ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 1 (428)

УДК 517.92

А.Ю. АЛЕКСАНДРОВ

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПОСТРОЕНИЯ ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ НЕАВТОНОМНЫХ СИСТЕМ

В данной работе исследуются условия асимптотической устойчивости решений нелинейных систем дифференциальных уравнений с нестационарными возмущениями.

1. Рассмотрим систему

$$\dot{x}_s = \sum_{j=1}^{n} a_{sj} x_j, \quad s = 1, \dots, n, \tag{1}$$

где a_{sj} — постоянные коэффициенты, и соответствующую возмущенную систему

$$\dot{x}_s = \sum_{j=1}^{n} (a_{sj} + b_{sj}(t)) x_j, \quad s = 1, \dots, n. \tag{2}$$

Будем предполагать, что функции $b_{sj}(t)$ непрерывны и ограничены при $t \geq 0$ вместе с интегралами

$$\int_0^t b_{sj}(\tau) d\tau. \tag{3}$$

В работе [1] доказано, что из асимптотической устойчивости системы (1) может не следовать асимптотическая устойчивость системы (2). То есть возмущения рассматриваемого вида могут нарушать асимптотическую устойчивость линейных систем.

Рассмотрим далее нелинейную систему

$$\dot{x}_s = f_c(\mathbf{X}) + \sum_{j=1}^{k} b_{sj}(t) h_j(\mathbf{X}), \quad s = 1, \dots, n. \tag{4}$$

Здесь $f_s(\mathbf{X})$ и $h_j(\mathbf{X})$ — непрерывно дифференцируемые однородные функции порядка μ и σ соответственно, $\mu = p/q$, $\mu > 1$, $\sigma = u/r$, $\sigma > 1$, где p, q, u, r — натуральные числа, причем q и r нечетные, а функции $b_{sj}(t)$ удовлетворяют указанным выше условиям.

Пусть нулевое решение невозмущенной системы

$$\dot{x}_s = f_s(\mathbf{X}), \quad s = 1, \dots, n, \tag{5}$$

асимптотически устойчиво. В случае, когда порядок возмущений превышает порядок функций $f_s(\mathbf{X})$, т.е. $\sigma > \mu$, нулевое решение системы (4) также асимптотически устойчиво (см. [2]).

Покажем, что для нелинейных систем асимптотическая устойчивость нулевого решения может сохраняться и при $\sigma \leq \mu$.

2. Известно ([3], с.115–123), что из асимптотической устойчивости нулевого решения системы (5) следует существование функций $V(\mathbf{X})$ и $W(\mathbf{X})$, обладающих свойствами:

1) $V(\mathbf{X})$ и $W(\mathbf{X})$ — положительно-определенные функции;

Работа частично финансировалась грантом № JKF 100 Международного научного фонда и Российского правительства.

2) $V(\mathbf{X})$ и $W(\mathbf{X})$ — однородные функции порядка m и $m+\mu-1$ соответственно, $m>1$;
3) функция $V(\mathbf{X})$ непрерывно дифференцируема;
4) имеет место равенство

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_s}f_s(\mathbf{X})=-W(\mathbf{X}).$$

Предположим, что $V(\mathbf{X})$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция. Для выполнения этого условия достаточно, чтобы функции $f_s(\mathbf{X})$ являлись дважды непрерывно дифференцируемыми (см. [3], с.119–123).

Теорема 1. *При выполнении неравенства*

$$2\sigma>\mu+1 \tag{6}$$

нулевое решение системы (4) *асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Пусть

$$V_1=V(\mathbf{X})-\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_s}\sum_{j=1}^{k}\int_0^t b_{sj}(\tau)d\tau\, h_j(\mathbf{X}), \tag{7}$$

где $V(\mathbf{X})$ — функция Ляпунова, соответствующая невозмущенной системе (5).

Функция $V_1(t,\mathbf{X})$ положительно определена и допускает бесконечно малый высший предел. Дифференцируя ее, в силу системы (4) получаем

$$\frac{dV_1}{dt}=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_s}f_s(\mathbf{X})-\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\int_0^t b_{sj}(\tau)d\tau\,\frac{\partial}{\partial x_r}\left(\frac{\partial V}{\partial x_s}h_j(\mathbf{X})\right)f_r(\mathbf{X})-$$
$$-\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{k}b_{ri}(t)\int_0^t b_{sj}(\tau)d\tau\,\frac{\partial}{\partial x_r}\left(\frac{\partial V}{\partial x_s}h_j(\mathbf{X})\right)h_i(\mathbf{X}).$$

Таким образом, имеем

$$\frac{dV_1}{dt}=-W(\mathbf{X})+W_1(t,\mathbf{X})+W_2(t,\mathbf{X}), \tag{8}$$

где $W(\mathbf{X})$ — положительно-определенная однородная функция порядка $m+\mu-1$, а $W_1(t,\mathbf{X})$ и $W_2(t,\mathbf{X})$ — линейные комбинации однородных функций переменных $x_1,\ldots,x_n$ порядка $m+\mu+\sigma-2$ и $m+2\sigma-2$ соответственно, причем коэффициенты линейных комбинаций являются непрерывными и ограниченными при $t\geq 0$ функциями. Следовательно, при выполнении неравенства (6) производная функции $V_1(t,\mathbf{X})$ в силу системы (4) отрицательно определена.

Таким образом, функция (7) удовлетворяет условиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости ([4], с.61–65). □

Пример 1. Рассмотрим систему

$$\dot{x}_s=\sum_{j=1}^{n}a_{sj}x_j^{\mu},\quad s=1,\ldots,n, \tag{9}$$

где a_{sj} — постоянные коэффициенты, а $\mu=p/q$, $\mu>1$, причем p и q нечетные.

Пусть все собственные числа матрицы $(\mathbf{A}+\mathbf{A}^*)/2$ отрицательны. Известно ([5], с.78–80), что в этом случае нулевое решение системы (9) асимптотически устойчиво, а однородную функцию Ляпунова можно выбрать в виде

$$V(\mathbf{X})=\sum_{s=1}^{n}x_s^{\mu+1}.$$

Пусть задана возмущенная система

$$\dot{x}_s = \sum_{j=1}^{n} (a_{sj} + b_{sj}(t)) x_j^{\mu}, \quad s = 1, \dots, n. \tag{10}$$

По-прежнему предполагаем, что функции $b_{sj}(t)$ непрерывны и ограничены при $t \geq 0$ вместе с интегралами (3).

Применяя теорему 1, убеждаемся что нулевое решение системы (10) асимптотически устойчиво.

3. Покажем далее, что в случае, когда функции $b_{sj}(t)$ удовлетворяют некоторым дополнительным условиям, область значений параметров μ и σ, при которых имеет место асимптотическая устойчивость нулевого решения системы (4), можно расширить, используя несколько модифицированный способ построения функции Ляпунова.

Рассмотрим функции

$$c_{sj}^{(ri)}(t) = b_{ri}(t) \int_0^t b_{sj}(\tau) d\tau, \quad s, r = 1, \dots, n; \;\; i, j = 1, \dots, k.$$

Эти функции непрерывны и ограничены при $t \geq 0$. Предположим, что интегралы

$$\int_0^t c_{sj}^{(ri)}(\tau) d\tau \tag{11}$$

также ограничены при $t \geq 0$.

Теорема 2. *Если функции*

$$\frac{\partial}{\partial x_r} \left(\frac{\partial V}{\partial x_s} h_j \right) h_i, \quad r, s = 1, \dots, n; \;\; i, j = 1, \dots, k,$$

непрерывно дифференцируемы, то при выполнении неравенства

$$3\sigma > \mu + 2 \tag{12}$$

нулевое решение системы (4) *асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Функцию Ляпунова для системы (4) выбираем в виде

$$V_2 = V_1(t, \mathbf{X}) + \sum_{s=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{k} \int_0^t c_{sj}^{(ri)}(\tau) d\tau \frac{\partial}{\partial x_r} \left(\frac{\partial V}{\partial x_s} h_j(\mathbf{X}) \right) h_i(\mathbf{X}),$$

где $V_1(t, \mathbf{X})$ — функция, построенная при доказательстве теоремы 1.

Так как интегралы (11) ограничены при $t \geq 0$, а $\sigma > 1$, то функция $V_2(t, \mathbf{X})$ положительно определена и допускает бесконечно малый высший предел. Ее производная в силу системы (4) представима в виде

$$\frac{dV_2}{dt} = -W(\mathbf{X}) + W_1(t, \mathbf{X}) + W_3(t, \mathbf{X}) + W_4(t, \mathbf{X}), \tag{13}$$

где $W(\mathbf{X})$ и $W_1(t, \mathbf{X})$ — функции, входящие в выражение (8), а $W_3(t, \mathbf{X})$ и $W_4(t, \mathbf{X})$ — линейные комбинации с ограниченными при $t \geq 0$ коэффициентами однородных функций порядка $m + \mu + 2\sigma - 3$ и $m + 3\sigma - 3$ соответственно.

Если выполнено неравенство (12), то эта производная является отрицательно-определенной функцией. $\square$

Замечание 1. В некоторых случаях удается уточнить условия асимптотической устойчивости, не требуя ограниченности интегралов (11).

Пример 2. Рассмотрим систему

$$\dot{x}_s = \frac{\partial}{\partial x_s}\Big(W(\mathbf{X}) + \sum_{j=1}^{k} b_j(t) W_j(\mathbf{X})\Big), \quad s = 1, \dots, n. \tag{14}$$

Здесь $W(\mathbf{X})$ — непрерывно дифференцируемая отрицательно-определенная однородная порядка $\mu+1$ функция, $\mu > 1$, $W_j(\mathbf{X})$ — дважды непрерывно дифференцируемые однородные порядка $\sigma+1$ функции, $\sigma > 1$, а функции $b_j(t)$ непрерывны и ограничены при $t \geq 0$ вместе с интегралами

$$\int_0^t b_j(\tau) d\tau.$$

Пусть

$$V(\mathbf{X}) = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n} x_s^2.$$

Функция $V_1(t, \mathbf{X})$, построенная по формуле (7), имеет вид

$$V_1 = V(\mathbf{X}) - (\sigma+1)\sum_{j=1}^{k}\int_0^t b_j(\tau) d\tau \, W_j(\mathbf{X}).$$

По теореме 1 нулевое решение системы (14) асимптотически устойчиво при выполнении неравенства (6).

Найденные условия асимптотической устойчивости можно уточнить, используя функцию

$$V_2 = V_1(t, \mathbf{X}) + \frac{(\sigma+1)}{2}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\int_0^t b_i(\tau) d\tau \int_0^t b_j(\tau) d\tau \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial W_i}{\partial x_s}\frac{\partial W_j}{\partial x_s}.$$

Отсюда при выполнении неравенства (12) имеет место асимптотическая устойчивость нулевого решения системы (14).

Замечание 2. Накладывая аналогичным образом новые условия на функции $b_{sj}(t)$, можно продолжить процесс построения функций Ляпунова, расширяя область значений параметров μ и σ, при которых возмущения не нарушают асимптотическую устойчивость нулевого решения.

Рассмотрим некоторые типы систем, для которых применение указанного процесса позволяет доказать, что асимптотическая устойчивость сохраняется при всех μ и σ, удовлетворяющих неравенствам

$$\mu > 1, \quad \sigma > 1. \tag{15}$$

При этом будем предполагать существование и непрерывность рассматриваемых частных производных.

Пример 3. Пусть система (4) представима в виде

$$\dot{x}_s = f_s(\mathbf{X}) + b(t) h_s(\mathbf{X}), \quad s = 1, \dots, n. \tag{16}$$

Тогда функции Ляпунова будут определяться по рекуррентным формулам

$$V_1 = V(\mathbf{X}) - g_1(\mathbf{X})\int_0^t b(\tau) d\tau,$$

$$V_i = V_{i-1} + \frac{(-1)^i}{i\,!} g_i(\mathbf{X})\Big(\int_0^t b(\tau) d\tau\Big)^i, \quad i = 2, 3, \dots,$$

где

$$g_1 = \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_s} h_s(\mathbf{X}), \quad g_i = \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial g_{i-1}}{\partial x_s} h_s(\mathbf{X}), \quad i = 2, 3, \dots$$

Условия асимптотической устойчивости, получающиеся с помощью функции $V_i(t,\mathbf{X})$, имеют вид
$$\sigma > 1 + (\mu - 1)/(i+1).$$
Следовательно, при выполнении неравенств (15) нулевое решение системы (16) асимптотически устойчиво.

Пример 4. Предположим, что правые части системы (4) удовлетворяют условиям
$$h_j = h_j(x_1,\dots,x_r), \quad 1 \le r < n, \qquad b_{sj}(t) = 0, \quad s = 1,\dots,r; \;\; j = 1,\dots,k.$$
Пусть
$$V_1 = V(\mathbf{X}) - \sum_{\alpha_1=r+1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_{\alpha_1}} \sum_{\beta_1=1}^{k} \int_0^t b_{\alpha_1\beta_1}(\tau)d\tau\, h_{\beta_1}(\mathbf{X}),$$
$$V_i = V_{i-1} + \frac{(-1)^i}{i\,!} \sum_{\alpha_1=r+1}^{n} \cdots \sum_{\alpha_i=r+1}^{n} \frac{\partial^i V}{\partial x_{\alpha_1}\cdots \partial x_{\alpha_i}} \cdot$$
$$\sum_{\beta_1=1}^{k} \cdots \sum_{\beta_i=1}^{k} \int_0^t b_{\alpha_1\beta_1}(\tau)d\tau \,\cdots \int_0^t b_{\alpha_i\beta_i}(\tau)d\tau\, h_{\beta_1}(\mathbf{X})\cdots h_{\beta_i}(\mathbf{X}), \quad i = 2,3,\dots$$
Используя данные функции, получаем, что асимптотическая устойчивость нулевого решения будет иметь место при всех значениях μ и σ, удовлетворяющих неравенствам (15).

Пример 5. Рассмотрим систему
$$\dot{x}_1 = f_1(\mathbf{X}) + \sum_{j=1}^{k} b_j(t)h_j(\mathbf{X}), \quad \dot{x}_s = f_s(\mathbf{X}), \quad s = 2,\dots,n,$$
где
$$h_j(\mathbf{X}) = \psi(x_1)\varphi_j(x_2,\dots,x_n).$$
В этом случае функции Ляпунова строятся по формулам
$$V_1 = V(\mathbf{X}) - g_1(\mathbf{X}) \sum_{\alpha_1=1}^{k} \varphi_{\alpha_1} \int_0^t b_{\alpha_1}(\tau)d\tau,$$
$$V_i = V_{i-1} + \frac{(-1)^i}{i\,!} g_i(\mathbf{X}) \sum_{\alpha_1=1}^{k} \cdots \sum_{\alpha_i=1}^{k} \varphi_{\alpha_1}\cdots\varphi_{\alpha_i} \int_0^t b_{\alpha_1}(\tau)d\tau \,\cdots \int_0^t b_{\alpha_i}(\tau)d\tau, \quad i = 2,3,\dots,$$
а функции $g_i(\mathbf{X})$ имеют вид
$$g_1 = \frac{\partial V}{\partial x_1}\psi(x_1), \quad g_i = \frac{\partial g_{i-1}}{\partial x_1}\psi(x_1), \quad i = 2,3,\dots$$
Проверяя для функций $V_i(t,\mathbf{X})$ условия теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости, как и в примерах 3 и 4, получаем, что при выполнении неравенств (15) нулевое решение рассматриваемой системы будет асимптотически устойчиво.

4. Предложенный в данной работе метод построения функций Ляпунова можно использовать и в случае, когда возмущения и правые части невозмущенной системы являются обобщенно-однородными функциями.

Определение ([6], с.187). Функцию $f(\mathbf{X})$, заданную и непрерывную при всех $\mathbf{X} \in \mathbf{E}^n$, назовем обобщенно-однородной класса $(m_1,\dots,m_n)$ порядка m, если для любого $c \in (-\infty,+\infty)$ имеет место соотношение
$$f(c^{m_1}x_1,\dots,c^{m_n}x_n) = c^m f(x_1,\dots,x_n),$$
где $m, m_1,\dots,m_n$ — положительные рациональные числа с нечетными знаменателями.

Рассмотрим систему

$$\dot{x}_s = f_s(\mathbf{X}) + \sum_{j=1}^{k} b_{sj}(t) h_{sj}(\mathbf{X}), \quad s = 1, \ldots, n. \tag{17}$$

Здесь $f_s(\mathbf{X})$ — дважды непрерывно дифференцируемые обобщенно-однородные функции класса $(m_1, \ldots, m_n)$ порядка $m_s + \mu$, $h_{sj}(\mathbf{X})$ – непрерывно дифференцируемые обобщенно-однородные функции класса $(m_1, \ldots, m_n)$ порядка $m_s + \sigma_s$, где $\mu, \sigma_1, \ldots, \sigma_n$ — положительные рациональные числа с нечетными знаменателями, а функции $b_{sj}(t)$ непрерывны и ограничены при $t \geq 0$ вместе с интегралами (3).

Пусть нулевое решение невозмущенной системы (5) асимптотически устойчиво. Тогда существует дважды непрерывно дифференцируемая положительно-определенная обобщенно-однородная функция $V(\mathbf{X})$ класса $(m_1, \ldots, m_n)$ порядка m, $m > 0$, производная которой в силу системы (5) отрицательно определена ([6], с.189–192). Известно также ([6], с.197), что при выполнении неравенств $\sigma_s > \mu$, $s = 1, \ldots, n$, нулевое решение системы (17) асимптотически устойчиво.

Теорема 3. *Если*

$$2\sigma_s > \mu, \quad s = 1, \ldots, n, \tag{18}$$

то нулевое решение системы (17) *асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Пусть

$$V_1 = V(\mathbf{X}) - \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s} \sum_{j=1}^{k} \int_0^t b_{sj}(\tau) d\tau \, h_{sj}(\mathbf{X}), \tag{19}$$

$$\sigma = \min\{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}, \quad z = \sum_{s=1}^{n} |x_s|^{\frac{1}{m_s}}.$$

Для функции $V(\mathbf{X})$ существуют положительные постоянные α_1 и α_2 такие, что при всех $\mathbf{X} \in \mathbf{E}^n$ справедливо неравенство

$$\alpha_1 z^m \leq V(\mathbf{X}) \leq \alpha_2 z^m,$$

а выражения

$$\frac{\partial V}{\partial x_s} h_{sj}(\mathbf{X}), \quad s = 1, \ldots, n; \; j = 1, \ldots, k,$$

являются обобщенно-однородными функциями класса $(m_1, \ldots, m_n)$ порядка $m + \sigma_s$ (см. [6], с.190).

Производная функции $V_1(t, \mathbf{X})$ в силу системы (17) представима в виде (8), причем в данном случае $W(\mathbf{X})$ — положительно-определенная обобщенно-однородная функция класса $(m_1, \ldots, m_n)$ порядка $m + \mu$, а функции $W_1(t, \mathbf{X})$ и $W_2(t, \mathbf{X})$ в некоторой окрестности точки $\mathbf{X} = \mathbf{0}$ и при всех $t \geq 0$ удовлетворяют неравенствам

$$|W_1(t, \mathbf{X})| \leq a_1 z^{m+\sigma+\mu}, \quad |W_2(t, \mathbf{X})| \leq a_2 z^{m+2\sigma},$$

где a_1 и a_2 — положительные постоянные.

Следовательно, при выполнении неравенств (18) производная функции $V_1(t, \mathbf{X})$ будет отрицательно определена. $\square$

Пример 6. Рассмотрим уравнение Льенара

$$\ddot{x} + a x^{\mu} \dot{x} + c x^{2\mu+1} = 0,$$

где a и c — положительные постоянные, $\mu = p/q$, $\mu > 1$, причем p — четное, а q — нечетное числа. Известно ([5], с.69–70), что нулевое решение этого уравнения асимптотически устойчиво.

Произведя замену
$$y = \dot{x} + \frac{a}{\mu+1}x^{\mu+1},$$
получим систему
$$\dot{x} = y - \frac{a}{\mu+1}x^{\mu+1},$$
$$\dot{y} = -cx^{2\mu+1},$$
правые части которой являются дважды непрерывно дифференцируемыми обобщенно-однородными функциями. Здесь $m_1 = 1$, $m_2 = \mu + 1$.

Пусть задано возмущенное уравнение
$$\ddot{x} + (ax^\mu + b_1(t)x^\lambda)\dot{x} + cx^{2\mu+1} + b_2(t)x^\nu = 0,$$
где λ и ν — рациональные числа с нечетными знаменателями, $\lambda > 1$, $\nu > 1$, а функции $b_1(t)$ и $b_2(t)$ непрерывны и ограничены при $t \geq 0$ вместе с интегралами
$$\int_0^t b_j(\tau)d\tau, \quad j = 1, 2.$$
Применяя теорему 3, находим условия, при выполнении которых возмущения не нарушают асимптотическую устойчивость нулевого решения,
$$2\lambda > \mu, \quad 2\nu > 3\mu + 2.$$

В частности, асимптотически устойчиво нулевое решение уравнения
$$\ddot{x} + (a + b_1(t))x^\mu\dot{x} + (c + b_2(t))x^{2\mu+1} = 0.$$

Замечание 3. Для системы (17) также можно уточнить условия асимптотической устойчивости нулевого решения, накладывая дополнительные ограничения на функции $b_{sj}(t)$ и применяя модифицированный метод построения функций Ляпунова.

Например, в случае, когда интегралы (11) ограничены при $t \geq 0$, имеет место

Теорема 4. *Пусть функции*
$$\frac{\partial}{\partial x_r}\left(\frac{\partial V}{\partial x_s}h_{sj}\right)h_{ri}, \quad r, s = 1, \dots, n; \quad i, j = 1, \dots, k,$$
непрерывно дифференцируемы. Тогда при выполнении неравенств
$$3\sigma_s > \mu, \quad s = 1, \dots, n, \tag{20}$$
нулевое решение системы (17) *асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Рассмотрим функцию
$$V_2 = V_1(t, \mathbf{X}) + \sum_{s=1}^n \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^k \int_0^t c_{sj}^{(ri)}(\tau)d\tau \, \frac{\partial}{\partial x_r}\left(\frac{\partial V}{\partial x_s}h_{sj}(\mathbf{X})\right)h_{ri}(\mathbf{X}).$$
Здесь $V_1(t, \mathbf{X})$ — функция, построенная по формуле (19). Функция $V_2(t, \mathbf{X})$ положительно определена и допускает бесконечно малый высший предел. Ее производная в силу системы (17) имеет вид (13), где функции $W(\mathbf{X})$ и $W_1(t, \mathbf{X})$ обладают свойствами, указанными в доказательстве теоремы 3, а для функций $W_3(t, \mathbf{X})$ и $W_4(t, \mathbf{X})$ в достаточно малой окрестности начала координат и при всех $t \geq 0$ справедливы неравенства
$$|W_3(t, \mathbf{X})| \leq a_3 z^{m+\mu+2\sigma}, \quad |W_4(t, \mathbf{X})| \leq a_4 z^{m+3\sigma}.$$
Здесь a_3 и a_4 — положительные постоянные.

Таким образом, при выполнении неравенств (20) функция $V_2(t, \mathbf{X})$ удовлетворяет условиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости. $\square$

Замечание 4. Аналогичным образом получаются достаточные условия неустойчивости нулевого решения системы (4) (системы (17)), если только для невозмущенной системы (5) с однородными (обобщенно-однородными) правыми частями существует однородная (обобщенно-однородная) функция $V(\mathbf{X})$, удовлетворяющая требованиям первой теоремы Ляпунова о неустойчивости ([4], с.65–66). Условия существования таких функций получены в работах [2], [7].

Литература

1. Виноград Р.Э. *Об одном критерии неустойчивости в смысле А.М. Ляпунова решений линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений* // ДАН СССР. – 1952. – Т. 84. – № 2. – С. 201–204.
2. Красовский Н.Н. *Об устойчивости по первому приближению* // ПММ. – 1955. – Т. 19. – № 5. – С. 516–530.
3. Зубов В.И. *Устойчивость движения.* (*Методы Ляпунова и их применение*). Учебн. пособие. – М.: Высш. школа, 1973. – 271 с.
4. Ляпунов А.М. *Общая задача об устойчивости движения.* – 2-е изд. – М.–Л.: ОНТИ, 1935. – 386 с.
5. Барбашин Е.А. *Функции Ляпунова.* – М.: Наука, 1970. - 240 с.
6. Зубов В.И. *Математические методы исследования систем автоматического регулирования.* – Л.: Судпромгиз, 1959. – 324 с.
7. Каневский А.Я., Рейзинь Л.Э. *Построение однородных функций Ляпунова-Красовского* // Дифференц. уравнения. – 1973. – Т. 9. – № 2. – С. 251–259.

Санкт-Петербургский
государственный университет

Поступила
07.08.1995