x_1 = (k_{22}-k_{11})x_2$. В соответствии с теоремой Финслера связку $V_1 - \sigma V < 0$ можно построить тогда и только тогда, когда $V_1 \mid_{V=0} < 0$. Исключая с помощью уравнения прямой переменную x_1 в V_1, получим $V_1|_{V=0} = x_2^2 p(k_{11} + k_{22})/(p - k_{12}) < 0$, если $\mathrm{Sp}\, K = k_{11} + k_{22} < 0$. При $a < 0$ форма V знакопеременна. Исключая из V_1 одну из переменных с помощью уравнения $V = 0$, потребуем $V_1|_{V=0} < 0$. Это даст достаточные условия невозможности стабилизации линейными неконсервативными позиционными силами и разрушения устойчивости потенциальной системы при добавлении сил с кососимметричной матрицей. Как показывает анализ этих условий, они выполняются, если $\mathrm{Sp}\, K = k_{11} + k_{22} < 0$ (см. [5]).

Теорема 7. *Устойчивость положения равновесия резонансной потенциальной системы при $K = \alpha E$ разрушается при добавлении линейных неконсервативных сил независимо от нелинейности* [1].

В работе [1] доказательство проведено по характеристическому уравнению, в [3] используется функция из соотношения (6) . Приведем другое доказательство, которое представляет методический интерес.

Связка дифференциальных следствий (2) и (6) в этом случае имеет вид

$$\frac{d}{dt}((1+\alpha)\dot{x}^T Px + \dot{x}^T PPx) = \dot{x}^T PP\dot{x} + x^T PPx - x^T PQ - x^T PPQ.$$

При $\alpha < 0$ система неустойчива, что следует из теоремы 1. Если $\alpha > 0$, $\det P \neq 0$, то неустойчивость следует из теоремы 5. Пусть $\det P = 0$. Рассмотрим примыкающую к началу координат область $\mathcal{L} = \{x, \dot{x} : \dot{x}^T PPx < 0,\ x^T P\dot{x} < 0\}$, границе которой $V = ((1+\alpha)\dot{x}^T Px + \dot{x}^T PPx) = 0$ принадлежат гиперплоскости $P\dot{x} = 0$, $Px = 0$, $\dot{x} = 0$, $x = 0$. Внутри этой области в достаточно малой окрестности начала координат $\dot{V} = \dot{x}^T PP\dot{x} + x^T PPx - x^T PQ - x^T PPQ < 0$, что определяется квадратичной формой переменных x, $\dot{x}$, которая обращается в нуль только на границе $\mathcal{L}$, принимая отрицательные значения во всех других точках области. Слагаемые более высокого порядка малости от нелинейных сил в *достаточно малой окрестности начала координат* не влияют на знак V. Траектория, начавшаяся внутри этой области сколь угодно близко к началу координат, не может покинуть ее через границу $V = 0$, ни остаться вблизи начала координат в $\mathcal{L}$, т.к. вдоль этой траектории функция Ляпунова возрастает по модулю в силу того, что и сама функция и ее производная отрицательны. В соответствии с теоремой Четаева движение неустойчиво.

Можно получить и другие теоремы о неустойчивости, используя для доказательства связки в различных комбинациях следствий (2), (3),(5), (6).

2. *Первые интегралы и теоремы об устойчивости.* В работе [5] показано, что возможность стабилизации потенциальной линейной системы неконсервативными силами имеется только в случае, когда $\mathrm{Sp}\, K > 0$. Но при этом неизвестно, как влияют нелинейные силы. Система (1) критическая. Поэтому невозможно построить знакоопределенную по всем переменным функцию Ляпунова V такую, что квадратичная часть производной от V есть знакоопределенная (противоположного V знака) функция. Следовательно, для доказательства устойчивости можно искать функцию Ляпунова в классе таких функций, квадратичная часть которых является первым интегралом линейной системы.

В [8] первые интегралы линейной системы (1′) использованы для исследования устойчивости и возможности стабилизации при условии, что собственные значения матрицы K различны. Такие же условия накладываются в работе [4]. Здесь мы не накладываем ограничений на собственные значения матрицы K.

Исследуем структуру квадратичных по x, $\dot{x}$ первых интегралов для системы (1′). Введем квадратичную форму

$$V = \dot{x}^T N \dot{x} + x^T D x + x^T B \dot{x} + \dot{x}^T B^T x, \quad D = D^T, \quad N = N^T. \tag{7}$$

Если V в (7) является первым интегралом, то $\dot{V} \equiv 0$. Отсюда получаем, что матрицы в (7) должны удовлетворять уравнениям

$$B = -B^T, \quad (K - P)B = B(K + P), \quad (K - P)N = N(K + P).$$

Если будут найдены решения матричного уравнения

$$A^T Z = ZA, \quad (A = K + P), \tag{8}$$

то кососимметрические решения определят B, а симметрические — N. Тогда найдется и симметрическая матрица $D = 1/2((K - P)N + N(K + P))$.

Рассмотрим подробнее матричное уравнение (8). Отличное от нуля решение всегда существует. Если все корни характеристического уравнения матрицы $A = K + P$ различны, то (8) имеет решение — симметрическую матрицу с n произвольными параметрами. Если матрица A такова, что имеет равные корни с простыми элементарными делителями и/или различные жордановые клетки с такими же корнями, то для (8) существует как симметрическое, так и кососимметрическое решение. Следовательно, симметрическое решение существует всегда. Число независимых решений для (8) $n_1 = \sum\limits_{i=1}^{u} \sum\limits_{j=1}^{u} l_{ij}$, где u — число элементарных делителей $(\lambda - \lambda_i)^{p_i}$ матрицы A, l_{ij} — степень наибольшего общего делителя многочленов $(\lambda - \lambda_i)^{p_i}$ и $(\lambda - \lambda_j)^{p_j}$ [10].

Теорема А. *Число независимых квадратичных по x, $\dot{x}$ первых интегралов* (7) *для линейной системы* (1′) $n_1 \geq n$.

Для кососимметрического решения Z диагональный блок, соответствующий жордановой клетке матрицы A с корнем λ_i, всегда нулевой. Внедиагональные отличные от нуля элементы в Z могут быть только при наличии равных λ_i корней в других жордановых клетках или диагональных элементах матрицы $A = K + P$. Для симметрического решения, если A имеет жордановую клетку, то в решении Z на диагонали обязательно есть нули в нижнем углу блока, соответствующего этой жордановой клетке.

Как следует из теоремы A, для линейной системы ($1'$) всегда существует квадратичный по x, $\dot{x}$ первый интеграл. Один из таких интегралов получим из соотношения (4), выбрав симметрическое решение уравнения (8) в качестве матрицы L. Если $L = K$, то из (4.1) следует, что такой интеграл возможен для систем, у которых $KP = -PK$.

Для нелинейной системы (1) ищем первый интеграл в виде

$$W = V + F(x, \dot{x}), \tag{9}$$

и тогда к уравнениям (8) нужно добавить уравнения

$$2NQ + \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \tag{10}$$

$$2BQ - (K - P)\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0, \tag{11}$$

$$Q^T \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0. \tag{12}$$

При $\det(K + P) \neq 0$ из (11) следует $\partial F/\partial \dot{x} = 2(K - P)^{-1}BQ$, а из (8) — $B^T(K + P)^{-1}$ — кососимметричная матрица; потому (12) удовлетворяется тождественно: $Q^T(K - P)^{-1}BQ \equiv 0$. Из (10) находим $\partial F/\partial x = -2NQ$. Необходимые и достаточные условия существования $F(x, \dot{x})$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}\partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \dot{x}}; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}_i \partial \dot{x}_j} = \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}_j \partial \dot{x}_i}; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i}, \quad (i, j = 1, \ldots, n).$$

Отсюда вытекают требования

$$N\partial Q/\partial x = (\partial Q/\partial x)^T N, \quad N\partial Q/\partial \dot{x} = (K - P)^{-1}B\partial Q/\partial x,$$
$$(K - P)^{-1}B\partial Q/\partial \dot{x} = (\partial Q/\partial \dot{x})^T B(K - P)^{-1}, \tag{13}$$

которые можно рассматривать, в частности, как условия на нелинейности Q. Если нелинейные силы потенциальные ($Q = Q_1 = \operatorname{grad} U(x)$) и такие, что

$$U(x) = \sum_{i=1}^{n} U_i(x_i),$$

а матрица N диагональная, то (13) выполняется, т.к. тогда матрица Гесса для $U(x)$ является диагональной и потому перестановочна с любой диагональной матрицей N.

При выполнении условий (13)

$$F(x, \dot{x}) = \int -2(NQ)^T dx + Q^T B(K + P)^{-1} d\dot{x}, \quad F(0, 0) = 0.$$

Если $B = 0$, то при $\det(K + P) \neq 0$ имеем из (11) $\partial F/\partial \dot{x} = 0$, и $\partial F/\partial \dot{x} \neq 0$ возможно только при $\det(K + P) = 0$.

Предложение. *Пусть L из* (4) *удовлетворяет* (8) *и выполнены условия* (13) (*при* $B = 0$, $\partial F/\partial \dot{x} = 0$). *Тогда система допускает первый интеграл вида* (9). *Его знакоопределеннсть зависит от квадратичной части V. Условия $L > 0$ (< 0) и $D = 1/2((K - P)L + L(K + P)) > 0$ (< 0) являются достаточными условиями устойчивости по x, $\dot{x}$ тривиального решения как линейной системы* ($1'$), *так и нелинейной* (1) *при выборе нелинейности Q, определяемом условиями* (13). *Если при этом в* (1) $Q = Q(\dot{x})$, *то при $\dot{x}^T LQ < 0$ тривиальное решение устойчиво по x и асимптотически устойчиво по $\dot{x}$.*

Теорема 8. *Если линейная система* ($1'$) *допускает квадратичный первый интеграл с диагональной матрицей при $\dot{x}$, то требования знакоопределенности по $\dot{x}$, x этого интеграла являются достаточными условиями устойчивости тривиального решения нелинейной системы* (1), *в которой силы Q потенциальны с силовой функцией* $U(x) = \sum_{i=1}^{n} U_i(x_i)$.

Пример 4. Рассмотрим систему второго порядка из примера 2. Матрица

$$A = K + P = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} - p \\ k_{12} + p & k_{22} \end{pmatrix}$$

имеет характеристический полином $f(\lambda) = \lambda^2 - \lambda(k_{11} + k_{22}) + (k_{11}k_{22} + p^2 - k_{12}^2) = 0$. Если параметры системы таковы, что собственные значения A различны, то для (8) существует только симметрическое решение (матрица L для (4)). Если собственные значения A равны, то им будет соответствовать жорданова клетка ($p \neq 0$). Это следует из того, что кососимметрических решений здесь для (8) не существует. Обозначим $q_{ij} = \partial Q_i / \partial x_j$.

Уравнения (8) и (13) образуют переопределенную систему

$$\begin{aligned} (k_{12} - p)l_{11} - (k_{11} - k_{22})l_{12} - (k_{12} + p)l_{22} = 0, \\ q_{12}l_{11} - (q_{11} - q_{22})l_{12} - q_{21}l_{22} = 0. \end{aligned} \tag{14}$$

Из второго уравнения (14) следует

$$\partial(Q_1 l_{11} + Q_2 l_{12})/\partial x_2 = \partial(Q_1 l_{12} + Q_2 l_{22})/\partial x_1 = f(x_1, x_2),$$

и поэтому

$$Q_1 l_{11} + Q_2 l_{12} = \int f(x_1, x_2)dx_2 + f_1(x_1) = \psi_1(x_1, x_2),$$

$$Q_1 l_{12} + Q_2 l_{22} = \int f(x_1, x_2)dx_1 + f_2(x_2) = \psi_2(x_1, x_2).$$

Отсюда, если $\Delta = l_{11}l_{22} - l_{12}^2 \neq 0$, получаем

$$Q_1 = (l_{22}\psi_1 - l_{12}\psi_2)/\Delta, \quad Q_2 = (l_{11}\psi_2 - l_{12}\psi_1)/\Delta. \tag{15}$$

Если $\Delta = 0$, то необходимо $l_{11}\psi_2 - l_{12}\psi_1 = 0$, $l_{12}\psi_2 - l_{22}\psi_1 = 0$.

Рассмотрим другие варианты нелинейностей $Q = Q(x)$, при которых имеют место интегралы вида (9)

1. $l_{ii} = 0$, $l_{12} \neq 0 : Q_i = (l_{12}\psi_j - l_{jj}\psi_i)/l_{12}^2$,

$$Q_j = \Big(\int f(x_1, x_2)dx_j + f_i(x_i)\Big)/l_{12}, \quad (i, j = 1, 2);$$

2. $l_{ii} \neq 0$, $(i = 1, 2)$, $l_{12} = 0 : Q_i = \psi_i / l_{ii}$;
3. $l_{12} = 0$, $l_{ii} = 0$, $l_{jj} \neq 0$, тогда $\Delta = 0$, из условий совместности получаем $\psi_i = 0$, и поэтому $f_i(x_i) = 0$, $f(x_1, x_2) = 0$, $\psi_j = f_j(x_j)$, $Q_j = f_j(x_j)/l_{jj}$, Q_i произвольно;
4. $l_{ij} \neq 0$, $\Delta = 0$, тогда условия (13) могут быть выполнены только при $\psi_i = 0$, следовательно, $Q_1 = -Q_2\sqrt{l_{22}/l_{11}}$.

Из первого уравнения (14) имеем $l_{12} = (l_{11}(k_{12} - p) - l_{22}(k_{12} + p))/(k_{11} - k_{22})$ при $k_{11} \neq k_{22}$. Если $k_{11} = k_{22}$, то $l_{11}(k_{12} - p) = l_{22}(k_{12} + p)$. При таких l_{ij} вычисляем в первом интеграле матрицу D коэффициентов при x. В соответствии с рассмотренными вариантами получим следующее.

Если $k_{11} \neq k_{22}$, для системы с нелинейностями (15) существует интеграл

$$\begin{aligned} W = {} & l_{11}(k_{11} - k_{22})\dot{x}_1^2 + 2(l_{11}(k_{12} - p) - l_{22}(k_{12} + p))\dot{x}_1\dot{x}_2 + l_{22}(k_{11} - k_{22})\dot{x}_2^2 + \\ & + (l_{11}(k_{11}^2 - k_{11}k_{22} + k_{12}^2 - p^2) - l_{22}(k_{12} + p)^2)x_1^2 + 2(l_{11}k_{11}(k_{12} - p) - l_{22}k_{22}(k_{12} + p))x_1x_2 + \\ & + (l_{22}(k_{11}k_{22} - k_{22}^2 - k_{12}^2 + p^2) + l_{11}(k_{12} - p)^2)x_2^2 - 2(k_{11} - k_{22})\int \psi_1 dx_1 + \psi_2 dx_2 = \mathrm{const}, \end{aligned} \tag{16}$$

где l_{ii} — произвольные постоянные.

Для знакоопределенности W по всем переменным необходимо и достаточно $l_{11}(k_{11} - k_{22}) > 0$ (< 0), $l_{11}l_{22}(k_{11} - k_{22})^2 - (l_{11}(k_{12} - p) - l_{22}(k_{12} + p))^2 > 0$, и $d_{11} > 0$ (< 0), $d_{11}d_{22} - d_{12}^2 = (k_{12}^2 - k_{11}k_{22} -$

$p^2)(l_{11}(k_{12}-p)-l_{22}(k_{12}+p)^2-l_{11}l_{22}(k_{11}-k_{22})^2)>0$. Отсюда при любом выборе l_{ii} необходимо следует условие

$$\det(K+P)=k_{11}k_{22}-k_{12}^2+p^2>0. \tag{17}$$

Если в (16) выбрать $l_{11}=l_{22}=1$, получим совместно с (17) достаточные условия устойчивости нелинейной системы

$$k_{11}^2-k_{11}k_{22}-2p(p+k_{12})>0;$$
$$(k_{11}-k_{22})^2-4p^2>0.$$

Причем последнее, взятое с противоположным знаком, является условием неустойчивости. Это показано в примере 2. Поэтому оно является необходимым (без границы), так же, как и (17).

Если система такова, что $k_{12}=-p$, то при $k_{11}>0$, $k_{22}>0$ тривиальное решение системы устойчиво, т.к. выбором l_{ii} можно сделать интеграл (16) знакоопределенным.

Если $k_{11}=k_{22}$, то система с нелинейностями (15) допускает интеграл

$$W=l_{22}\frac{(k_{12}+p)}{k_{12}-p}\dot{x}_1^2+l_{22}\dot{x}_2^2+2l_{12}\dot{x}_1\dot{x}_2+$$
$$+(l_{12}(k_{12}+p)+k_{11}l_{22}\frac{(k_{12}+p)}{k_{12}-p})x_1^2+2(l_{12}k_{11}+l_{22}(k_{12}+p))x_1x_2+(l_{22}k_{11}+l_{12}(k_{12}-p))x_2^2-$$
$$-2\int(l_{22}\frac{k_{12}+p}{k_{12}-p}Q_1+l_{12}Q_2)dx_1+(l_{12}Q_1+l_{22}Q_2)dx_2=\mathrm{const}\,.$$

При $k_{12}^2-p^2>0$, $k_{11}>0$ этот интеграл может быть знакоопределенным. Получили достаточные условия устойчивости тривиального решения рассматриваемой системы. Если $k_{12}=-p$, а нелинейности имеют вид $Q_2=Q_2(x_2), Q_1=Q_1(x_1,x_2)$, то при $k_{11}>0$ имеет место устойчивость по переменным x_2, $\dot{x}_2$. Для доказательства достаточно выбрать в интеграле $l_{12}=0$.

Наконец, рассмотрим вариант, в котором $k_{11}=-k_{22}$, т.е. $\mathrm{Sp}\,K=0$. Тогда линейная система $(1')$ неустойчива по координатам, и потому не существует знакоопределенного квадратичного по этим переменным интеграла. Для такой системы при $k_{11}^2+k_{12}^2-p^2\neq 0$ характеристическое уравнение обязательно имеет корни с положительной вещественной частью, при $k_{11}^2+k_{12}^2-p^2=0$ все корни нулевые. Первый интеграл вида (9) получим из (16). Пусть $k_{11}^2+k_{12}^2-p^2=0$. Тогда квадратичная часть интеграла (9) имеет вид

$$V=l_{11}\dot{x}^2+(l_{11}(k_{12}-p)-l_{22}(k_{12}+p))\dot{x}_1\dot{x}_2/k_{11}+l_{22}\dot{x}_2^2+$$
$$+(l_{11}(k_{12}-p)+l_{22}(k_{12}+p))((k_{12}-p)x_1^2+2k_{11}x_1x_2-(k_{12}+p)x_2^2)/2k_{11}. \tag{18}$$

Для формы (18) условия знакоопределенности по x_i, $\dot{x}_i$ несовместны. Условия знакопостоянства приводят к требованию $l_{11}(k_{12}-p)+l_{22}(k_{12}+p)=0$. Выберем $l_{11}=k_{12}+p$, $l_{22}=p-k_{12}$. Форма (18) преобразуется к виду $V_1=\dot{z}^2$, где $\dot{z}=\sqrt{k_{12}+p}\dot{x}_1-\sqrt{p-k_{12}}\dot{x}_2$. V_1 является первым интегралом линейной системы, и он сохраняется при действии нелинейных сил, если они связаны соотношением $Q_1=-Q_2\sqrt{(p-k_{12})/(k_{12}+p)}$. Если $p>k_{12}$, $V_1>0$ и, следовательно, тривиальное решение исследуемой системы устойчиво по $\dot{z}$.

Пусть $k_{11}^2+k_{12}^2-p^2\neq 0$. Условия знакоопределенности квадратичной части интеграла (9) по-прежнему несовместны. Знакопостоянство формы возможно при значениях l_{ii}, удовлетворяющих $4k_{11}^2l_{11}l_{22}-(l_{11}(k_{12}-p)-l_{22}(k_{12}+p))^2=0$. Подставляя l_{ii} в (18), получаем, что линейная система допускает квадратичный интеграл

$$V_2=\Big(\frac{(k_{11}+\sqrt{k_{11}^2+k_{12}^2-p^2}}{k_{12}-p}\dot{x}_1+\dot{x}_2\Big)^2+$$
$$+\sqrt{k_{11}^2+k_{12}^2-p^2}\Big(\frac{k_{11}+\sqrt{k_{11}^2+k_{12}^2-p^2}}{k_{12}-p}x_1+x_2\Big)^2,\quad (k_{11}^2+k_{12}^2-p^2>0),$$

который сохраняется и при действии нелинейных сил, связанных соотношением $Q_1 = -Q_2(k_{12} - p)/(k_{11} + \sqrt{k_{11}^2 + k_{12}^2 - p^2})$. Следовательно, в данной ситуации тривиальное решение устойчиво по переменным $y = x_1(k_{11} + \sqrt{k_{11}^2 + k_{12}^2 - p^2})/(k_{12} - p) + x_2$ и $\dot{y}$.

Литература

1. Меркин Д.Р. *Введение в теорию устойчивости движения.* Учеб. пособие. – 3-е изд. – М.: Наука, 1987. – 304 с.
2. Зевин А.А. *К теории неконсервативных систем* // Вестн. Моск. ун-та. Сер. матем., механ. – 1972. – № 4. – С. 87–90.
3. Агафонов С.А. *Об устойчивости неконсервативных систем* // Вестн. Моск. ун-та. Сер. матем., механ. – 1972. – № 4. – С. 87–90.
4. Тхай В.Н. *Об устойчивости механических систем под действием позиционных сил* // ПММ. – 1980. – Т. 44. – № 1. – С. 40–48.
5. Лахаданов В.М. *О стабилизации потенциальных систем* // ПММ. – 1974. – Т. 39. – № 1. – С. 53–58.
6. Лахаданов В.М. *О влиянии структуры сил на устойчивость движения* // ПММ. – 1974. – Т. 38. – № 2. – С. 246–253.
7. Доброславский С.В. *О влиянии малой диссипации на устойчивость неконсервативных механических систем* // Изв. РАН. Механ. тверд. тела. – 1984. – № 2. – С. 68–70.
8. Агафонов С.А. *К вопросу устойчивости неконсервативных систем* // Изв. РАН. Механ. тверд. тела. – 1986. – № 1. – С. 47–51.
9. Кузьмин П.А. *Малые колебания и устойчивость движения.* Учеб. пособие. – М.: Наука, 1973. – 206 с.
10. Гантмахер Ф.Р. *Теория матриц.* – 3-е изд. – М.: Наука, 1967. – 575 с.

Иркутский Вычислительный центр
Сибирского Отделения
Российской Академии Наук

Поступила
31.07.1995